Теорія страхового та фінансового ризику

Ямненко Р.Є

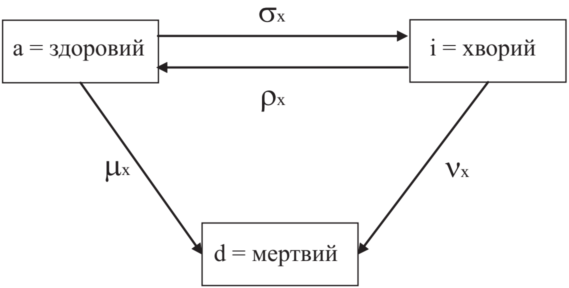
КНУ імені Тараса Шевченка

10 травня 2017 р.

Зміст

1. Лекція 9. Загальна модель Маркова
   - Загальна модель Маркова

1.1. Модель з двома станами може бути поширена на довільну кількість станів, з довільними переходами між ними. Як приклад моделі, можна розглянути модель "хвороба-смерть" з трьома станами



1.2. Нехай $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ – це скінчена множина станів, а $Y(t)$ – це процес Маркова у неперервному часі із простором станів S.

Зрозуміло, що ми вибираємо стани так, щоб вони представляли ті умови, які нас цікавлять з точки зору страхування.

1.3. Будемо використовувати такі позначки. Нехай g і h – це два довільні стани. Якщо стани g і h різні, то позначимо через μ_{x+t}^{gh} інтенсивність переходу із стану g у стан h у віці $x+t$.

Визначимо

$${}_tp_x^{gh} = P(\text{Бути у стані } h \text{ у віці } x+t \mid \text{Бути у стані } g \text{ у віці } x),$$

де стани g і h не обов'язково різні.

У цьому означенні не визначено поведінку процесу між віком x і віком $x+t$. Зокрема, якщо $g=h$, це не означає, що процес залишається у стані g протягом усього проміжку часу $[x, x+t]$. Тому для будь-якого стану g визначимо

$${}_tp_x^{\overline{gg}} = P(\text{Знаходитись у стані } g \text{ з віку } x \text{ до віку } x+t \mid \text{Бути у стані } g \text{ у віці } x).$$

1.4. Якщо повернення у стан g не можливе, то

$$ {}_tp_x^{\overline{gg}} = {}_tp_x^{gg}, $$

але у загальному випадку це не правильно (наприклад для станів a та i у моделі "хвороба-смерть"). Розширимо Припущення 2 для моделі з двома станами так:

Припущення 2^***.**

Для довільних різних станів g і h

$$ {}_{dt}p_{x+t}^{gh} = \mu_{x+t}^{gh}\, dt + o(dt), $$

і ймовірність того, що процес зробить два або більше переходів за час dt має порядок $o(dt)$.

1.5. Аналогічно попередньому ми можемо вивести систему прямих рівнянь Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_x^{gh} = \sum_{j\neq h}\left({}_tp_x^{gj}\mu_{x+t}^{jh} - {}_tp_x^{gh}\mu_{x+t}\right),$$

а також показати, що

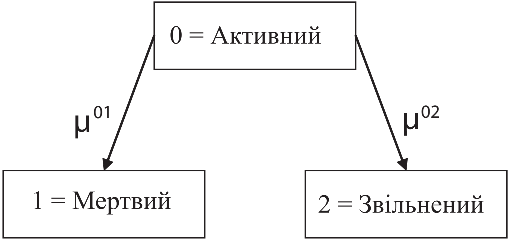
$$\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_x^{\overline{gg}} = -{}_tp_x^{\overline{gg}}\sum_{j\neq g}\mu_{x+t}^{gj}. \qquad (*)$$

Обчислення ймовірностей на основі оцінки інтенсивностей потребує розв'язку цих систем рівнянь. Наприклад, нам буде потрібний розв'язок системи (*). Він має вигляд

$$ {}_t p_x^{\overline{gg}} = \exp\left\{ -\int_0^t \sum_{j \neq g} \mu_{x+s}^{gj} \, ds \right\}. $$

Доведення цього точно таке саме, як у лекції 8, підрозділ 2.1.

1.6. У деяких елементарних випадках розв'язок системи рівнянь Колмогорова можна знайти досить просто, і модель з двома станами часто використовується, як приклад. Нехай маємо модель з двома декрементами



у якій інтенсивності переходів сталі.

Тоді ми маємо

$$ {}_tp_x^{01} = \frac{\mu^{01}}{\mu^{01} + \mu^{02}} \left[1 - e^{-(\mu^{01}+\mu^{02})t}\right], $$

$$ {}_tp_x^{02} = \frac{\mu^{02}}{\mu^{01} + \mu^{02}} \left[1 - e^{-(\mu^{01}+\mu^{02})t}\right]. $$

Ці співвідношення легко тлумачити. Дійсно вираз у дужках – це ймовірність залишатися у активному стані, а дріб дає умовну ймовірність появи кожного декременту, при умові, що один з них відбувся. Однак на практиці ми не завжди має справу з такими простими моделями, або із сталими інтенсивностями переходів, і не має можливості розв'язати рівняння точно. На щастя це не має великого значення, і рівняння Колмогорова досить просто розв'язуються чисельними методами.

1.7. Повернемося до висновків відносно інтервалу віку $[x, x+1]$, взявши модель "хвороба-смерть" за приклад.

Спостереження відносно однієї особи такі:

(a) час між послідовними переходами;

(b) число переходів кожного типу.

1.8. Якщо інтенсивності переходів сталі, кожен проміжок часу тривалості t, проведений у станах a або i дає множник у функцію правдоподібності виду $\exp\{-(\mu+\sigma)t\}$ або $\exp\{-(\nu+\rho)t\}$ відповідно. Тому достатньо записувати загальний час чекання, проведений у кожному стані.

Визначимо такі величини:

$\mathbf{V}_i$ = Час чекання i-ї особи у стані a (здоровий);

$\mathbf{W}_i$ = Час чекання i-ї особи у стані i (хворий);

$\mathbf{S}_i$ = Число переходів $\mathrm{a} \to \mathrm{i}$ для i-ї особи;

$\mathbf{R}_i$ = Число переходів $\mathrm{i} \to \mathrm{a}$ для i-ї особи;

$\mathbf{D}_i$ = Число переходів $\mathrm{a} \to \mathrm{d}$ для i-ї особи;

$\mathbf{U}_i$ = Число переходів $\mathrm{i} \to \mathrm{d}$ для i-ї особи.

Будемо позначати загальні величини через $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{V}_i$ і т.д., а спостережені значення цих випадкових величин будемо позначати малими літерами v, w, s, r, d, u. Легко показати, що функція правдоподібності для чотирьох параметрів μ, ν, σ, ρ буде пропорційною

$$L(\mu, \nu, \sigma, \rho) = e^{-(\mu+\sigma)v} e^{-(\nu+\rho)w} \mu^d \nu^u \sigma^s \rho^r.$$

1.9. Оцінки максимальної правдоподібності будуть такі:

$$\tilde{\mu} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{V}}, \qquad \tilde{\nu} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{W}}, \qquad \tilde{\sigma} = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{V}}, \qquad \tilde{\rho} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{W}}.$$

1.10. Асимптотичні властивості цих оцінок випливають із результатів аналогічних рівнянням (1) і (2) Розділу 5 і того факту, що випадкові величини $(\mathbf{D}_i - \mu\mathbf{V}_i)$, $(\mathbf{U}_i - \nu\mathbf{W}_i)$, $(\mathbf{S}_i - \sigma\mathbf{V}_i)$, $(\mathbf{R}_i - \rho\mathbf{W}_i)$ некорельовані і того, що

$$E[(\mathbf{D}_i - \mu\mathbf{V}_i)(\mathbf{U}_i - \nu\mathbf{W}_i)] = 0,$$

і т.д.

1.11. Оцінки не є незалежними: $\mathbf{D_i}$ і $\mathbf{U}_i$ обидві дорівнюють 0 або 1, але $\mathbf{D}_i\mathbf{U}_i \neq 1$. Крім того, якщо i-та особа знаходилась у стані a (здоровий) на початку, то $\mathbf{S}_i = \mathbf{R}_i$ або $\mathbf{S}_i = \mathbf{R}_i + 1$. Однак оцінки асимптотично незалежні: аналогічно моделі з двома станами можна показати, що вектор $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\sigma}, \tilde{\rho})$ має асимптотичний баготовимірний нормальний розподіл. Кожна компонента цього вектора має асимптотичний нормальний розподіл:

$$\tilde{\mu} \sim \mathrm{Normal}\left(\mu, \frac{\mu}{E[\mathbf{V}]}\right)$$

і т.д. Тому компоненти некорельовані, а значить незалежні, як нормально розподілені.

1.12. Обчислення оцінок $\tilde{\mu}$, і т.д. вимагає знання загального часу чекання. У деяких випадках це можна зробити точно, але якщо дані експозиції мають форму перепису, то проста ценсус формула із лекції 11 дає оцінку.

Таким чином моделі з багатьма станами добре підходять до даних доступних у багатьох актуарних дослідженнях.