Теорія страхового та фінансового ризику

Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка

15 березня 2017 р.

Зміст

Проста модель виживання (Модель 1)

1.1. Основним припущенням у простій математичній моделі виживання є те, що тривалість майбутнього життя особи ("життя"у актуарних роботах) є невідомим заздалегідь. Далі ми розглядаємо тривалість життя у межах від 0 років до 100 років. Природно вважати тривалість майбутнього життя випадковою величиною.

1.2. Припущення.

Тривалість майбутнього життя новонародженої особи є випадковою величиною T, яка має неперервний розподіл на інтервалі $[0, \omega]$, де $0 < \omega < \infty$.

1.3. Максимальний вік ω називається *граничним віком*. У практичних роботах типові значення ω змінюються у межах 100-120 років. Можливість вижити довше ω відкидається для зручності і простоти.

1.4. Означення.

$$F(t) = P(T \leq t)$$

– це функція розподілу T, а

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

– це функція виживання для T.

1.5. Нам часто доведеться мати справу з віком більшим за нульовий. Щоб враховувати це, позначимо через T_x тривалість майбутнього життя після віку x, особи, яка дожила до віку x, $0 \le x \le \omega$. Зауважимо, що $T_0 = T$.

1.6. Означення.

Позначимо через

$$F_x(t) = P(T_x \le t), \quad (0 \le x \le \omega)$$

функцію розподілу T_x, а через

$$S_x(t) = P(T_x > t) = 1 - F_x(t)$$

функцію виживання для T_x.

1.7. Для узгодженості з T, функція розподілу випадкової величини T_x $(0 \leq x \leq \omega)$ повинна задовольняти наступному співвідношенню

$$F_x(t) = P(T_x \leq t)$$

$$= P(T \leq x + t \mid T > x) = \frac{F(x+t) - F(x)}{S(x)}.$$

1.8. Зараз ми введемо позначення, які використовують актуарії для ймовірностей смерті і виживання. Позначають

$$ {}_tq_x = F_x(t) \qquad \text{і} \qquad {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = S_x(t). $$

У більшості актуарних робіт використовується одиниця часу в один рік. У цьому випадку, коли $t = 1$, ми будемо відкидати індекс t у цих ймовірностях. Так ми позначимо

$$ q_x = {}_1q_x \qquad \text{і} \qquad p_x = {}_1p_x. $$

q_x і ${}_tq_x$ називаються *інтенсивностями смертності*.

1.9. Величина, яка грає центральну роль у моделях виживання — це *сила смертності*, яка більше відома у статистиці, як інтенсивність ризику.

Силу смертності у віці x $(0 \le x < \omega)$ будемо позначати через μ_x і визначимо так

$$\mu_x = \lim_{h \to 0+} \frac{P(T \le x + h \mid T > x)}{h}.$$

Завжди будемо вважати, що ця границя завжди існує.

1.10. Дуже важливою є інтерпретація μ_x. Маємо

$$P(T \le x + h \mid T > x) = F_x(h) = {}_hq_x.$$

Для малих h можна покласти

$${}_hq_x \cong h\mu_x.$$

Іншими словами ймовірність смерті на короткому проміжку часу h після віку x приблизно пропорційна h з коефіцієнтом пропорційності рівним μ_x.

1.11. Для $x \geq 0$ і $t > 0$ ми можемо визначити силу смертності μ_{x+t} двома шляхами:

$$(1) \qquad \mu_{x+t} = \lim_{h \to 0+} \frac{P(T \leq x+t+h \mid T > x+t)}{h},$$

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \to 0+} \frac{P(T_x \leq t+h \mid T_x > t)}{h}.$$

Легко показати, що ці означення еквівалентні. Ми будемо часто використовувати μ_{x+t} для фіксованого віку x і $0 \leq t < \omega - x$.

1.12. Із означення $S_x(t)$ випливає важливе співвідношення.

$$S_x(t) = P(T_x > t) = P(T > x + t \mid T > x)$$

$$= \frac{P(T > x + t)}{P(T > x)} = \frac{S(x + t)}{S(x)},$$

яке можна переписати у актуарних позначеннях так

$${}_t p_x = \frac{{}_{x+t} p_0}{{}_x p_0}.$$

Таким чином, для довільного віку x і для $s > 0, t > 0$ маємо

$$ {}_{s+t}p_x = \frac{{}_{x+s+t}p_0}{{}_{x}p_0} = \frac{{}_{x+s}p_0}{{}_{x}p_0} \times \frac{{}_{x+s+t}p_0}{{}_{x+s}p_0} = {}_{s}p_x \times {}_{s}p_{x+t}. $$

Аналогічно

$$ {}_{s+t}p_x = {}_{t}p_x \times {}_{s}p_{x+t}. $$

Словами: ймовірність прожити час $s + t$ після віку x дорівнює або (i) добутку ймовірності прожити час s після віку x і ймовірності прожити ще час t, або (ii) добутку прожити час t після віку x і ймовірності прожити ще час s.

1.13. Функцією розподілу T_x за означенням є $F_x(t)$. Нам буде потрібна щільність розподілу T_x. Позначимо цю щільність розподілу через $f_x(t)$ і нагадаємо, що $f_x(t) = \dfrac{d}{dt}F_x(t)$. Тому

$$f_x(t) = \frac{d}{dt}P(T_x \le t) = \lim_{h\to 0+} \frac{P(T_x \le t+h) - P(T_x \le t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{P(T \le x+t+h \mid T > x) - P(T \le x+t \mid T > x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{P(T \le x+t+h) - P(T \le x) - (P(T \le x+t) - P(T \le x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{P(T \le x+t+h) - P(T \le x+t)}{S(x)h}.$$

Помноживши і поділивши цей вираз на $S(x+t)$ одержимо

$$f_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} \times \lim_{h \to 0+} \frac{P(T \le x+t+h) - P(T \le x+t)}{S(x+t)h} =$$

$$= S_x(t) \times \lim_{h \to 0+} \frac{P(T \le x+t+h \mid T > x+t)}{h} = S_x(t) \times \mu_{x+t},$$

або в актуарних позначеннях для фіксованого віку з проміжку $[0, \omega]$

$$f_x(t) = {}_t p_x \times \mu_{x+t}, \qquad (0 \le t < \omega - x).$$

Це один із самих важливих результатів стосовно моделей виживання.

1.14. Таким чином ми маємо у моделі:

- T_x – випадкову тривалість майбутнього життя після віку x; ця випадкова величина за припущенням є неперервною, яка приймає значення з проміжка $[0, \omega - x]$;
- функція розподілу цієї випадкової величини $F_x(t) = {}_tq_x$ і щільність розподілу $f_x(t) = {}_tp_x\mu_{x+t}$.
- Сила смертності наближено (для малих h) визначається співвідношенням:

$$ {}_hq_x \cong h \cdot \mu_x. $$

- Функція виживання $S_x(t) = {}_tp_x$ задовольняє співвідношенню

$$ {}_{s+t}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} = {}_tp_x \cdot {}_sp_{x+t} $$

для довільних $s > 0, t > 0$.

1.15. q_x називається *початковою інтенсивністю смертності*, тому що це ймовірність того, що особа, яка жива у віці x (початковий час) помре до віку $x+1$. Як альтернативу часто використовують, особливо у демографії, *центральну інтенсивність смертності* m_x, яка визначається так

$$m_x = \frac{d_x}{\int_0^1 l_{x+t} dt} = \frac{q_x}{\int_0^1 {}_t p_x dt}.$$

Тут l_x – це число осіб, які досягли віку x; $d_x = l_x - l_{x+1}$ – це число осіб, які померли протягом періоду $(x, x+1)$. Знаменник $\int_0^1 {}_t p_x dt$ розуміється, як очікуваний час проведений живими особами віку x протягом вікового інтервалу між x і $x+1$.

m_x буває корисною, коли потрібно передбачити число смертей при заданій кількості живих осіб у кожній віковій групі. Ця величина є однією із основних компонент у передбаченні кількості населення, і на практиці вікові групи часто визначаються періодом часу тривалішим ніж 1 рік (тому означення m_x потрібно відповідно модифікувати).

Історично величину m_x оцінюють статистикою вигляду

$$\frac{\text{Число смертей}}{\text{Загальний час виживання під ризиком}},$$

яка називається "інтенсивністю події-експозиції".

Останнім часом ця статистика використовується більше для оцінки сили смертності ніж для оцінки m_x, тому що у цьому випадку існує строге обгрунтування у рамках моделі. Однак, якщо μ_{x+t} є стала між віком x і віком $x+1$, тоді

$$m_x = \frac{q_x}{\int_0^1 {}_t p_x dt} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x \cdot \mu dt}{\int_0^1 {}_t p_x dt} = \mu.$$

Повна і урізана очікувана тривалість залишку життя.

2.1. *Повна очікувана тривалість залишку життя* у віці x визначається як $E[T_x]$ і позначається через

$$\overset{\circ}{e}_x.$$

За означенням

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^{\omega-x} t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\,dt = \int_0^{\omega-x} t \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_x\right)\,dt$$

$$= -\left(t \cdot {}_tp_x\right)\Big|_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\,dt$$

$$= \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\,dt.$$

2.2. Щоб визначити урізану очікувану тривалість залишку життя, спочатку визначимо K_x — урізану майбутню тривалість життя особи віку x. За означенням

$$K_x = [T_x],$$

де $[x]$ — це ціла частина числа x. Очевидно, що K_x — це дискретна випадкова величина, яка приймає цілі значення $0, 1, \ldots, [\omega - x]$.

Розподіл ймовірностей K_x легко знайти, використавши означення підрозділу 1.

$$P(K_x = k) = P(k \leq T_x < k+1) = P(k < T_x \leq k+1) = {}_k p_x \cdot q_{x+k}. \qquad (*)$$

Зауважимо, що зміна нерівностей у (*) вимагає певних припущень стосовно T_x. Достатньо припустити, що $F_x(t)$ неперервна за t.

2.3. Зараз ми можемо визначити *урізану очікувану тривалість залишку життя* $e_x = E[K_x]$. Тому

$$e_x = \sum_{k=0}^{[\omega-x]} k \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

$$= \sum_{k=1}^{[\omega-x]} {}_k p_x \cdot q_{x+k} + \sum_{k=2}^{[\omega-x]} {}_k p_x \cdot q_{x+k} + \ldots + {}_{[\omega-x]} p_x \cdot q_{x+[\omega-x]} =$$

$$= \sum_{k=1}^{[\omega-x]} \sum_{j=k}^{[\omega-x]} {}_j p_x \cdot q_{x+j} = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} \sum_{j=k}^{[\omega-x]} P(K_x = j)$$

$$= \sum_{k=1}^{[\omega-x]} P(K_x \geq k) = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} P(T_x > k) = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} {}_k p_x.$$

2.4. Ми маємо дві прості формули

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\omega - x} {}_tp_x \, dt \quad \text{i} \quad e_x = \sum_{k=1}^{[\omega - x]} {}_kp_x.$$

Ці величини пов'язані наближеним співвідношенням

$$\mathring{e}_x \cong e_x + 1/2.$$

Щоб довести це, визначимо випадкову величину $J_x = T_x - K_x$. Наближено $E[J_x] = 1/2$, крім того $E[T_x] = E[J_x] + E[K_x]$. Тому $\mathring{e}_x \cong e_x + 1/2$.

2.5. Легко записати вирази для дисперсії повної і урізаної тривалості залишку життя:

$$\mathrm{Var}[T_x] = \int_0^{\omega-x} t^2 \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\, dt - \overset{\circ}{e}{}_x^2,$$

$$\mathrm{Var}[K_x] = \sum_0^{[\omega-x]} k^2 \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} - e_x^2,$$

але ці вирази не можна повністю спростити, як вирази для середніх.

2.6. Очікувану тривалість життя часто використовують як міру стандартів життя і рівня охорони здоров'я у даній країні.

Деякі важливі формули.

3.1. У цьому підрозділі ми наведемо дві важливі формули, одну для ${}_tq_x$ і одну для ${}_tp_x$. Перша є наслідком того, що $f_x(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$:

$$ {}_tq_x = F_x(t) = \int_0^t f_x(s)\,ds = \int_0^t {}_sp_x \cdot \mu_{x+s}\,ds. $$

Ця формула має просту інтерпретацію. Для кожного $s \in [0, t]$ підінтегральна функція є добутком ${}_sp_x$ – ймовірності вижити до віку $x + s$ і величини $\mu_{x+s} \cdot ds$, яка наближено дорівнює ${}_{ds}q_{x+s}$ – ймовірності померти зразу після віку $x + s$. Оскільки неможливо померти більше ніж один раз, то ми просто додаємо ці взаємновиключні ймовірності, а у границі маємо інтеграл.

3.2. Формулу для ${}_tp_x$ одержимо із диференціального рівняння. Маємо

$$\frac{\partial}{\partial s}\ {}_sp_x = \frac{\partial}{\partial s}\ (1 - {}_sq_x) = -\frac{\partial}{\partial s}\ {}_sq_x = -f_x(t) = -{}_sp_x \cdot \mu_{x+s}.$$

Звідси

$$\frac{\frac{\partial}{\partial s}\ {}_sp_x}{{}_sp_x} = -\mu_{x+s}, \qquad {}_0p_x = 1.$$

Розв'язавши це рівняння одержимо

$${}_tp_x = \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds\right\}.$$

Прості закони смертності.

4.1. Часто буває корисною можливість виразити q_x або μ_x у вигляді простих математичних функцій віку x. Два таких найпростіших "закони" мають вигляд:

Закон Гомперца

$$\mu_x = Bc^x$$

Закон Мейкхема

$$\mu_x = A + Bc^x$$

4.2. Закон Гомперца — це показникова функція, і часто вона є розумним припущенням для середнього і старшого віку. Закон Мейкхема містить сталий доданок, який іноді інтерпретують, як можливість смерті у результаті нещасного випадку, незалежно від віку.

4.3. Якщо виконується закон Гомперца, то параметри B і c можна визначити по заданим значенням μ_x для двох довільних значень віку. Якщо виконується закон Мейкхема, то параметри A, B і c можна визначити по заданим значенням μ_x для трьох значень віку.

4.4. Ймовірність виживання ${}_tp_x$ можна знайти використовуючи співвідношення

$$ {}_tp_x = \exp\left\{ -\int_0^t \mu_{x+s}\, ds \right\}. $$

Наприклад, для закону Гомперца маємо

$$ {}_tp_x = g^{c^x(c^t-1)}, \quad \text{де} \quad g = \exp\left\{ \frac{-B}{\ln(c)} \right\}. $$

А у випадку закону Мейкхема, маємо

$$ {}_tp_x = s^t \cdot g^{c^x(c^t-1)}, \quad \text{де} \quad g = \exp\left\{\frac{-B}{\ln(c)}\right\} \quad \text{і} \quad s = \exp\{-A\}. $$

Ми використаємо ці закони у Розділі 13 "Методи градуювання".