Теорія страхового та фінансового ризику

Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка

1 березня 2017 р.

Зміст

Процес Пуассона

Процес Пуассона є найпростішим прикладом стрибкоподібного процесу Маркова у неперервному часі.

Стандартний однорідний за часом процес Пуассона — це лічильний процес у неперервному часі $\{N_t,\ t \geq 0\}$, де N_t лічить число появ певного типу подій протягом інтервалу часу $[0, t]$. Події, які нас цікавлять, з'являються по одній у будь-який момент часу. Ймовірність появи події протягом короткого проміжка часу $[t, t + h]$ приблизно дорівнює λh для малих h.

Параметр λ називається інтенсивністю процесу Пуассона.

Процес Пуассона дуже часто використовують при моделюванні появи непередбачуваних подій, таких як аварії авто, або надходження позовів до страхової компанії.

Попереднє означення потрібно дати строго, для подальшого використання в обчисленнях.

Definition

Процес із цілими значеннями $\{N_t,\ t \geq 0\}$, $N_0 = 0$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ є процесом Пуассона, якщо

$$P(N_{t+h} - N_t = 1 \mid \mathcal{F}_t) = \lambda h + o(h),$$

$$P(N_{t+h} - N_t = 0 \mid \mathcal{F}_t) = 1 - \lambda h + o(h), \tag{4.1}$$

$$P(N_{t+h} - N_t \neq 0, 1 \mid \mathcal{F}_t) = o(h),$$

де $f(h) = o(h)$ при $h \to 0$ означає

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Як видно із означення, прирости

$$N_{t+h} - N_t$$

процесу Пуассона не залежать від минулого процесу і мають розподіл, який не залежить від t. Звідси випливає, що процес Пуассона це процес із стаціонарними незалежними приростами, а отже задовольняє властивість Маркова.

Зовсім не очевидно, що це означення співпадає з означенням із лекції 2, за яким процес Пуассона має незалежні стаціонарні прирости, які розподілені за законом Пуассона. Доведемо цей факт.

Теорема (1.1.)

N_t має розподіл Пуассона з параметром λt. Більш того, $N_{t+s} - N_t$ має розподіл Пуассона із параметром λt і не залежить від усього минулого до моменту s.

Доведення.

Позначимо

$$p_j(t) = P(N_t = j).$$

Доведення буде завершене, якщо ми перевіримо, що для кожного $j \geq 0$,

$$p_j(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}. \tag{4.2}$$

Для довільного $j > 0$ і малого $h > 0$ маємо

$$p_j(t+h) =$$

$$P(N_{t+h} = j) = P(N_{t+h} = j, N_t = j) + P(N_{t+h} = j, N_t = j-1) + o(h) =$$

$$= P(N_t = j)P(N_{t+h} - N_t = 0 \mid N_t = j) +$$

$$+ P(N_t = j-1)P(n_{t+h} - N_t = 1 \mid N_t = j-1) + o(h) =$$

$$= p_j(t)(1 - \lambda h) + p_{j-1}(t)\lambda h + o(h).$$

Звідси при $h \to 0$ одержимо для $j > 0$

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) \tag{4.3}$$

із початковою умовою $p_j(0) = 0$.

Аналогічно одержимо

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) \tag{4.4}$$

із умовою $p_0(0) = 1$. Далі просто перевіряємо, що запропонований розв'язок (4.2) задовольняє диференціальні рівняння (4.3), (4.4) і відповідні початкові умови.

Оскільки прирости процесу N стаціонарні і не залежать від минулого, то розподіл $N_{t+s} - N_s$ співпадає з розподілом $N_t - N_0 = N_t$ і не залежить від минулого до моменту s. $\square$

Оскільки процес Пуассона N_t змінюється тільки на одиничний стрибок кожного разу, то його траєкторія повністю визначається моментами стрибків.

Позначимо $T_0, T_1, T_2, \ldots$ послідовні проміжки часу між появою події (*час перебування, inter-event times, holding times*).

Зауважимо, що за домовленістю процес Пуассона має траєкторії неперервні справа, тому

$$X_{T_0} = 1, X_{T_0+T_1} = 2, \ldots.$$

Теорема (1.2.)

$T_0, T_1, T_2, \ldots$ — це послідовність незалежних показниково розподілених випадкових величин з параметром λ.

Доведення.

$$P(T_0 > t) = P(N_t = 0) = p_0(t) = e^{-\lambda t},$$

тому випадкова величина T_0 має показниковий розподіл з параметром λ. Розглянемо умовну ймовірність

$$P(T_1 > t \mid T_0 = s)$$

$$= P(N_{t+s} = 1 \mid T_0 = s) = P(N_{t+s} - N_s = 0 \mid T_0 = s) =$$

$$= P(N_{t+s} - N_s = 0 \mid N_s = 1) = P(N_{t+s} - N_s = 0)$$

$$= P(N_t = 0) = p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Тут ми використали те, що N_t має незалежні стаціонарні прирости.

Із одержаного співвідношення випливає, що T_1 не залежить від T_0 і має показниковий розподіл з параметром λ. Аналогічні міркування проводяться для T_n. $\square$

2.1. Рівняння Чепмена-Колмогорова.

Definition

Процес Маркова $X_t, \ t \geq 0$ у неперервному часі і з дискретним (скінченим або зліченим) простором станів S називається *стрибкоподібним процесом Маркова*.

У цьому підрозділі будемо розглядати однорідні за часом процеси, для яких ймовірність переходу $P(X_t = j \mid X_s = i)$ залежить лише від різниці $t - s$.

Ймовірність переходу однорідного стрибкоподібного процесу Маркова

$$p_{ij}(t) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$$

задовольняє рівняння Чепмена-Колмогорова

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t), \qquad \forall s, t > 0. \tag{4.5}$$

Виведення рівняння Чепмена-Колмогорова у неперервному часі є аналогічним виведенню у дискретному часі (див. лекцію 3).

2.2. Матриця переходів.

Позначивши через $P(t) = \{p_{ij}(t)\}$ матрицю переходів, рівняння (4.5) можна переписати у вигляді

$$P(t+s) = P(s)P(t), \quad \forall s, t > 0.$$

Якщо ми знаємо матрицю переходів $P(t)$ і початковий розподіл $q_i = P(X_0 = i)$, то ми можемо визначити загальні ймовірності для процесу X_t, використовуючи властивість Маркова.

Наприклад, нехай $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, тоді

$$P(X_0 = i, X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2, \ldots, X_{t_n} = j_n)$$

$$= q_i p_{ij_1}(t_1) p_{j_1 j_2}(t_2 - t_1) \ldots p_{j_{n-1} j_n}(t_n - t_{n-1}),$$

де $p_{j_k j_{k+1}}(t_{k+1} - t_k) = P(X_{t_{k+1}} = j_{k+1} \mid X_{t_k} = j_k)$, і

$$P(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2, \ldots, X_{t_n} = j_n)$$

$$= \sum_{i \in S} q_i p_{ij_1}(t_1) p_{j_1 j_2}(t_2 - t_1) \ldots p_{j_{n-1} j_n}(t_n - t_{n-1}).$$

Ми будемо вважати, що функції $p_{ij}(t)$ неперервно диференційовні.

Це досить сильне припущення, бо загальна теорія стрибкоподібних процесів Маркова розглядає ймовірності переходу, які не задовольняють цій умові. Такі процеси називаються *нерегулярними*.

Однак такі процеси мають незначне застосування у моделюванні, і тому обмеження *регулярними* процесами не є значним для даного курсу.

2.3. Диференціальні рівняння Колмогорова.

Зауваживши, що

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j, \end{cases} \tag{4.6}$$

із умови диференційовності одержимо існування величин

$$\sigma_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(t)\Big|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}.$$

Еквівалентно, наступне співвідношення виконується при $h \to 0, \ (h > 0)$:

$$p_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij} h + o(h), & \text{якщо } i \neq j, \\ 1 + \sigma_{ii} h + o(h), & \text{якщо } i = j. \end{cases} \tag{4.7}$$

Із першого рядка (4.7) випливає, що ймовірність переходу із стану i у стан j протягом довільного малого інтервалу $[s, s+h]$ пропорційна h, тому величина σ_{ij} називається *інтенсивністю переходів*.

Інтенсивність переходів повністю характеризує розподіл стрибкоподібного процесу Маркова. Дійсно, із рівняння (4.5) підставивши $t = h$ і $s = t$, одержимо

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(h)$$

$$= \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) \sigma_{kj} h + o(h) + p_{ij}(t)(1 + \sigma_{jj} h + o(h)) =$$

$$= p_{ij}(t) + h \sum_{k \in S} p_{ik}(t) \sigma_{kj} + o(h).$$

Звідси при $h \to 0$ одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) \sigma_{kj}, \qquad \forall i, j \tag{4.8}$$

Це *система прямих рівнянь Колмогорова*.

У матричній формі одержимо

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) A,$$

де матриця $A = \{\sigma_{ij}\}$ називається *генеруючою матрицею* стрибкоподібного процесу Маркова.

Якщо простір станів S скінчений, то (4.8) дає при кожному фіксованому i скінчену лінійну систему диференціальних рівнянь (індекс i входить через початкову умову (4.6)). Отже, для заданих інтенсивностей переходів σ_{ij}, система (4.8) має єдиний розв'язок, що задовольняє умову (4.6). Із цього випливає, що марківську модель можна визначати через її інтенсивності переходів σ_{ij}.

Підставивши $s = h$ в (4.5) і повторивши викладки, одержимо іншу систему рівнянь

$$\frac{d}{dt}P(t) = AP(t),$$

яка називається *системою обернених рівнянь Колмогорова*.

При "звичайних" умовах пряма і обернена системи еквівалентні. Це, зокрема виконується, коли інтенсивності переходів обмежені $\sup_{i,j} |\sigma_{ij}| < \infty \ \forall t \geq 0$. Однак, коли ця умова не виконується, то система обернених рівнянь є більш важливою. (Див. Приклад 3.3)

Зауважимо, що із (4.7) випливає, що $\sigma_{ij} \geq 0$ для $i \neq j$, але $\sigma_{ii} \leq 0$. Дійсно, диференціюючи рівність

$$\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$$

відносно t при $t = 0$ одержимо

$$\sigma_{ii} = -\sum_{j \neq i} \sigma_{ij}.$$

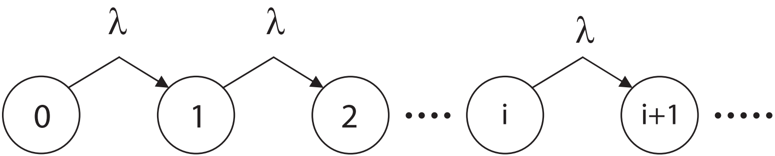
Отже, сума по кожному рядку матриці A дорівнює нулю.

2.4. Процес Пуассона.

Розглянемо стрибкоподібний процес Маркова із простором станів $S = \{0, 1, 2 \ldots\}$ і інтенсивностями переходів

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & \text{якщо } j = i, \\ \lambda, & \text{якщо } j = i + 1, \\ 0 & \text{у інших випадках.} \end{cases}$$

Діаграма має вигляд



а генеруюча матриця A у рівняннях Колмогорова така:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Система прямих рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} p'_{i0}(t) = -\lambda p_{i0}(t), \\ p'_{ij}(t) = \lambda p_{ij-1}(t) - \lambda p_{ij}(t), \ j > 0 \end{cases}$$

яка співпадає із (4.3) і (4.4).

Цікаво розглянути систему оберененых рівнянь

$$p'_{ij}(t) = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i+1,j}(t),$$

яка має той самий розв'язок, хоча прямі рівняння мають інший вигляд.

Структура стрибкоподібних процесів Маркова

3.1. Час перебування (holding times).
Покажемо, що час перебування у стані для однорідного стрибкоподібного процесу Маркова має показниковий розподіл. Розглянемо $T_0 = \inf\{t : \; X_t \neq X_0\}$ — це час до першої зміни стану.

Теорема (3.1)

T_0 для однорідного стрибкоподібного процесу Маркова з інтенсивностями переходів σ_{ij} має розподіл

$$P(T_0 > t \mid X_0 = i) = e^{-\lambda_i t},$$

де $\lambda_i = -\sigma_{ii} = \sum_{j \neq i} \sigma_{ij}$.

Доведення.

Зауважимо, що маємо рівність для подій

$$\{T_0 > t\} = \{X_s = X_0,\ 0 \le s \le t\}.$$

Розіб'ємо інтервал $[0, t]$:

$$0 < t/2^n < 2t/2^n < \ldots < kt/2^n < \ldots < 2^n t/2^n = t$$

і розглянемо події

$$B_n = \{X_{kt/2^n} = X_0,\ k = 1, 2, \ldots, 2^n\}.$$

Тоді

$$P(B_n \mid X_0 = i) = P(X_{t/2^n} = i, X_{2t/2^n} = i, \ldots, X_{2^n t/2^n} = i \mid X_0 = i)$$

$$= P(X_{t/2^n} = i \mid X_0 = i) \times$$

$$\times P(X_{2t/2^N} = i \mid X_0 = i, X_{t/2^n} = i) \times \cdots$$

$$\times P(X_t = i \mid X_0 = i, X_{t/2^n} = i, \ldots, X_{(2^n-1)t/2^n} = i) =$$

$$= \left[p_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]^{2^n} = \left[1 + \sigma_{ii}\frac{t}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]^{2^n}.$$

Маємо $B_n \supset B_{n+1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. Отже, існує границя

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \{X_s = X_0,\ 0 \le s \le t\}.$$

Тому

$$P(T_0 > t \mid X_0 = i)$$

$$= P(X_s = X_0,\ 0 \le s \le t \mid X_0 = i) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m \mid X_0 = i\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(B_n \mid X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \sigma_{ii}\frac{t}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]^{2^n}$$

$$= e^{\sigma_{ii} t} = e^{-\lambda_i t}. \qquad \square$$

У випадку процесу Пуассона моменти стрибків несуть всю інформацію про процес. Для загальних стрибкоподібних процесів Маркова ми також повинні вказати стан у який відбувається стрибок.

Виявляється, що це досить просто: *ймовірність стрибка із* $X_0 = i$ *у стан* $X_{T_0} = j$ *пропорційна інтенсивності переходу* σ_{ij}*, і стан, у який відбувається стрибок* X_{T_0}*, не залежить від часу перебування* T_0*.*

Щоб перевірити це, розглянемо для $j \neq i$:

$$P(X_{t+h} = j, t < T_0 \leq t + h \mid X_0 = i)$$

$$= P(X_{t+h} = j, T_0 > t \mid X_0 = i) =$$

$$= P(X_{t+h} = j \mid X_0 = i, T_0 > t) P(T_0 > t \mid X_0 = i)$$

$$= P(X_{t+h} = j \mid x_s = i, 0 \leq s \leq t) e^{-\lambda_i t} =$$

$$= P(X_{t+h} = j \mid X_t = i) e^{-\lambda_i t} = p_{ij}(h) e^{-\lambda_i t}.$$

Далі, поділивши на h і поклавши $h \to 0$, одержимо, що сумісний розподіл/щільність X_{T_0} і T_0, при умові $X_0 = i$, дорівнює

$$\sigma_{ij} e^{-\lambda_i t}.$$

Іншими словами, це добуток щільності часу перебування $\lambda_i e^{-\lambda_i t}$ і σ_{ij}/λ_i. Це доводить зразу два результати: ймовірність стрибка із стану i у стан j дорівнює

$$P(X_{T_0} = j \mid X_0 = i) = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i} \qquad (j \neq i)$$

і X_{T_0} не залежить від T_0.

Із властивості Маркова випливає, що для наступних стрибків поведінка буде ідентичною: після того, як деякий стан j було досягнуто, процес залишається у цьому стані час з показниковим розподілом з параметром λ_j, а потім робить стрибок у стан $k \neq j$ з ймовірністю σ_{jk}/λ_j.

Зауважимо, що середній час перебування у стані j дорівнює $1/\lambda_j$. Це важливо пам'ятати, при виборі значень інтенсивності переходу.

3.2. Ланцюг стрибків.

Якщо стрибкоподібний процес Маркова вивчати лише у моменти його переходів, то одержимо процес $\{\hat{X}_n : \; n = 0, 1, 2 \ldots\}$ визначений так:

$$\hat{X}_n = X_{T_0 + T_1 + \cdots + X_{T_n}},$$

і який називають *ланцюгом стрибків* пов'язаним з X.

Попередній аналіз показав, що $\hat{X}_n$ не залежить від T_n і всього, що відбулось до моменту T_{n-1}: у дійсності, розподіл $\hat{X}_n$ залежить лише від $\hat{X}_{n-1}$. Таким чином ланцюг стрибків має властивість Маркова і тому є ланцюгом Маркова.

Єдине чим відрізняється ланцюг стрибків від стандартного ланцюга Маркова, це ситуація, коли стрибкоподібний процес $\{X_t : \; t \geq 0\}$ попадає у поглинаючий стан. З цього моменту не відбувається подальших переходів і це означає, що час зупинився для ланцюга стрибків.

Для того, щоб застосовувати теорію ланцюгів Маркова до ланцюга стрибків потрібно вважати, що для поглинаючого стану переходи продовжують відбуватись, але ланцюг залишається після кожного переходу у тому самому стані.

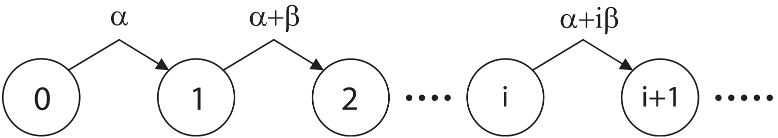
На питання стосовно послідовності станів, у які відбулися переходи стрибкоподібного процесу Маркова, такі як "Яка ймовірність того, що процесс попав у стан i_0 до того, як він попав у поглинаючий стан?" або "Чи попадав процес у стан j нескінченну кількість раз?" можна відповісти використовуючи ланцюг стрибків, бо обидва процеси мають однакові траєкторії у просторі станів.

Таким чином, у цих випадках можна використовувати теорію ланцюгів Маркова. На питання стосовно часу перебування у стані можна відповісти лише використовуючи теорію стрибкоподібних процесів Маркова.

3.3. Застосування: Модель схильності до аварій.

Розглянемо таку модель накопиченої водієм кількості аварій X_t за період $[0, t]$: X_t — це однорідний за часом стрибкоподібний процес Маркова із інтенсивностями переходів ($i \neq j$):

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \alpha + i\beta & \text{якщо } j = i + 1, \\ 0 & \text{у інших випадках.} \end{cases}$$



Інакше кажучи, інтенсивність аварій зростає лінійно разом з кількістю аварій зафіксованих у водія. Генеруюча матриця процесу має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta & \alpha+\beta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha-2\beta & \alpha+2\beta & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

і прямі рівняння Колмогорова для $p_{0j}(t)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} &p'_{00}(t) = -\alpha p_{00}(t), \\ &p'_{0j}(t) = (\alpha + (j-1)\beta)p_{0j-1}(t) - (\alpha + j\beta)p_{0j}(t),\ j > 0 \end{aligned}$$

з початковими умовами $p_{00}(0) = 1, p_{0j}(0) = 0, j \neq 0$.

Будемо шукати розв'язок у вигляді $p_{0j}(t) = \gamma_j(t)e^{-(\alpha+j\beta)t}$. Із системи випливає, що невідомі функції $\gamma_j(t)$ задовольняють рівняння

$$\gamma_j'(t) = \gamma_j(t)(\alpha + (j-1)\beta)e^{\beta t}.$$

Розв'яжемо цю систему рекурсивно, використовуючи початкову умову $p_{0j}(0) = \delta_{0j}$:

$$\gamma_0(t) = 1,\ \gamma_1(t) = \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1),\ \gamma_2(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{2\beta^2}(e^{\beta t} - 1)^2, \dots$$

$$\gamma_j(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)\cdots(\alpha+(j-1)\beta)}{j!\beta^j}(e^{\beta t} - 1)^j.$$

Таким чином, розв'язок має вигляд

$$\gamma_j(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)\cdots(\alpha+(j-1)\beta)}{j!\beta^j}e^{-\alpha t}(1 - e^{-\beta t})^j.$$

Зауваження.

Оскільки $\lambda_i = \alpha + i\beta$, то час перебування T_i має властивість

$$\sum_{i=0}^{\infty} E[T_i] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i\beta} = \infty.$$

Якщо вибрати $\sigma_{ij}^* = \alpha + i^2\beta$, $(j = i+1)$, то одержимо

$$\sum_{i=0}^{\infty} E^*[T_i] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i^2\beta} < \infty.$$

Отже,

$$P\left(\sum_{i=0}^{\infty} T_i < \infty\right) = 1,$$

а значить нескінченно багато переходів відбулось за скінчений час.

Це приводить до того, що

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{*} < 1$$

і до не єдиності розв'язку рівнянь Колмогорова. Тому потрібно ввести в означення процесу граничний стан, куди процес попадає за нескінченну кількість переходів і задати правила переходу для цього граничного стану. Одержані ймовірності переходу

$$p_{ij}^{*}(t)$$

будуть задовольняти оригінальну обернену систему рівнянь Колмогорова, але не будуть задовольняти оригінальну пряму систему.

4. Неоднорідний за часом випадок

Більш загальний стрибкоподібний процес Маркова у неперервному часі $\{X_t,\ t \geq 0\}$ має такі ймовірності переходу

$$p_{ij}(s,t) = P(X_t = j \mid X_s = i), \quad (s \leq t),$$

які задовольняють рівняння Чепмена-Колмогорова у матричній формі

$$P(s,t) = P(s,u)P(u,t), \quad \forall s < u < t.$$

Аналогічно однорідному випадку, маємо

$$p_{ij}(s,s+h) = \begin{cases} h\sigma_{ij}(s) + o(h), & \text{якщо } i \neq j, \\ 1 + h\sigma_{ii}(s) + o(h), & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

Ми бачимо, що на відміну від однорідного випадку, інтенсивність переходів $\sigma_{ij}(s)$ залежить від часу.

Можна вивести систему прямих рівнянь Колмогорова, яка у матричній формі має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s,t) = P(s,t)A(t),$$

де генеруюча матриця така $A(t) = \{\sigma_{ij}(t)\}$, а система обернених рівнянь Колмогорова має вигляд

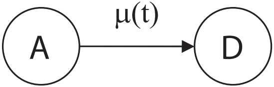
$$\frac{\partial}{\partial s} P(s,t) = -A(s)P(s,t).$$

Крім того маємо $\sigma_{ii}(s) = -\sum_{j \neq i} \sigma_{ij}(s)$. Тому сума елементів кожного рядка матриці $A(s)$ дорівнює нулю.

Загальна теорія неоднорідних за часом стрибкоподібних процесів Маркова досить складна і виходить за межі даного курсу, але методи, які використовуються, можуть бути проілюстровані рядом практичних прикладів.

4.1. Модель з двома станами.

Розглянемо таку *модель виживання*: інтенсивність переходу із стану A (Живий) у стан D (Мертвий) дорівнює $\mu(t)$



Іншими словами $\mu(t)$ називають *силою смертності*. Оскільки

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\mu(t) & \mu(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

із системи прямих рівнянь маємо

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{AA}(s,t) = -\mu(t) P_{AA}(s,t).$$

Розв'язок, який відповідає початковій умові

$$p_{AA}(s,s) = 1,$$

має вигляд

$$p_{AA}(s,t) = \exp\left\{-\int_s^t \mu(u)du\right\}.$$

Еквівалентно, ймовірність того, що особа віку s проживе ще не менше ніж w дорівнює

$$
\begin{aligned}
{}_w p_s = p_{AA}(s, s+w) &= \exp\left\{-\int_s^{s+w} \mu(u)du\right\} \\
&= \exp\left\{-\int_0^{w} \mu(s+u)du\right\}. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Цей приклад показує необхідність неоднорідних за часом актуарних моделей: якщо сила смертності є сталою, то це приводить до незалежності від віку ймовірності виживання ${}_w p_s$, що є абсурдним результатом.

Може здатися, що формула (4.9) має місце лише для специфічної моделі виживання, яку ми розглядаємо, але при відповідному тлумаченні вона є досить загальною формулою.

Для загального стрибкоподібного процесу Маркова $\{X_t: \ t \geq 0\}$ визначимо *залишковий час перебування* R_s, як час між моментом s і наступним стрибком

$$\{R_s > w, X_s = i\} = \{X_u = i, \ s \leq u \leq s + w\}.$$

Формула (4.9) дає ймовірність того, що $R_s > w$ при умові, що у момент s процес знаходить у стані A. Повторивши доведення теореми 3.1, можна довести, що і у загальному випадку

$$P(R_s > w \mid X_s = i) = \exp\left\{-\int_s^{s+w} \lambda_i(t)dt\right\}. \tag{4.10}$$

Більше того, характеристика стану $X_s^{(+)} = X_{s+R_s}$, до якого відбувся перехід, є аналогічною однорідному випадку

$$P(X_s^{(+)} = j \mid X_s = i, R_s = w) = \frac{\sigma_{ij}(s+w)}{\lambda_i(s+w)}. \tag{4.11}$$

Із (4.10) знайдемо умовну щільність розподілу випадкової величини R_s:

$$p_{R_s}(w \mid X_s = i) = \frac{d}{dw} P(R_s \leq w \mid X_s = i)$$

$$= \frac{d}{dw}\left(1 - \exp\left\{-\int_0^w \lambda_i(s+u)du\right\}\right) =$$

$$= \lambda_i(s+w)\exp\left\{-\int_0^w \lambda_i(s+u)du\right\}.$$

Використавши цю формулу і (4.11), можна одержати із формули повної ймовірності наступне співвідношення

$$p_{ij}(s,t) = P(X_t = j \mid X_s = i) =$$

$$= \sum_{k \neq i} \int_0^{t-s} P(X_t = j \mid X_s = i, R_s = w, X_s^{(+)} = k) \times$$

$$\times P(X_s^{(+)} = k \mid X_s = i, R_s = w) p_{R_s}(w \mid X_s = i) dw =$$

$$= \sum_{k \neq i} \int_0^{t-s} p_{kj}(s+w,t) \frac{\sigma_{ik}(s+w)}{\lambda_i(s+w)} \lambda_i(s+w) \times$$

$$\times \exp\left\{ - \int_s^{s+w} \lambda_i(u) du \right\} dw.$$

Таким чином, ми одержали *інтегральну форму оберненого рівняння Колмогорова*

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k\neq i} \int_0^{t-s} p_{kj}(s+w,t)\sigma_{ik}(s+w)\times$$

$$\times \exp\left\{-\int_s^{s+w} \lambda_i(u)du\right\} dw. \qquad (4.12)$$

Це можна перевірити диференціюванням за t. Формула (4.12) має досить складний вигляд, але вона підтверджується такими інтуїтивними міркуваннями: оскільки $j \neq i$, то процес повинен стрибнути із i у деякий стан. За (4.10) перший стрибок після моменту s має місце у момент $s+w$ із щільністю ймовірностей

$$p_{R_s}(w \mid X_s = i) = \lambda_i(s+w)\exp\left\{-\int_0^{w} \lambda_i(s+u)du\right\}.$$

За (4.11) процес перейде у стан k протягом періоду часу $[s, s+w]$ із ймовірністю

$$\frac{\sigma_{ik}(s+w)}{\lambda_i(s+w)}.$$

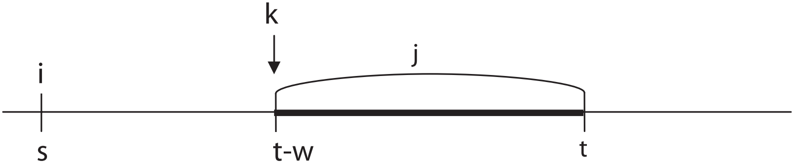
Залишається зробити перехід із k у j протягом періоду часу $[s+w, t]$. Ці переходи можна зобразити на діаграмі:

При $i=j$ з'являється додатковий член $\exp\left\{-\int_s^t \lambda_i(u)du\right\}$, бо процес може залишатись у стані i протягом періоду часу $[s,t]$.

Якщо замість першого стрибка після моменту s розглядати останній стрибок перед моментом t, можна одержати інтуїтивний вивід *інтегральної форми прямого рівняння*:

$$p_{ij}(s,t)=\sum_{k\neq j}\int_0^{t-s} p_{ik}(s,t-w)\sigma_{kj}(t-w)\times$$

$$\times\exp\left\{-\int_{t-w}^t \lambda_j(u)du\right\}dw. \tag{4.13}$$

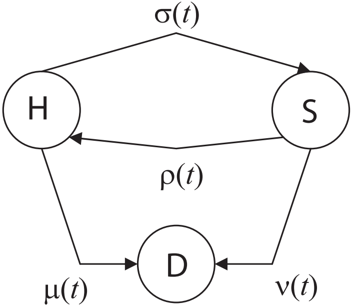


Для обгрунтування цього рівняння потрібно використати властивості *поточного часу перебування* C_t, а саме часу між останнім стрибком і моментом t:

$$\{C_t \geq w, X_t = j\} = \{X_u = j, t - w \leq u \leq t\}.$$

4.2. Застосування: модель хвороба і смерть.

Будемо описувати стан особи, як "Здоровий"(H), "Хворий"(S), "Мертвий"(D). Для заданих залежних від часу інтенсивностей переходів ми можемо побудувати стрибкоподібний процес Маркова із простором станів $\{H, S, D\}$:



Генеруюча матриця $A(t)$ у рівняннях Колмогорова має вигляд

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\sigma(t)-\mu(t) & \sigma(t) & \mu(t) \\ \rho(t) & -\rho(t)-\nu(t) & \nu(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зокрема $\lambda_H(t) = \sigma(t) + \mu(t)$, $\lambda_S = \rho(t) + \nu(t)$, $\lambda(t) = 0$. Найпростіше обчислити ймовірності залишатися неперервно здоровим або неперервно хворим протягом періоду $[s, t]$. Використавши (4.10), одержимо

$$P(R_s > t - s \mid X_s = H) = \exp\left\{-\int_s^t (\sigma(u) + \mu(u))du\right\},$$

і

$$P(R_s > t - s \mid X_s = S) = \exp\left\{-\int_s^t (\rho(u) + \nu(u))du\right\}.$$

Ймовірності переходів пов'язані між собою, як у (4.12) і (4.13). Наприклад

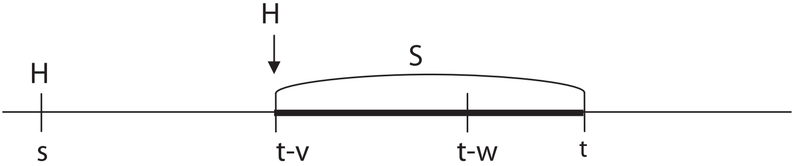
$$p_{HS}(s,t) = \int_0^{t-s} p_{SS}(s+w,t)\sigma(s+w)\times$$

$$\times \exp\left\{-\int_s^t (\sigma(u)+\mu(u))du\right\} dw.$$

Інші умови на залишковий або поточний час перебування можна застосовувати без проблем. Розглянемо, наприклад, ймовірність бути хворим в момент часу t і знаходитись у цьому стані щонайменше час w, при умові, що у момент s ви були здорові. Ця ймовірність дорівнює

$$P(X_t = S, C_t > w \mid X_s = H) =$$

$$\int_w^{t-s} p_{HH}(s, t-v)\sigma(t-v) \exp\left\{-\int_{t-v}^{t} (\rho(u) + \nu(u))du\right\} dv.$$



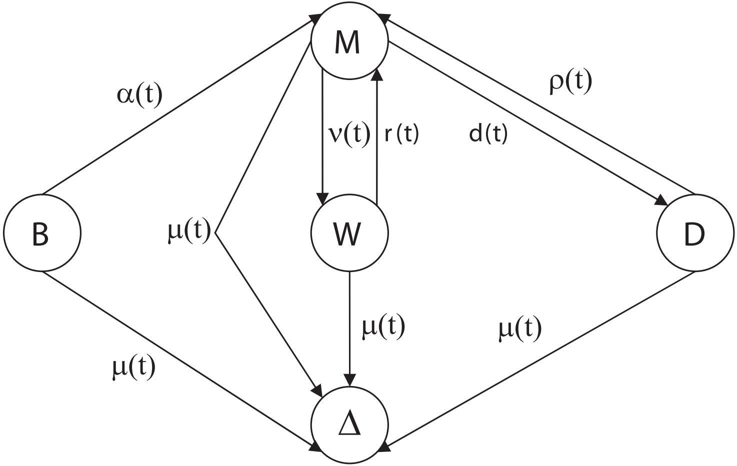
4.3. Застосування: модель подружнього стану.

Будемо описувати подружній статус особи як один із станів: "Ніколи не не був одружений"(B), "Одружений"(M), "Вдівець"(W), "Розлучений"(D), "Мертвий"(Δ).

Ми можемо визначити стрибкоподібний процес Маркова із простором станів

$$\{B, M, W, D, \Delta\}$$

наступним чином:


M
α(t)
ρ(t)
ν(t)
r (t)
d(t)
B
μ(t)
W
D
μ(t)
μ(t)
μ(t)
Δ

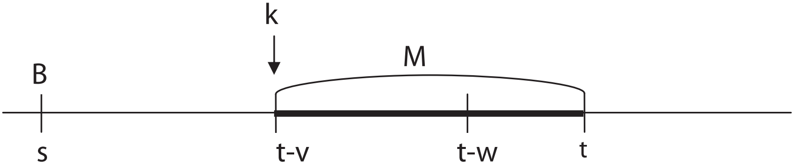
Ми вибрали інтенсивність смерті $\mu(t)$ для всіх станів однаковою для простоти. Ця модель може бути досліджена точно, як у прикладі 4.1.

Наприклад, ймовірність бути одруженим у момент часу t і знаходитись у цьому стані щонайменше час w при умові, що у момент s ви ніколи не були одружені (припускаючи $w < t - s$) дорівнює:

$$P(X_t = M, C_t > w \mid X_s = B) =$$

$$\int_s^{t-w} (p_{BB}(s, t-v)\alpha(t-v) + p_{BW}(s, t-v)r(t-v) +$$

$$+ p_{BD}(s, t-v)\rho(t-v)) \exp\left\{-\int_{t-v}^{t} (\mu(u) + \nu(u) + d(u))du\right\} dv.$$



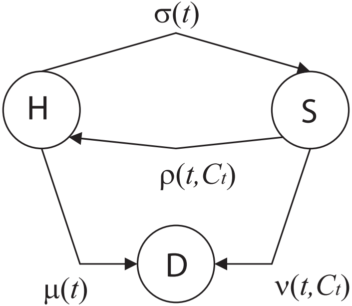
де k це будь-який стан, що приводить до стану M, а саме B, W і D.

4.4. Застосування: модель хвороби і смерті із залежністю від тривалості хвороби.

У прикладі підрозділу 4.2 марківська властивість приводить до того, що

$$P(X_t = H \mid X_s = S, C_s = w) = P(X_t = H \mid X_s = S).$$

Іншими словами, тривалість вашої теперішньої хвороби не впливає на ваше майбутнє здоров'я. Для того, щоб усунути цю не бажану рису, ми модифікуємо модель так, що інтенсивності переходу із стану S залежали від поточного часу перебування C_t:



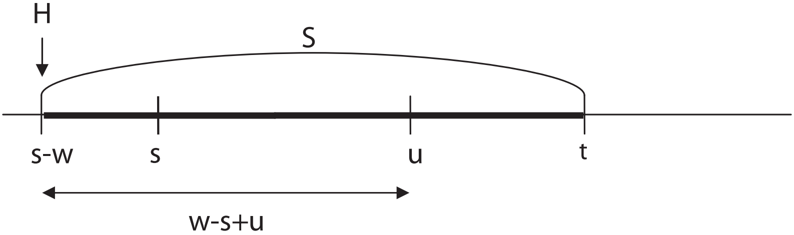
Це припущення виводить нас за межі даного курсу, так як величина C_t повинна бути введена у стан, а отже простір станів стає незліченним. Однак методи підрозділу 4.2 можна застосовувати при відповідних умовах на поточний час перебування.

Дійсно, оскільки інтенсивності переходів σ і μ не залежать від C_t, то ймовірність неперервно залишатись здоровим протягом проміжку часу $[s, t]$ залишається такою, як у 4.2.

З другого боку для того, щоб обчислити ймовірність залишатися неперервно хворим протягом проміжку часу $[s, t]$ при умові, що теперішній період хвороби $[s - w, s]$, потрібно модифікувати значення ρ і ν, щоб врахувати тривалість хвороби:

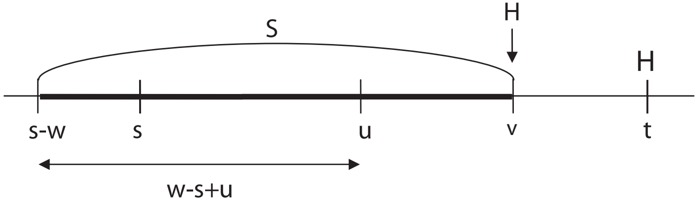
$$P(X_t = S, R_s > t - s \mid X_s = S, C_s = w)$$

$$= \exp\left\{-\int_s^t (\rho(u, w - s + u) + \nu(u, w - s + u))du\right\}.$$


H
S
s-w
s
u
t
w-s+u

Як останній приклад, розглянемо ймовірність бути здоровим у момент часу t при умові, що ви хворі у момент часу s із теперішньою тривалістю хвороби w:

$$p_{S_w H}(s,t) = P(X_t = H \mid X_s = S, C_s = w) =$$
$$= \int_0^t \exp\left\{-\int_s^v (\rho(u, w-s+u) + \nu(u, w-s+u))du\right\}$$
$$\times \rho(v, w-s+v) p_{HH}(v,t) dv.$$



5.1. Моделі процесу Пуассона.
Однорідний за часом процес Пуассона має єдиний параметр λ. Оцінку цього параметра можна провести по спостереженням методом моментів або методом максимальної правдоподібності.

Приклад 5.1. Страхова компанія зафіксувала m позовів протягом T періодів часу. Якщо компанія вважає процес Пуассона прийнятним для моделі, тоді оцінкою параметра λ буде $\hat{\lambda} = m/T$. Її можна одержати, наприклад методом максимальної правдоподібності.

Маючи оцінку параметра, залишається провести тест на відповідність. Розділимо час T на k рівних інтервалів. Якщо пуасонівська модель є відповідною, то число позовів, які надійшли протягом k інтервалів часу повинно утворити послідовність незалежних випадкових величин з розподілом Пуассона кожна з середнім $\lambda T/k$. Потрібно перевірити:

1) чи дійсно маємо розподіл Пуассона;
2) чи спостереження незалежні.

Для перевірки розподілу застосовується стандартний χ^2-критерій. Якщо відповідність перевірено, то незалежність краще перевіряти проти альтернативи, що має місце деяка форма серійної залежності. Тест на серійну кореляцію буде розглянуто у лекції 12. Моделі часових рядів розглядаються у курсі CT6.

У деяких видах бізнесу, таких як страхування від збитків, заподіяних ураганом, інтенсивність надходження позовів може передбачувано змінюватись з часом, тобто страхувальник може заздалегідь сказати, що деякі проміжки часу будуть містити більшу кількість позовів ніж інші проміжки часу однакової тривалості. У цьому випадку відповідною моделлю є неоднорідний за часом процес Пуассона з інтенсивністю надходження позовів $\lambda(t)$. У даному прикладі функція $\lambda(t)$ є періодичною з періодом в один рік.

Непрактично оцінювати $\lambda(t)$ для кожного t. Зазвичай ділять часовий інтервал на проміжки підходящої тривалості і оцінюють надходження позовів для кожного такого проміжку.

Так, дані за цілий рік можна поділити на місяці і оцінювати 12 інтенсивностей надходження позовів. Тест на відповідність потрібно провести для кожного місяця окремо, а тест на серійну кореляцію потрібно провести для даних за весь рік.

5.2. Однорідні за часом моделі Маркова.

Структурний аналіз лекції 3 є дуже важливим при моделюванні стрибкоподібних процесів Маркова у неперервному часі.

Нагадаємо, що час перебування у стані i має показниковий розподіл із середнім $1/\lambda_i$, не залежить від часу перебування у цьому стані у попередні рази і від того, куди відбудеться наступний перехід. Крім того, ймовірність наступного переходу у стан j дорівнює σ_{ij}/λ_i. Тому можна розділити дві процедури оцінювання.

Спочатку можна оцінити λ_i. Використавши дані про час перебування у стані i під час кожного попадання у цей стан, одержимо вибіркове середнє цієї величини рівне $1/\hat{\lambda}_i$.

Далі так, як у лекції 3: нехай n_i – це число візитів у стан i, n_{ij} – це число прями переходів із стану i у стан j. Покладемо

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}.$$

Оскільки

$$p_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i},$$

то оцінкою для σ_{ij} буде

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\lambda}_i \hat{p}_{ij}.$$

Тести на відповідність є більш проблематичними, навіть тому, що існує багато можливих альтернатив. Природно провести тест того, що час перебування у даному стані має показниковий розподіл: застосовуємо χ^2- критерій.

Також розумно провести тест того, що ланцюг стрибків має властивість Маркова (див. лекція 3, п.5.2). Але існують інші наслідки властивості Маркова, процедура перевірки яких не завжди ясна.

Наприклад, щоб описати формальний тест того, що стан, у який відбувається стрибок не залежить від часу перебування у стані, нам потрібно зробити наступне:

- розглянути всі візити у стан i і класифікувати їх за тривалістю візиту: довготривалі(L), середньо-тривалі(M) і коротко-тривалі(S);
- для кожної категорії окремо оцінити ймовірність переходу ланцюга стрибків: $\hat{p}_{ij}^{(L)}, \hat{p}_{IJ}^{(M)}, \hat{p}_{ij}^{(S)}$;
- визначити, чи є суттєвою різниця між одержаними оцінками ймовірностей переходу.

Однак не зовсім зрозуміло, яку тестову статистику використовувати і який розподіл вона матиме. На практиці дослідження цього питання можна провести графічно: для кожного візиту у стан i відмічаємо точку на площині XOY, де координата x – це тривалість візиту, координата y – це стан, у який відбувається перехід. При незалежності повинні одержати хаотичний набір точок. Якщо одержимо якийсь образ (залежність), то гіпотезу про незалежність відхиляємо.

Інші тести, такі, наприклад, як перевірка того, що тривалість першого візиту у стан значно більша ніж тривалість наступних візитів, теж краще проводити графічно.

5.3. Неоднорідні за часом моделі Маркова.

Структурна декомпозиція однорідних за часом моделей Маркова не може бути перенесена на неоднорідний випадок.

Оцінку залежних від часу інтенсивностей переходу, таких як сила смертності або залежність від віку інтенсивності видужання після хвороби, краще проводити для конкретних моделей. Це буде зроблено у наступних розділах цього курсу.

5.4. Імітація.

Є два підходи до задачі імітації однорідного за часом стрибкоподібного процесу Маркова. Першим є наближений метод, аналогічний тому, який використовувався у п.5.1, а другий — точний.

Наближений метод.

Поділимо часовий інтервал на дуже малі проміжки довжиною h, так щоб $\sigma_{ij}h$ було значно менше 1 для кожного i і j. Матриця переходів $P(h)$ ланцюга Маркова має наближено такі елементи

$$p^*_{ij} = \delta_{ij} + h\sigma_{ij}.$$

Використовуючи техніку з лекції 3, можна імітувати ланцюг Маркова у дискретному часі $\{Y_n : \ n \geq 0\}$ з цими ймовірностями переходів і покласти

$$X_t = Y_{[t/h]}.$$

Цей метод не є дуже задовільним, оскільки граничні розподіли цієї моделі значно відрізняються від розподілів процесу, який моделюється. Існує набагато краща версія цього методу, у якій використовуються точні ймовірності переходів $p_{ij}(h)$ замість $p_{ij}^*(h)$, але при цьому необхідно обчислити точні ймовірності заздалегідь. Загальна техніка таких обчислень лежить за межами даного курсу.

Точний метод.

Цей підхід використовує переваги структурної декомпозиції стрибкоподібного процесу. Спочатку імітується ланцюг стрибків процесу, як ланцюг Маркова з ймовірностями переходів

$$p_{ij} = \sigma_{ij}/\lambda_i.$$

Як тільки траєкторія $\{\hat{X}_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ згенерована, час перебування $\{T_n :\ n = 0, 1, \ldots\}$ утворює послідовність незалежних показниково розподілених випадкових величин. T_n має параметр інтенсивності $\lambda_{\hat{X}_n}$.

Неоднорідні за часом процеси.

При заданих інтенсивностях переходів неоднорідного за часом ланцюга Маркова і при заданому стані X_t у момент часу t, можливо визначити щільність розподілу часу перебування до наступного переходу і стан, до якого перехід відбудеться (див. підрозділ 4). Це означає, що можна застосувати стандартну техніку імітації для генерування точної імітації процесу.

На практиці, однак, така процедура є громіздкою, за винятком випадку, коли кількість станів дуже мала. Більш вживаним підходом є використання наближеного методу, описаного вище. Точні значення ймовірностей переходів $p_{ij}(t, t+h)$ рідко бувають відомі, отже доводиться використовувати менш задовільні наближені значення

$$p^*_{ij}(t, t+h) = \delta_{ij} + h\sigma_{ij}(t).$$

Цей метод допустимий до застосування для коротко-тривалих імітацій і не застосовується для довготривалих випадків.

Питання введені у даному розділі будуть розвинуті у лекціях 8 і 9.

Задача

Пацієнти, які прибувають до лікарні швидкої допомоги (стан Л), у середньому очікують одну годину, перш ніж їх класифікує молодший лікар як таких, що потребують стаціонарного лікування (стан С), амбулаторного лікування (стан А) чи подальшого вивчення (стан В). Лише одне нове надходження з десяти класифікують, як стаціонарного пацієнта, п'ятьох, як амбулаторних пацієнтів.
За потреби, подальше вивчення займає в середньому 3 години, після чого 50 % випадків вирішують (одужують) одразу (стан О), 25 % призначають амбулаторне лікування й інші 25 % госпіталізують.
Амбулаторні процедури в середньому займають 2 години до завершення, стаціонарне лікування – 60 годин. Обидва види лікування завершуються одужанням.

Задача

Припускають, що однорідний у часі процес Маркова зі станами Л, С, А, В, О можна використати для моделювання проходження пацієнтів через систему, кінцевою метою якого є зменшення середнього часу, проведеного в лікарні.
(i) Запишіть матрицю інтенсивностей переходів $\{\sigma_{ij}: i,j = Л,\ C,\ A,\ B,\ O\}$ *такої моделі.*
(ii) Обчисліть частку пацієнтів, які отримують стаціонарне лікування.
(iii) Виведіть вирази для ймовірностей того, що пацієнт, який надійшов у момент часу $t = 0$
(a) все ще очікує, щоб бути оглянутим молодшим лікарем у момент часу t,
(b) проходить додаткове дослідження у момент часу t.

Задача

(iv) Нехай m_i – це очікуваний час до одужання пацієнта, що зараз перебуває у стані i.
(a) Поясніть, чому m_i задовольняє таке рівняння:

$$m_i = \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{j \notin i, O} \frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i} m_j,$$

де $\lambda_i = \sum_j \sigma_{ij}$.
(b) Звідси обчисліть загальний очікуваний час до одужання нового пацієнта.
(v) Вкажіть розподіл часу, проведеного у кожному відвіданому стані, згідно цієї моделі.