Теорія страхового та фінансового ризику

Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка

23 лютого 2017 р.

Зміст

Рівняння Чепмена-Колмогорова

Definition

Ланцюг Маркова це процес Маркова у дискретному часі і з скінченою або зліченою множиною станів S. Таким чином, ланцюг Маркова – це послідовність випадкових величин $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ з властивістю

$$P(X_n = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{m-1} = i_{i-1}, X_m = i) \quad (1)$$

$$= P(X_n = j \mid X_m = i)$$

для всіх $n > m$ і $i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}, i, j \in S$.

Марківська властивість 1 означає, що знаючи теперішній стан процесу $X_m = i$, для обчислення розподілу ймовірностей майбутніх станів процесу не потрібне знання минулого. Ймовірність

$$P(X_n = j \mid X_m = i) = p_{ij}^{(m,n)}, \quad m < n$$

називають ймовірністю переходу.

Теорема (1.1.)

Ймовірність переходу задовольняє рівняння Чепмена-Колмогорова

$$p_{ij}^{(m,n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m,l)} p_{kj}^{(l,n)}, \quad \forall i, j \in S, \quad \forall m < l < n.$$

Доведення.

Нехай $H_1, \dots, H_k, \dots$ – повна група подій: $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$; $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$. Тоді для $\forall B, C \in \mathcal{F}$, $P(C) > 0$ маємо варіант формули повної ймовірності

$$P(B \mid C) = \sum_{k=1}^{\infty} P(H_k \mid C) P(B \mid H_k \cap C).$$

Враховуючи марківську властивість, маємо

$$p_{ij}^{(m,n)} = P(X_n = j \mid X_m = i)$$

$$= \sum_{k \in S} P(X_l = k \mid X_m = i) P(X_n = j \mid X_m = i, X_l = k) =$$

$$= \sum_{k \in S} P(X_l = k \mid X_m = i) P(X_n = j \mid X_l = k) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m,l)} p_{kj}^{(l,n)}. \quad \square$$

Рівняння Чепмена-Колмогорова дає можливість обчислити ймовірність переходу через ймовірність переходу за один крок $p_{ij}^{(n,n+1)}$. Розподіл ланцюга Маркова повністю визначено, якщо задано початковий розподіл $q_j = P(X_0 = j),\ j \in S$ і ймовірність переходу за один крок $p_{ij}^{(n,n+1)}$.

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)$$

$$= P(X_0 = i_0) \prod_{k=1}^{n} P(X_k = i_k \mid X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P(X_k = i_k \mid X_{k-1} = i_{k-1}) = q_{i_0} \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k}^{(k-1,k)}.$$

Залежність від часу ланцюга Маркова

2.1. Однорідні ланцюги Маркова.

Найбільш простий випадок ми одержимо, якщо ймовірність переходу за один крок не залежить від часу:

$$p_{ij}^{(n,n+l)} = p_{ik}. \tag{2}$$

У цьому випадку ми говоримо, що ланцюг Маркова однорідний за часом. Із 2 легко вивести, що загальна ймовірність переходу залежить лише від різниці між моментами часу

$$P(X_{l+m} = j \mid X_m = i) = p_{ij}^{(l)}. \tag{3}$$

Ймовірність із 3 будемо називати ймовірністю переходу за l кроків.

Для однорідних за часом ланцюгів Маркова рівняння Чепмена-Колмогорова приймає вигляд

$$p_{ij}^{(n-m)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(l-m)} p_{kj}^{(n-l)} \qquad \text{для} \quad m < l < n.$$

Якщо ввести *матрицю переходів* $P = \{p_{ij}\}_{i,j\in S}$, тоді за індукцією із рівняння Чепмена-Колмогорова одержимо

$$p_{ij}^{(l)} = (P^l)_{ij},$$

де P^l – це l-та степінь матриці P.

Матриця переходів P – це квадратна $N \times N$ матриця, де N це число станів в S (можливо нескінченне). Для всіх $i \in S$ маємо умову

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1,$$

отже, сума елементів кожного рядка матриці переходів дорівнює одиниці. За індукцією легко одержати співвідношення

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^{(l)} = 1, \ \forall i \in S.$$

Часто потрібно намалювати *граф переходів* ланцюга Маркова. Це діаграма, у якій кожен стан із S зображається вершиною графа і стрілкою з'єднують вершину i із вершиною j, якщо $p_{ij} > 0$, що означає можливість прямого переходу із стану i в стан j. Ймовірність p_{ij} зображається над відповідною стрілкою.

2.2. Неоднорідні за часом ланцюги Маркова.

Для неоднорідних ланцюгів Маркова ймовірності переходів не можна просто позначити через p_{ij}, бо вони залежать від значення часу n. Значення "часу" може бути представлено різними факторами, наприклад, час року, вік або тривалість.

Приклади

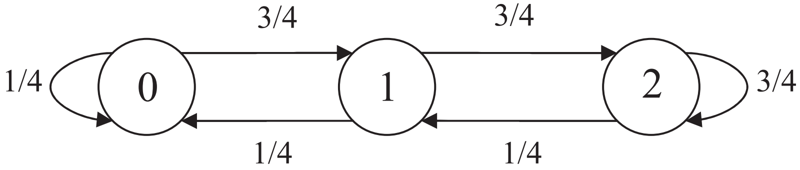
Система знижок при відсутності позовів у страхуванні автомобілів полягає у тому, що величина страхових премій залежить від наявності позовів клієнта.

Розглянемо дві прості моделі на основі ланцюгів Маркова, а також різні можливі покращення моделі.

Приклад (3.1. Проста модель системи знижок при відсутності позовів (No Claims Discount Policy, NCD))

Компанія по страхуванню авто надає клієнтам такі знижки: 0% *знижки (стан 0), 25% знижки (стан 1), і 50% знижки (стан 2). Якщо протягом року позовів не було, то клієнт переходить до наступного вищого стану у наступному році (або залишається у стані з найвищим бонусом).*

Аналогічно, якщо протягом року були позови, то наступного року клієнт переходить до сусіднього нижчого стану (або залишається без знижки). При цих умовах система знижок для клієнта утворює ланцюг Маркова із простором станів $S = \{0, 1, 2\}$, і якщо ймовірність не мати протягом року позовів дорівнює 3/4, то граф переходів має вигляд



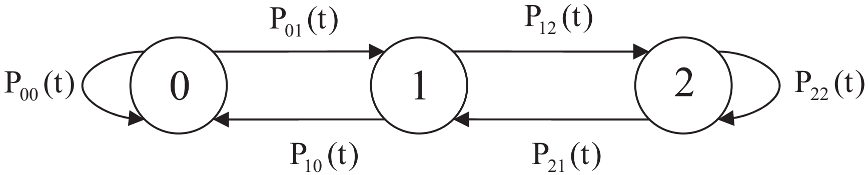
Матриця переходів має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Ймовірність одержати максимальну знижку у $n+3$-ому році при умові, що у n-ому році знижок не було дорівнює

$$p_{02}^{(3)} = (P^3)_{02} = 9/16.$$

У випадку неоднорідності за часом цієї моделі ймовірність аварії може залежати від часу, відображаючи зміну умов руху з часом. У цьому випадку граф переходів матиме вигляд


P01(t)
P12(t)
P00(t)
0
1
2
P22(t)
P10(t)
P21(t)

а матриця переходів

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{20}(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{pmatrix}$$

Модифікуємо попередню модель таким чином.

Приклад (3.2 Інша модель NCD)

Нехай маємо чотири рівні знижок:

- *Стан 0 – 0% знижки;*
- *Стан 1 – 25% знижки;*
- *Стан 2 – 40% знижки;*
- *Стан 3 – 60% знижки.*

Правила переходу на вищі стани знижок залишаються попередніми, але якщо у поточному році були позови, то відбувається перехід вниз на один рівень, якщо позовів не було у попередньому році, або на два рівні ввниз, якщо були позови у попередньому році.

При цих умовах стан знижки X_n власника полісу не утворює ланцюг Маркова на множині станів $S = \{0, 1, 2, 3\}$, тому що

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 2, X_{n-1} = 1) = 0$$

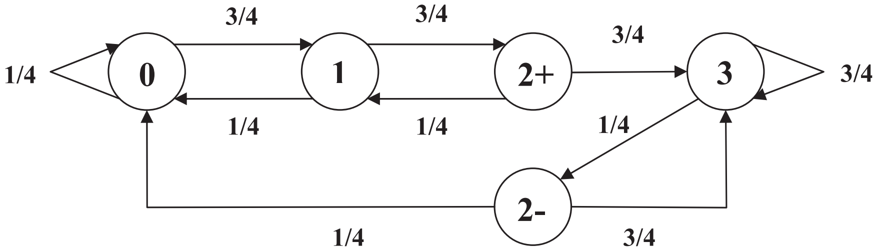
і

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 2, X_{n-1} = 3) > 0$$

і є залежність від минулого.

Щоб побудувати ланцюг Маркова $Y_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$, при визначені стану нам потрібно врахувати інформацію за попередній рік. Розіб'ємо стан 2 на два стани:
Стан $2+$ — 40% знижки і не було позовів у попередній рік;
Стан $2-$ — 40% знижки і були позови у попередній рік.

Вважаючи, як і раніше, що ймовірність відсутності позовів за рік дорівнює 3/4, одержимо ланцюг Маркова з простором станів $S = \{0, 1, 2+, 2-, 3\}$ і графом переходів



Матриця переходів має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Ймовірність одержати 60% знижки у рік $n+3$, при умові що у рік n була знижка 25%, дорівнює $p_{13}^{(3)} = (P^3)_{13} = 27/64$.

Ця основна модель придатна до різноманітних узагальнень і модифікацій. Наприклад, ймовірність аварії можна зробити залежною від стану знижки для того, щоб відобразити вплив знижки на обережність водія. Також ймовірність аварії може залежати від часу, що приведе до неоднорідного ланцюга Маркова, і буде відображати зміни в умовах дорожнього руху.

Приклад (3.3 Просте випадкове блукання на $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$)

Просте випадкове блукання на $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ *визначається так:*

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n,$$

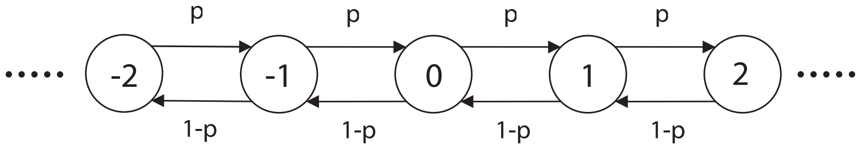
де випадкові величини (кроки блукання) Y_j *незалежні і мають однаковий розподіл ймовірностей* $P(Y_j = 1) = p$, $P(Y_j = -1) = 1 - p$. *Виконується властивість Маркова*

$$P(X_n = j \mid X_1 = i_1, \dots, X_{m-1} = i_{m-1}, X_m = i) =$$

$$= P(X_m + Y_{m+1} + \ldots + Y_n = j \mid X_1 = i_1, \dots, X_{m-1} = i_{m-1}, X_m = i) =$$

$$= P(Y_{m+1} + \ldots + Y_m = j - i) = P(X_n = j \mid X_m = i).$$

Граф переходів і матриця переходів будуть нескінченними:



$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & 0 & p & 0 & \ddots & 0 & \ddots \\ \ddots & 1-p & 0 & p & 0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & 0 & 1-p & 0 & p & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1-p & 0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Для того, щоб попасти із стану i у стан j за n кроків випадкове блукання повинно зробити $u = (n + j - i)/2$ кроків у напрямку зростання і $v = n - u$ кроків у напрямку спадання. Оскільки число кроків у напрямку зростання при n кроках має біноміальний розподіл з параметрами n і p, то ймовірність переходу за n кроків дорівнює

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} C_n^u p^u (1-p)^{n-u}, & 0 \le n + j - i \le 2n \text{ і } n + j - i \text{ парне}, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Зауважимо, що просте випадкове блукання є однорідним як за часом так і за просторовою змінною:

$$p_{ij}^{(n)} = p_{i+r\,j+r}^{(n)}.$$

Приклад (3.4 Просте випадкове блукання на $\{0, 1, 2, \ldots, b\}$)

Це випадкове блукання визначається аналогічно попередньому прикладу, але потрібно визначити граничні умови у точках 0 *і* b. *Граничні умови у стані 0 можуть мати вигляд:*

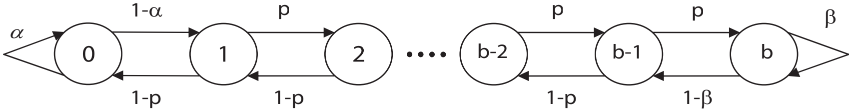
Відбиваюча границя: $P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 1$.

Поглинаюча границя: $P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = 1$.

Границя змішаного типу: $P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = \alpha$, $P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 1 - \alpha$.

Випадкове блукання з поглинаючими границями у станах "0"і "b"можна використати при моделюванні капіталу гравця, який продовжує грати доти поки не одержить виграш "b або поки не збанкрутує у стані "0". В обох випадках попавши на поглинаючу границю залишаєшся там назавжди.

При змішаному типі граничних умов, граф переходів має вигляд



а матриця переходів така

$$
P = \begin{pmatrix}
\alpha & 1-\alpha & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
1-p & 0 & p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-p & 0 & p \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1-\beta & \beta
\end{pmatrix}
$$

Відбиваючі і поглинаючі граничні умови можна одержати, як спеціальні випадки, поклавши α, β рівними 0 або 1. Проста NCD модель із прикладу 1.1 є іншим практичним прикладом обмеженого випадкового блукання.

Модель схильності до аварій.

Для даного водія кожен період часу j є або вільним від аварій ($Y_j = 0$), або дає приріст кількості аварій на 1 ($Y_j = 1$). Можливість більшої кількості аварій відкидається для простоти. Ймовірність аварії у наступний період задається, враховуючи всі попередні записи про аварії або їх відсутність (всі змінні y_j рівні 0 або 1):

$$P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_n = y_n) = \frac{f(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)}{g(n)},$$

де f, g – це задані зростаючі функції, такі що $0 \le f(m) \le g(m)$.

Залежність від минулих значень $Y_1, \ldots, Y_n$ вказує на те, що послідовність $\{Y_j\}$ не є ланцюгом Маркова. Однак накопичена кількість аварій $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ є ланцюгом Маркова із простором станів $S = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Дійсно

$$P(X_{n+1} = 1 + x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) =$$

$$= P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_1 = x_1, Y_2 = x_2 - x_1, \ldots, Y_n = x - x_{n-1}) = \frac{f(x)}{g(n)}.$$

Зауважимо, що ланцюг буде однорідним за часом, якщо $g(n) = g = const$

Граничні за часом розподіли ланцюга Маркова

Definition (Стаціонарні розподіли)

Будемо говорити, що π_j, $j \in S$ – це *стаціонарний розподіл ланцюга Маркова* з матрицею переходу $P = \{p_{ij}\}$, якщо для $\forall j \in S$:

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}, \tag{4}$$

$$\pi_j \geq 0, \quad \sum_{j \in S} \pi_j = 1.$$

Зауважимо, що 4 можна записати у вигляді $\pi = \pi P$, де $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots)$.

Якщо взяти розподіл π у якості початкового розподілу $P(X_0 = i) = \pi_i$, тоді $\forall j \in S$

$$P(X_1 = j) = \sum_{i \in S} P(X_1 = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i \in S} p_{ij} \pi_i = \pi_j.$$

За індукцією будемо мати

$$P(X_n = j) = \pi_j, \ \forall j \in S, \ \forall n.$$

Тому π є *інваріантним розподілом* і ланцюг буде стаціонарним процесом.

У загальному випадку ланцюг Маркова не обов'язково має стаціонарний розподіл і він не обов'язково єдиний. Наприклад не існує стаціонарного розподілу у прикладі 1.3, а у прикладі 1.4 єдиність залежить від значень α, β.

Теорема (4.1.)

Якщо ланцюг Маркова має скінчений простір станів, то існує принаймні один стаціонарний розподіл.

Приклад

Знайдемо стаціонарний розподіл для NCD моделі із прикладу 1.2. Із 4 маємо

$$\begin{cases} \pi_0 = 1/4\pi_0 + 1/4\pi_1 + 1/4\pi_{2-}, \\ \pi_1 = 3/4\pi_0 + 1/4\pi_{2+}, \\ \pi_{2+} = 3/4\pi_1, \\ \pi_{2-} = 1/4\pi_3, \\ \pi_3 = 3/4\pi_{2+} + 3/4\pi_{2-} + 3/4\pi_3. \end{cases}$$

Ця лінійна система не є лінійно незалежною бо $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$, тому ми можемо відкинути будь-яке із рівнянь системи, часто найбільш складне. Із лінійності випливає, що добуток розв'язку системи на константу буде знову розв'язком системи. Тому зручно вибрати робочу змінну і розв'язати систему відносно цієї змінної, а потім знайти її із умови нормалізації $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$.

Відкинемо останнє рівняння в системі, виберемо за робочу змінну π_1 і розв'яжемо систему відносно цієї змінної

$$\pi_{2+} = 3/4\pi_1, \pi_0 = 13/12\pi_1, \pi_{2-} = 9/4\pi_1, \pi_3 = 9\pi_1.$$

Із умови

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

знайдемо $\pi_1 = 12/169$. Отже, стаціонарний розподіл даного ланцюга Маркова має вигляд

$$\pi = (13/169, 12/169, 9/169, 27/169, 108/169).$$

Питання єдиності стаціонарного розподілу більш складне і ми розглянемо його для *незвідних* ланцюгів Маркова, тобто таких, що у будь-який стан $j \in S$ можна попасти із будь-якого іншого стану $i \in S$. Таким чином ланцюг Маркова буде незвідним, якщо для $\forall i, j \in S$ $\exists n$ таке, що $p_{ij}^{(n)} > 0$. Цю властивість можна виявити із графа переходів.

Ланцюги Маркова із прикладів 1.1, 1.2, 1.3 є незвідними. Незвідність має місце і у прикладі 1.4, за винятком існування поглинаючої границі ($\alpha = 1$ або $\beta = 1$). Поглинаючий стан часто зустрічається у реальних системах, наприклад банкрутство.

Теорема (4.2.)

Незвідний ланцюг Маркова із скінченим простором станів має єдиний стаціонарний розподіл ймовірностей.

Гранична за часом поведінка ланцюгів Маркова

Природно очікувати, що розподіл ланцюга Маркова буде прямувати до інваріантного розподілу π при $t \to \infty$. Якщо ця збіжність має місце, то $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$ при $n \to \infty$. Але ця збіжність не завжди має місце.

Definition

Стан $i \in S$ називається *періодичним* з періодом $d > 1$, якщо повернення у стан i можливе лише за кратну d кількість кроків ($p_{ii}^{(n)} \neq 0$, якщо $n = md$ для деякого цілого m, і $p_{ii}^{(n)} = 0$ у всіх інших випадках). Зауважимо, *якщо ланцюг незвідний, то всі його стани або мають один період або неперіодичні.*

Використовуючи граф переходів можна визначити, що у прикладах 1.1 і 1.2 всі стани неперіодичні, а в прикладі 1.3 — всі стани мають період 2. У прикладі 1.4 всі стани неперіодичні за винятком випадку, коли α і β дорівнюють 0 або 1.

Теорема (4.3.)

Нехай $p_{ij}^{(n)}$ — це ймовірність переходу за n кроків незвідного неперіодичного ланцюга Маркова із скінченою кількістю станів. Тоді $\forall i, j \in S$:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j,$$

де $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ — стаціонарний розподіл.

Зауважимо, що границя не залежить від початкового стану $i \in S$.

Моделювання за допомогою ланцюгів Маркова

При виборі моделі спочатку беруть просту модель, таку як ланцюг Маркова. Перевіряють модель на відповідність множині спостережень. Якщо тести на відповідність відхиляють просту модель, то на наступному етапі застосовують більш складні моделі.

У цьому розділі ми розглянемо однорідні за часом моделі. У випадку неоднорідних моделей ситуація є набагато складнішою.

Оцінка ймовірності переходу

Якщо ми хочемо використати для моделювання ланцюг Маркова, то спочатку потрібно вибрати простір станів. Ми бачили у прикладі 1.2, що простір станів іноді потрібно модифікувати, щоб одержати ланцюг Маркова.

Після визначення простору станів марківська модель пристосовується до множини даних шляхом оцінювання ймовірності переходів p_{ij}.

Нехай $x_1, \ldots, x_N$ — це наявні спостереження. Визначимо такі величини

n_i – це число моментів часу t $(1 \leq t \leq N-1)$ таких, що $x_t = i$;

n_{ij} – це число моментів часу t $(1 \leq t \leq N-1)$ таких, що $x_t = i$ і $x_{t+1} = j$.

Таким чином n_{ij} – це число переходів, що спостерігались, із стану i в стан j, а n_i – це загальне число переходів, що спостерігались, із стану i. Найкращою оцінкою для p_{ij} буде

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}.$$

Якщо потрібно побудувати довірчий інтервал для ймовірності переходу, то потрібно взяти до уваги, що при фіксованому значенні випадкової величини N_i (число переходів із i) випадкова величина N_{ij} (число переходів із i в j) має біноміальний розподіл з параметрами N_j, p_{ij}. Тому можна застосувати стандартну техніку побудови довірчого інтервалу.

Перевірка на відповідність

Наступним кроком є перевірка моделі на відповідність даним спостереження: перевірка виконання марківської властивості. У загальних моделях Маркова повна перевірка марківської властивості потребує значної роботи і значного об'єму даних. На практиці вважають достатнім розглядати трійки послідовних спостережень.

Позначимо через n_{ijk} число моментів часу t $(1 \leq t \leq N-2)$, таких що

$$x_t = i, x_{t+1} = j, x_{t+2} = k.$$

Якщо має місце властивість Маркова, тоді n_{ijk} можна вважати спостереженням біноміального розподілу з параметрами n_{ij}, p_{jk}.

Простим, але ефективним тестом буде χ^2-критерій відповідності із тестовою статистикою

$$X^2 = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{(n_{ijk} - n_{ij}\hat{p}_{jk})^2}{n_{ij}\hat{p}_{jk}}.$$

Кількість ступенів свободи дорівнює $r - q + s - 1$, де

s означає число станів i, таких що $n_i > 0$,

q означає число пар (i, j), для яких $n_{ij} > 0$ і

r означає число трійок (i, j, k), для яких $n_{ij}n_{jk} > 0$.

Додатковим методом, який часто використовується для перевірки відповідності, є метод комп'ютерної імітації вибраного ланцюга з наступним порівнянням одержаної траєкторії з графіком реального процесу, який спостерігається. Цей метод часто висвітлює ті проблеми, які були пропущені χ^2-критерієм.

Наприклад, нехай маємо послідовність $y_1, y_2, \ldots, y_N$ значень відсоткової ставки. Нехай у моделі x_t – це найближче ціле число до $K \ln y_t$, де K — нормуючий множник, і нехай $x_1, x_2, \ldots, x_N$ моделюються, як випадкове блукання з ймовірностями переходів $p_{i,i+1} = \theta$, $p_{i,i-1} = \phi$, $p_{i,i} = 1 - \theta - \phi$.

Параметри θ і ϕ на практиці можна оцінити досить задовільно, але порівняння змодельованого випадкового блукання з траєкторією x_t, яка спостерігається показує, що реальна відсоткова ставка залишається відносно незмінною протягом досить довгих періодів часу, із рідко зростаючою волатильністю. В той же час модель на основі ланцюга Маркова не відображає цю властивість.

Комп'ютерна імітація

Імітація однорідних за часом ланцюгів Маркова є досить очевидною, бо марківська властивість означає, що умовний розподіл X_{t+1} при заданій історії X до моменту часу t залежить лише від X_t.

Якщо простір станів X скінчений, то існує лише обмежене число дискретних розподілів, з яких програма повинна генерувати вибірку. Це виписується індивідуально разом з інструкцією, яка вказує програмі, який розподіл використовується на кожному кроці.

Моделі із нескінченним простором станів зазвичай мають просту структуру переходів, часто основану на розподілі приростів. Випадкове блукання, яке має незалежні прирости, є прикладом такого виду. Іншим прикладом може слугувати процес, який може робити переходи виду $x \to x + 1$ або $x \to x - 1$ відповідно з ймовірностями θ_x і $1 - \theta_x$.

Додатково до комерційних моделюючих пакетів, які без проблем можуть імітувати ланцюг Маркова, можна використовувати стандартні програми "Excel"для практичного оцінювання ймовірностей переходу і імітації ланцюга.

Задача (1)

Членів схеми страхування здоров'я класифікують як учасників або бенефіціарів. Член, який є учасником в одному періоді, стає бенефіціаром в іншому, якщо він чи вона стає важкохворим, що трапляється з імовірністю 0.1. Імовірність того, що хвороба триватиме й наступного періоду, становить 0.2.

Правила схеми визначають, що будь-який член, який був бенефіціаром упродовж трьох періодів поспіль, має стати учасником для наступного періоду; якщо хвороба продовжиться, то член далі може знову перетворитися на бенефіціара.

Задача (1)

(i) (а) Побудуйте ланцюг Маркова з дискретним часом для моделювання цієї схеми, використовуючи (за потреби) різні класи бенефіціарів і учасників (пропонується модель із 5 станами)
(б) Намалюйте граф переходів між станами.
(в) Запишіть матрицю переходів для ланцюга.
(ii) Поясніть, чому такий ланцюг Маркова є незвідним, періодичним чи і те, і те.
(iii) (а) Обчисліть стаціонарний розподіл для ланцюга.
(б) Визначте частку бенефіціарів серед членів у стаціонарному режимі.

Відповідь: (iii) (а) $\pi = \frac{1}{1404}(1248, 1, 125, 25, 5)$

Задача (2)

Розглянемо однорідний ланцюг Маркова з простором станів $S = \{1, 2, 3\}$ *і матрицею переходів*

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача (2)

(i) Обчисліть 3-крокову матрицю переходу.
(ii) Для кожної з наведених початкових умов обчисліть імовірність того, що ланцюг перебуватиме в стані 3 у момент часу 3 за умови, що
(а) ланцюг у стані 1 у нульовий момент часу;
(б) ланцюг у стані 1 у нульовий момент часу й у стані 2 у момент часу 1;
(в) імовірності перебування у станах 1, 2, 3 у нульовий момент часу дорівнюють $14/31$, $9/31$ *і* $8/31$ *відповідно.*
(iii) Як зміниться відповідь до (а), (б), (в), якщо момент часу спостереження за ланцюгом є 300, а не 3?

Задача (3)

Задача (3)