Теорія страхового та фінансового ризику

Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка

15 лютого 2017 р.

Зміст

Випадкові процеси

Випадковий процес – це модель випадкового явища залежного від часу. Випадкова величина описує статичне випадкове явище, а випадковий процес це сукупність випадкових величин $\{X_t : \ t \in J\}$, де J – це деяка часова множина. Множина значень X_t називається простором станів S випадкового процесу.

Перше, що потрібно зробити при виборі випадкового процесу, як моделі реальної системи, це з'ясувати природу (дискретну чи неперервну) часової множини J і простору станів S.

Example

Дискретний простір станів і дискретний час. Компанія зі страхування автомобілів щороку переглядає статус своїх клієнтів. Можливі три рівні знижок $(0\%, 25\%, 40\%)$ залежно від кількості аварій у водія.

У цьому випадку простором станів є $S = \{0, 25, 40\}$, а часова множина $J = \{0, 1, 2, \ldots\}$, де кожен інтервал – це один рік.

Example

Дискретний простір станів з неперервним часом.
Компанія із страхування життя класифікує своїх клієнтів як *Здоровий(Healthy)*, *Хворий(Sick)* або *Мертвий(Dead)*.

Таким чином простір станів $S = \{H, S, D\}$. Природно вибрати за часову множину $J = [0, \infty)$, оскільки хвороба або смерть може трапитись у будь-який час. З другого боку можна за одиницю часу вибрати день, тоді $J = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Example

Неперервний простір станів. Позови непередбаченої величини надходять до компанії у непередбачені моменти часу. Компанії необхідно спрогнозувати *накопичену величину позовів (cumulative claim)* за період часу $[0, t]$ для того, щоб оцінити ризик невиконання своїх зобов'язань.

Звичайно на практиці вибирають $S = [0, \infty)$, $J = [0, \infty)$, однак можливі і інші варіанти. Позови вимірюються у грошових одиницях і не утворюють неперервну множину. Аналогічно час надходження позову протягом дня не є суттєвим, тому для J і/або для S можна вибрати множину $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Example

Процеси змішаного типу. Оскільки випадковий процес, що діє у неперервному часі, може змінювати стан у заздалегідь визначені моменти часу, то такі процеси називають *процесами змішаного типу*. Як приклад, розглянемо пенсійну схему, в якій члени мають можливість вийти на пенсію у будь-який свій день народження між віком 60 і 65 років. Число осіб, які вийдуть на пенсію раніше 65 років не можна передбачити точно, як і час смерті і число померлих активних членів пенсійної схеми. Тому число активних учасників пенсійної схеми можна моделювати процесом змішаного типу з $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$ і $J = [0, \infty)$. У цього процесу випадкові від'ємні прирости відбуваються як у фіксовані моменти часу при виході на пенсію активних членів схеми, так і у випадкові моменти часу у випадку смерті активних учасників схеми.

Лічильні процеси

Лічильний процес – це випадковий процес X_t у дискретному або неперервному часі, з простором станів $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ і такий, що X_t є неспадною функцією часу t.

2.1. Траєкторії (вибіркові функції) випадкового процесу.

Маючи визначені множини J і S, залишається визначити випадковий процес $\{X_t,\ t \in J\}$.

Definition

За означенням випадковий процес – це сукупність випадкових величин, яка визначається сумісним розподілом $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ для всіх $t_1, t_2, \ldots, t_n$ і всіх натуральних n.

Definition

Реалізація X_t для всіх $t \in J$ називається *траєкторією процесу* або *вибірковою функцією процесу*.

Це функція із J в S. Властивості траєкторії процесу повинні відповідати властивостям реальної системи, яку ми моделюємо. Якщо це так, то модель вважається вдалою і може бути використана для передбачення. Важливо, щоб принаймні більшість основних рис реальної системи були відображені в моделі.

2.2. Стаціонарність.

Definition

Випадковий процес називається *стаціонарним* або *строго стаціонарним*, якщо сумісний розподіл випадкових величин $(X_{t+t_1}, X_{t+t_2}, \ldots, X_{t+t_n})$ не залежить від t для всіх $t_1, t_2, \ldots, t_n \in J$ і всіх натуральних n.

Це означає, що статистичні властивості процесу залишаються незмінними при зміні часу.

Строга стаціонарність є дуже сильною вимогою, яку важко повністю перевірити в реальних системах. Тому використовується також інша умова – *слабка стаціонарність*: математичне сподівання процесу не залежить від часу

$$E[X_t] = m = const,$$

а коваріація процесу залежить лише від $t - s$ тобто

$$E[(X_t - m)(X_s - m)] = C(t - s),\ t \geq s.$$

2.3. Прирости.

Definition

Приростами випадкового процесу називають різниці $X_{t+u} - X_t$, $u > 0$. Часто при рости процесу мають простіші властивості ніж сам процес.

Example

Нехай S_t –це ціна однієї акції. Природно вважати, що розподіл S_{t+u}/S_t залежить від u, але незалежить від t. Відповідно $X_t = \ln S_t$ буде мати стаціонарні прирости

$$X_{t+u} - X_t = \ln(S_{t+u}/S_t)$$

в той час як сам процес X_t не обов'язково є стаціонарним.

Definition

Говорять, що процес X_t має *незалежні прирости*, якщо для кожного $u > 0$ приріст $X_{t+u} - X_t$ не залежить від усього минулого процесу $\{X_s,\ 0 \leq s \leq t\}$.

У попередньому прикладі однією із гіпотез може бути незалежність приростів процесу $X_t = \ln S_t$. Приклад 1.3 можна змоделювати процесом із стаціонарними незалежними приростами. Багато процесів визначаються через свої прирости (див. пункт 3).

- неможливо включити в модель всі майбутні події. Наприклад зміни у законодавстві можуть зробити недійсними одержані з моделі результати;
- іноді буває важко пояснити деякі одержані з моделі результати. Вихідні дані можуть бути дійсними у більшій степені відносно ніж абсолютно. Наприклад можна порівнювати рівні ризику для різних вхідних даних.

2.4. Марківська властивість.

Якщо майбутнє процесу визначається теперішнім станом і не залежить від минулого, то цю властивість можна точно сформулювати так

$$P(X_t \in A \mid X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, \ldots, X_{s_n} = x_n, X_s = x) =$$

$$= P(X_t \in A \mid X_s = x)$$

для всіх $s_1 < s_2 < \ldots < s_n < s < t$, всіх $x_1, x_2, \ldots, x_n, x \in S$ і всіх $A \subset S$. Ця властивість називається *марківською*.

Систему із приклада 1.2 можна змоделювати процесом Маркова, якщо повне видужання із стану "Хворий"до стану "Здоровий"не залежить від минулої історії хвороби.

Lemma

Процес із незалежними приростами має марківську властивість.

Доведення.

$$P(X_t \in A \mid X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, \ldots, X_{s_n} = x_n, X_s = x) =$$

$$= P(X_t - (X_s - x) \in A \mid X_{s_1} = x_1, \ldots, X_{s_n} = x_n, X_s = x) =$$

$$= P(X_t - (X_s - x) \mid X_s = x) = P(X_t \in A \mid X_s = x)$$

Definition

Коли марківський процес має дискретний простір станів і дискретний час тоді він називається *ланцюгом Маркова*.

Ланцюги Маркова будуть вивчатися у Розділі 3. Якщо простір станів дискретний, час неперервний, тоді маємо *стрибкоподібний процес Маркова* (див. Розділ 4).

Наступні об'єкти визначають довільний випадковий процес X_t:

- вибірковий простір Ω. Кожний результат $\omega \in \Omega$ визначає траєкторію $X_t(\omega)$;
- множина випадкових подій $\mathcal{F}$ (σ-алгебра підмножин Ω);
- фільтрація $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_u$ при $t \leq u$. $\mathcal{F}_t$ містить всю інформацію про процес $X_s, \ s \leq t$.

Марківську властивість у термінах фільтрації можна сформулювати так

$$P(X_t \le x \mid \mathcal{F}_s) = P(X_t \le x \mid X_s) \quad \text{для всіх} \quad t \ge s \ge 0.$$

3.1. Білий шум.

Для процесу $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ з незалежними випадковими величинами $X_k,\ k = 1, 2, \ldots$ має місце марківська властивість. Процес буде стаціонарним тоді і лише тоді коли всі X_n однаково розподілені. Таку послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин називають *дискретним білим шумом*.

3.2. Загальне випадкове блукання.

Процес $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$, $X_0 = 0$, де $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин визначає *загальне випадкове блукання*.

Це процес із стаціонарними незалежними приростами, і тому це процес Маркова у дискретному часі. Цей процес не є навіть слабко стаціонарним, його середнє і дисперсія пропорційні n. У частинному випадку, коли кроки блукання Y_j приймають значення +1 і -1, цей процес є *простим випадковим блуканням*.

3.3. Процес Пуассона.

Процес Пуассона із інтенсивністю λ – це цілочисельний процес $N_t,\ t \geq 0$ у неперервному часі із властивостями

(i) $N_0 = 0$;

(ii) N_t – це процес із незалежними приростами;

(iii) N_t має стаціонарні прирости розподілені за законом Пуассона

$$P(N_t - N_s = n) = \frac{(\lambda(t-s))^n e^{-\lambda(t-s)}}{n!}, \quad s < t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Це стрибкоподібний процес Маркова із простором станів $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Цей процес не є стаціонарним, бо його середнє і дисперсія лінійно зростають з часом.

Цей процес є дуже важливим при підрахунку накопиченої кількості подій, що відбулись протягом інтервалу часу $[0, t]$, незалежно від природи подій (аварії автомобілів, позови до страхової компанії, прибуття клієнтів до відділу обслуговування і т.ін.)

3.4. Складний процес Пуассона.

Нехай $N_t, \ t \geq 0$ – це процес Пуассона, $Y_j, \ j \geq 1$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин. *Складний процес Пуассона* визначається так

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j, \qquad t \geq 0.$$

Це процес із незалежними приростами і тому виконується марківська властивість. Цей процес використовують для моделювання накопиченої суми позовів у страхову компанію протягом інтервалу часу $[0, t]$: N_t – це загальна кількість позовів за період $[0, t]$, Y_j – це величина j-того позову.

Основною задачею класичної теорії ризику є оцінка *ймовірності банкрутства* $\Psi(u) = P(u + ct - X_t < 0$, для деякого $t > 0)$, де u – це початковий капітал, c – інтенсивність страхових внесків (премій).