Математичні моделі в процесі ризику

© Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

І семестр 2016

Зміст

Випадкові вектори

Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, на якому визначені n в.в. $X_1, \ldots, X_n$. Вектор $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ називають *випадковим вектором* або *n-вимірною в.в.*

Сумісні розподіли дискретних в.в.

Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – дискретні в.в. Функцію

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

для всіх значень $(x_1, \ldots, x_n)$ наз. *сумісним* або *n-вимірним р-лом дискретного вип. вектора* $(X_1, \ldots, X_n)$.

Вона має такі властивості:

- $p(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ для всіх значень $x_1, \ldots, x_n$;
- $\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} p(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

Маргінальний (тобто одновимірний) розподіл в.в. X_k за відомим сумісним розподілом визначають так:

$$p_k = \mathrm{P}(X_k = x_k) =$$

$$\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{k-1}} \sum_{x_{k+1}} \cdots \sum_{x_n} p(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Сумісні функції розподілу

Нехай тепер $X_1, \ldots, X_n$ – довільні в.в. *Сумісною функцією розподілу* випадкового вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ називають функцію $F_{\mathbf{X}}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яка в точці $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ дорівнює

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \equiv F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \mathrm{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n).$$

Як і в одновимірному випадку, багатовимірна функція розподілу має подібні властивості:

(1) $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ – неспадна функція за будь-яким аргументом;

(2) – неперервна зліва за будь-яким аргументом;

(3) – задовольняє співвідношення

$$F_X(+\infty, \ldots, +\infty) = 1,$$

$$\lim_{x_k \to -\infty} F_X(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

для довільних значень інших аргументів.

На відміну від функції розподілу одновимірної в.в., сумісна функція розподілу має ще одну характеристичну властивість. Позначимо через $\Pi_{\mathbf{x}}$ кут

$$\Pi_{\mathbf{x}} = (-\infty, \mathbf{x}) = (-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_n), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Для початку припустимо, що розмірність $n = 2$. Зауважимо, що паралелепіпед $[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ можна зобразити у вигляді вкладеної різниці вкладених різниць кутів:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\Pi_{\mathbf{b}} \backslash \Pi_{\mathbf{b}'}) \backslash (\Pi_{\mathbf{a}} \backslash \Pi_{\mathbf{a}'}),$$

де точки $\mathbf{b}' = (a_1, b_2)$, $\mathbf{a}' = (a_2, b_1)$. Тоді

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathsf{P}(\mathbf{X} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \mathsf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}} \backslash \Pi_{\mathbf{b}'}) - \mathsf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}} \backslash \Pi_{\mathbf{a}'})$$

$$= \mathsf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}}) - \mathsf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}'}) - \mathsf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}}) + \mathsf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}'}).$$

Позначимо через $\Delta_{[\mathbf{a},\mathbf{b})} F_{\mathbf{X}}$ приріст сумісної функції розподілу $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ на паралелепіпеді $[\mathbf{a},\mathbf{b})$. Тоді при $n=2$ приріст $F_{\mathbf{X}}$ на прямокутнику $[\mathbf{a},\mathbf{b})$ дорівнює

$$\Delta_{[\mathbf{a},\mathbf{b})} F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}) - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}') - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}') + F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}).$$

У загальному випадку $n>2$ правило чергування знаків при значеннях функції у вершинах паралелепіпеда $[\mathbf{a},\mathbf{b})$ визначається аналогічно.

Нехай $\Delta^k_{[a_k,b_k)} F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_{k-1},b_k,x_{k+1},\ldots,x_n) - F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$ позначає k-ий частковий приріст на $[a_k,b_k)$. Використовуючи метод математичної індукції, легко показати, що приріст сумісної функції розподілу на паралелограмі $[\mathbf{a},\mathbf{b})$ є результатом послідовних часткових приростів:

$$\mathrm{P}(\mathbf{X}\in[\mathbf{a},\mathbf{b})) = \Delta_{[\mathbf{a},\mathbf{b})} F_{\mathbf{X}} = \Delta^1_{[a_1,b_1)} \ldots \Delta^{n-1}_{[a_k,b_k)} \Delta^n_{[a_k,b_k)} F_{\mathbf{X}}. \quad (1)$$

В одновимірному випадку перераховані властивості (1) – (3) є необхідними й достатніми для того, щоб функція $F_X(x)$ була функцією розподілу деякої в.в. X.

У багатовимірному випадку цих властивостей вже недостатньо. Для того, щоб функція $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ була функцією розподілу деякого випадкового вектора $\mathbf{X}$, треба додати ще одну:

(4) для довільних $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ вираз (1) невід'ємний.

Приклад

Нехай

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \geq 0, \text{ або } x+y \leq 1, \text{ або } y \leq 0; \\ 1, & \text{в іншій частині площини.} \end{cases}$$

Ця функція задовольняє умови (1) – (3), але для неї $F(1,1) - (F(1,\frac{1}{2})) - F(\frac{1}{2},1) + F(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -1$, і, відповідно, четверта умова не виконується.

Отже, функція $F(x,y)$ не може бути сумісною функцією розподілу, оскільки інакше ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в прямокутник $\frac{1}{2} \leq X < 1, \frac{1}{2} \leq Y < 1$ буде від'ємним числом.

Нехай випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ має сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$. *Маргінальну функцію розподілу* в.в. X_k визначають так:

$$F_{X_k}(x_k) = \mathrm{P}(X_k < x_k) = F_{\mathbf{X}}(\infty, \ldots, \infty, x_k, \infty, \ldots, \infty),$$

де x_k – k-ий аргумент функції $F_{\mathbf{X}}$.

Сумісні щільності

Випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ та його сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$ називають абсолютно неперервними, якщо існує невід'ємна вимірна функція $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \equiv f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ така, що

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty, \mathbf{x})} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y}$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_n) \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$$

для будь-якого

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Функцію $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ називають *сумісною щільністю* випадкового вектора та сумісної функції розподілу $F_{\mathbf{X}}$.

Якщо випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}$, то його координати мають маргінальні щільності

$$f_{X_k}(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, y_n)\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_{k-1}\mathrm{d}y_{k+1} \ldots \mathrm{d}y_n.$$

Властивості сумісної щільності

- $f_X(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, $\quad \int_{\mathbb{R}^n} f_X(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$;

Якщо випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}$, то його координати мають маргінальні щільності

$$f_{X_k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, y_n) \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_{k-1} \mathrm{d}y_{k+1} \ldots \mathrm{d}y_n.$$

Властивості сумісної щільності

- $f_X(x_1, \ldots, x_n) \geq 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f_X(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = 1;$
- $\mathsf{P}(x_{11} < X_1 < x_{12}, \ldots, x_{n1} < X_n < x_{n2}) = \int_{x_{11}}^{x_{12}} \cdots \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} f_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_n) \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n;$

Якщо випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}$, то його координати мають маргінальні щільності

$$f_{X_k}(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, y_n)\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_{k-1}\mathrm{d}y_{k+1} \ldots \mathrm{d}y_n.$$

Властивості сумісної щільності

- $f_X(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, $\qquad \int_{\mathbb{R}^n} f_X(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$;
- $\mathrm{P}(x_{11} < X_1 < x_{12}, \ldots, x_{n1} < X_n < x_{n2}) = \int_{x_{11}}^{x_{12}} \cdots \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} f_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_n)\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$;
- якщо сумісна ф-я розподілу диференційовна, то сумісна щільність (м. всюди) збігається з похідною ф-ї р-лу:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Розглянемо пару в.в. (X, Y) з сумісною щільністю $f_{X,Y}(x,y)$ та перетворення (U, V) цієї пари, де

$$U = g_1(X), \quad V = g_2(Y),$$

$g_{,}g_2$ – деякі борелівські функції.

Якщо заміна змінних $(x, y) \mapsto (u, v)$, $u = g_1(x, y)$, $v = g_2(x, y)$, взаємно однозначна на області значень в.в. X та Y, то сумісна щільність $f_{U,V}(u, v)$ на основі $f_{X,Y}(x, y)$ обчислюють так:

$$f_{U,V}(u,v) = \mathbb{I}_{\{(u,v)\in Range(g_1,g_2)\}} f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|,$$

де

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \det\begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix}$$

– якобіан оберненого перетворення $(u,v)\mapsto(x,y)$:

$$\det\begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix}^{-1}.$$

Наявність модуля $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ гарантує, що $f_{U,V}(u,v)\geq 0$.

Числові характеристики випадкових векторів

Обчислення математичного сподівання вимірної функції $g(X_1, \ldots, X_n)$ від випадкового вектора $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ проводять так:

- для дискретних в.в.:

$$\mathrm{E}g(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} g(x_1, \ldots, x_n) p_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} g(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n),$$

  де суму обчислюють по всіх можливим значенням $x_1, \ldots, x_n$, яких набувають в.в. $X_1, \ldots, X_n$;
- для абсолютно неперервних в.в.:

$$\mathrm{E}g(X_1, \ldots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_n) f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Нехай X та Y – дві в.в. зі скінченними другими моментами. Величину

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)(Y - \mathsf{E}Y) = \mathsf{E}XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y$$

називають *коваріацією* в.в. X та Y. Вона є скінченною за нерівністю Коші:

$$\operatorname{cov}(X, Y) \leq \sqrt{\mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2(Y - \mathsf{E}Y)^2} = \sqrt{\mathsf{D}X\mathsf{D}Y} = \sigma_X\sigma_Y.$$

Коефіцієнтом кореляції в.в. X та Y називають безрозмірну в.в.

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y},$$

яка внаслідок нерівності Коші набуває значень з $[-1, 1]$.

Коефіцієнт кореляції вказує на те, наскільки лінійно залежні між собою в.в. X та Y, зокрема, коли $|\rho(X, Y)| = 1$, то існують числа $a \neq 0$ та b такі, що $\mathsf{P}(X = aY + b) = 1$, причому $\operatorname{sign} a = \operatorname{sign} \rho(X, Y)$.

Коефіцієнт кореляції вказує на те, наскільки лінійно залежні між собою в.в. X та Y, зокрема, коли $|\rho(X, Y)| = 1$, то існують числа $a \neq 0$ та b такі, що $\mathsf{P}(X = aY + b) = 1$, причому $\operatorname{sign} a = \operatorname{sign} \rho(X, Y)$.

В.в. X та Y називають *некорельованими*, якщо $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Якщо в.в. X та Y незалежні, то вони некорельовані. Обернене твердження неправильне.

$$\mathsf{D}(X \pm Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y \pm \operatorname{cov}(X, Y).$$

Зокрема, коли в.в. X та Y незалежні, то

$$\mathsf{D}(X \pm Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y.$$

Задача

Розглянемо три в.в. X, Y *та* Z, *які мають однакову дисперсію* $\sigma^2 = 4$. *Припустимо, що* X *не залежить від* Y *та* Z, *але в.в.* Y *й* Z – *корельовані, зокрема, з коефіцієнтом кореляції* $\rho_{YZ} = 0,5$.

i) *Обчисліть коваріацію між* X *та* U, *де* $U = Y + Z$.
ii) *Обчисліть коваріацію між* Z *та* V, *де* $V = 3X - 2Y$.
iii) *Обчисліть дисперсію в.в.* $W = 3X - 2Y + Z$.

Незалежні в.в.

В.в. $X_1, \dots, X_n$ *незалежні в сукупності*, якщо всі породжені ними випадкові події незалежні в сукупності, тобто для довільних $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in B_k).$$

Зокрема, в.в. $X_1, \dots, X_n$ незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли відповідна сумісна функція розподілу для всіх $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ розкладається у добуток

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)$$
$$= \prod_{k=1}^{n} P(X_k < x_k) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k).$$

Дискретні в.в. $X_1, \ldots, X_n$ будуть незалежними в сукупності тоді й лише тоді, коли

$$\mathsf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k = x_k)$$

для всіх можливих значень $(x_1, \ldots, x_n)$.
Коли випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$, то абсолютно неперервні в.в. $X_1, \ldots, X_n$ незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k).$$

Має місце наступна теорема про перетворення незалежних в.в.

Теорема

Нехай в.в. $X_1, \ldots, X_n$ незалежні в сукупності, а $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ – борелівські. Тоді в.в. $g(X_1), \ldots, g(X_n)$ незалежні в сукупності.

Доведення.

Для довільних множин $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $1 \le k \le n$ розглянемо

$$\mathsf{P}(g_1(X_1) \in B_1, \ldots, g_n(X_n) \in B_n)$$

$$= \mathsf{P}(X_1 \in g_1^{-1}(B_1), \ldots, X_n \in g_n^{-1}(B_n)) \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k \in g_1^{-1}(B_k))$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(g(X_k) \in B_k).$$

Розподіл суми незалежних в.в.

Невід'ємні цілочисельні в.в.

Якщо X та Y – незалежні невід'ємні цілочисельні в.в. з розподілами

$$p_k = \mathrm{P}(X = k), \quad q_k = \mathrm{P}(Y = k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

та генератрисами $G_X(t)$ і $G_Y(t)$ відповідно, то сума $X + Y$ має розподіл

$$\mathrm{P}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j},$$

та генератрису

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t).$$

Аболютно неперервні в.в.

Теорема

Якщо X та Y – незалежні в.в. із ф-ми розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$, щільностями $f_X(x)$ і $f_Y(x)$ та генератрисами моментів $M_X(t)$ і $M_Y(t)$ відповідно, то сума $X+Y$ має ф-ю розподілу

$$F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y)\,dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y)\,dF_X(y),$$

яку називають згорткою функцій розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$ і позначають $F_X * F_Y(x) = F_{X+Y}(x)$;

Аболютно неперервні в.в.

Теорема

Якщо X *та* Y *– незалежні в.в. із ф-ми розподілу* $F_X(x)$ *і* $F_Y(x)$, *щільностями* $f_X(x)$ *і* $f_Y(x)$ *та генератрисами моментів* $M_X(t)$ *і* $M_Y(t)$ *відповідно, то сума* $X+Y$ *має ф-ю розподілу*

$$F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y)dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y)dF_X(y),$$

яку називають згорткою функцій розподілу $F_X(x)$ *і* $F_Y(x)$ *і позначають* $F_X * F_Y(x) = F_{X+Y}(x)$*;щільність, яка дорівнює згортці щільностей* $f_X(x)$ *і* $f_Y(x)$, *тобто*

$$f_X * f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x-y)f_X(y)dy,$$

та генератрису моментів

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t).$$

Доведення.

Оскільки в.в. X та Y незалежні, то $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.

$$\mathrm{P}(X + Y < a) = \iint\limits_{\{(x,y):\ x+y<a\}} \mathrm{d}F_{X,Y}(x,y)$$

$$= \iint\limits_{\{(x,y):\ x+y<a\}} \mathrm{d}F_X(x)\mathrm{d}F_Y(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{(x,y):\ x+y<a\}}\mathrm{d}F_X(x)\mathrm{d}F_Y(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{x:\, x<a-y\}} \mathrm{d}F_X(x) \mathrm{d}F_Y(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{E}\, \mathbb{I}_{X \in \{x:\, x<a-y\}} \mathrm{d}F_Y(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) \mathrm{d}F_Y(y) = F_X * F_Y(a).$$

Далі, використовуючи заміну $x = u - y$, маємо

$$F_X * F_Y(a) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) \mathrm{d}F_Y(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) f_Y(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{(x,y):\, x+y<a\}} f_X(x) f_Y(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{u:\, u<a\}} f_X(u-y) f_Y(y) \mathrm{d}u\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-y) f_Y(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{a} f_X * f_Y(u) \mathrm{d}u.$$

Нарешті,

$$M_{X+Y}(t) = \mathsf{E}e^{t(X+Y)}$$

$$= \mathsf{E}e^{tX}e^{tY} = \mathsf{E}e^{tX}\mathsf{E}e^{tY}$$

$$= M_X(t)M_Y(t).$$

Умовні розподіли та щільності

Розподіл X для певного значення Y називають *умовним розподілом X при заданому $Y = y$*.

Дискретні в.в.

Умовний розподіл X при заданому $Y = y$ для дискретних в.в. X та Y дорівнює

$$p_{X|Y=y}(x|y) = \mathrm{P}(X = x|Y = y)$$

$$= \frac{\mathrm{P}(X = x, Y = y)}{\mathrm{P}(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

$p_{X,Y}(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$ – сумісний розподіл в.в. X та Y.
Умовний розподіл $p_{X|Y=y}(x|y)$ визначають лише для тих значень y, для яких розподіл $p_Y(y) = \mathrm{P}(Y = y) > 0$.

Абсолютно неперервні в.в.

Припустимо, що пара (X, Y) має сумісну щільність $f_{X,Y}$. Розглянемо умовну ймовірність події $X \leq x$ за умови $y < Y \leq y + h$, $h > 0$:

$$\mathrm{P}(X < x | y < Y \leq y + h) = \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+h} f_{X,Y}(u, v) \mathrm{d}v \mathrm{d}u}{\int_{y}^{y+h} f_Y(v) \mathrm{d}v}.$$

Абсолютно неперервні в.в.

Припустимо, що пара (X, Y) має сумісну щільність $f_{X,Y}$. Розглянемо умовну ймовірність події $X \le x$ за умови $y < Y \le y + h$, $h > 0$:

$$\mathrm{P}(X < x | y < Y \le y + h) = \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+h} f_{X,Y}(u, v) \mathrm{d}v \mathrm{d}u}{\int_{y}^{y+h} f_Y(v) \mathrm{d}v}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на h. Тоді при $h \to 0$ отримуємо *умовну функцію розподілу* в.в. X при заданому $Y = y$

$$F_{X|Y=y}(x|y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u, y) \mathrm{d}u.$$

Відповідна *умовна щільність* в.в. X при заданому $Y = y$ дорівнює

$$f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}. \tag{2}$$

Ці умовні функції розподілу визначають лише для тих значень y, для яких $f_Y(y) > 0$.

Умовне математичне сподівання

Умовне математичне сподівання в.в. X за умови, що $Y = y$ визначають, як

$$\mathsf{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y=y}(x|y)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x,$$

за припущення, що інтеграл у правій частині абс. збіжний.

Умовне математичне сподівання

Умовне математичне сподівання в.в. X за умови, що $Y = y$ визначають, як

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y=y}(x|y)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x,$$

за припущення, що інтеграл у правій частині абс. збіжний.

Якщо розглядати y як змінну величину, то права частина є функцією від y. Зокрема, ототожнюючи y із в.в. Y, отримаємо в.в., яку називають *регресією* X *на* Y та позначають

$$\mathrm{E}(X|Y).$$

Ця в.в. є функцією лише однієї змінної Y (не X)!

Для довільної борелівської функції $h(x, y)$ можна отримати більш загальне визначення, замінивши в.в. X на $h(X, Y)$:

$$\mathsf{E}(h(X, Y)|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) f_{X|Y=y}(x|y)\mathrm{d}x.$$

Аналогічно, умовне математичне сподівання $\mathsf{E}(h(X, Y)|Y)$ можна розглядати як в.в., яка є функцією від Y.

Для довільної борелівської функції $h(x, y)$ можна отримати більш загальне визначення, замінивши в.в. X на $h(X, Y)$:

$$\mathsf{E}(h(X, Y)|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) f_{X|Y=y}(x|y)\mathrm{d}x.$$

Аналогічно, умовне математичне сподівання $\mathsf{E}(h(X, Y)|Y)$ можна розглядати як в.в., яка є функцією від Y.

Якщо вибрати $h(X, Y) = (X - \mathsf{E}(X|Y))^2$, тоді математичне сподівання цієї функції за умовного розподілу X при заданому Y є дисперсією відповідного умовного розподілу:

$$\mathsf{D}(X|Y) = \mathsf{E}\left((X - \mathsf{E}(X|Y))^2 \middle| Y\right) = \mathsf{E}(X^2|Y) - (\mathsf{E}(X|Y))^2.$$

Очевидно, що вона також є функцією від Y.

Теорема (Формула повного математичного сподівання)

$$EX = E(E(X|Y)), \tag{3}$$

тобто математичне сподівання від умовного математичного сподівання X при даному Y дорівнює математичному сподіванню X.

Теорема (Формула повного математичного сподівання)

$$EX = E(E(X|Y)), \tag{3}$$

тобто математичне сподівання від умовного математичного сподівання X при даному Y дорівнює математичному сподіванню X.

Доведення.

I) Нехай X та Y – дискретні в.в. Тоді

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X|Y)\right) = \sum_y \mathrm{E}(X|Y=y)\mathrm{P}(Y=y)$$

$$= \sum_y \left(\sum_x x\mathrm{P}(X=x|Y=y) \right) \mathrm{P}(Y=y)$$

$$= \sum_y \sum_x x\mathrm{P}(X = x, Y = y) = \sum_y \sum_x x\mathrm{P}(X = x | Y = y)\mathrm{P}(Y = y)$$

$$= \sum_x x \sum_y \mathrm{P}(X = x, Y = y) = \sum_x x\mathrm{P}(X = x) = \mathrm{E}(X).$$

$$= \sum_y \sum_x x\mathsf{P}(X = x, Y = y) = \sum_y \sum_x x\mathsf{P}(X = x|Y = y)\mathsf{P}(Y = y)$$

$$= \sum_x x \sum_y \mathsf{P}(X = x, Y = y) = \sum_x x\mathsf{P}(X = x) = \mathsf{E}(X).$$

II) Нехай X та Y – абсолютно неперервні в.в. Оскільки

$$\mathsf{E}(X|Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x,$$

то $\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(X|Y)\right) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{E}(X|Y = y) f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \mathsf{E}(X).
\end{aligned}
$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \mathsf{E}(X).$$

Теорема (Формула повної дисперсії)

$$DX = E(D(X|Y)) + D(E(X|Y)). \tag{4}$$

Доведення.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{D}X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2 &= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(X^2|Y)\right) - \left(\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(X|Y)\right)\right)^2 \\
&= \mathsf{E}\left(\mathsf{D}(X|Y) + (\mathsf{E}(X|Y))^2\right) - \left(\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(X|Y)\right)\right)^2 \\
&= \mathsf{E}\left(\mathsf{D}(X|Y)\right) + \left(\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|Y))^2 - \left(\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(X|Y)\right)\right)^2\right) \\
&= \mathsf{E}(\mathsf{D}(X|Y)) + \mathsf{D}(\mathsf{E}(X|Y)).
\end{aligned}
$$

$\square$

Ймовірнісні нерівності

Лема (Загальна нерівність Чебишова)

Нехай g *– додатна неспадна функція, а в.в.* $X \geq 0$. *Тоді для довільної сталої* $c > 0$

$$P(X \geq c) \leq \frac{Eg(X)}{g(c)}.$$

Ймовірнісні нерівності

Лема (Загальна нерівність Чебишова)

Нехай g *– додатна неспадна функція, а в.в.* $X \geq 0$*. Тоді для довільної сталої* $c > 0$

$$P(X \geq c) \leq \frac{Eg(X)}{g(c)}.$$

Доведення.

З невід'ємності та монотонності g випливає нерівність $g(X) \geq g(c)\mathbb{I}_{X \geq c}$. Тоді за монотонністю математичного сподівання

$$\mathrm{E}g(X) \geq \mathrm{E}g(c)\mathbb{I}_{X \geq c} = g(c)\mathrm{P}(X \geq c).$$

Наслідок (Нерівність Чебишова для дисперсій)

Якщо існує DX, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \tag{5}$$

Наслідок (Нерівність Чебишова для дисперсій)

Якщо існує DX, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \tag{5}$$

Доведення.

Із загальної нерівності Чебишова для невід'ємної в.в. $(X - \mathrm{E}X)^2$ та функції $g(X) = X$ отримуємо

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon) = \mathrm{P}((X - \mathrm{E}X)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{D}X}{\varepsilon^2}.$$

$\square$

Лема (Нерівність Дженсена)

Нехай функція $g(x)$ опукла донизу, а в.в. X та $g(X)$ інтегровні.

$$g(EX) \le Eg(X). \tag{6}$$

Лема (Нерівність Дженсена)

Нехай функція $g(x)$ опукла донизу, а в.в. X та $g(X)$ інтегровні.

$$g(EX) \leq Eg(X). \tag{6}$$

Доведення.

Для довільної опуклої донизу ф-ї g у кожній точці x існує опорна пряма, графік якої повністю лежить під графіком g:

$$g(x) \geq g(x_0) + k(x_0)(x - x_0), \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}.$$

Підставимо у цю нерівність $x = X$, $x_0 = \mathrm{E}X$:

$$\mathrm{E}g(X) \geq \mathrm{E}(g(\mathrm{E}X)) + k(\mathrm{E}X)(X - \mathrm{E}X)$$

$$= g(\mathrm{E}X) + k(\mathrm{E}X)\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X) = g(\mathrm{E}X).$$

Наслідок (Нерівність Ляпунова)

Якщо $1 \leq a \leq b$ *та* $E|X|^b < \infty$, *то*

$$(E|X|^a)^{\frac{1}{a}} \leq (E|X|^b)^{\frac{1}{b}}. \tag{7}$$

Наслідок (Нерівність Ляпунова)

Якщо $1 \le a \le b$ *та* $E|X|^b < \infty$, *то*

$$(E|X|^a)^{\frac{1}{a}} \le (E|X|^b)^{\frac{1}{b}}. \tag{7}$$

Доведення.

Оскільки функція $g(x) = x^{\frac{b}{a}}, x \ge 0$, опукла донизу, то (7) випливає з нерівності Дженсена (6):

$$(\mathrm{E}|X|^a)^{\frac{b}{a}} = g(\mathrm{E}|X|^a) \le \mathrm{E}g(|X|^a) = \mathrm{E}|X|^b.$$

□

Лема (Нерівність Гельдера)

Якщо числа $p, q > 0$ *спряжені, тобто* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *то*

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} (E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Лема (Нерівність Гельдера)

Якщо числа $p, q > 0$ *спряжені, тобто* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *то*

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} (E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Доведення.

Підставимо в елементарну нерівність

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

вирази $x = \frac{|X|}{(\mathrm{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}}$ та $y = \frac{|Y|}{(\mathrm{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}}$:

$$\frac{|XY|}{(\mathrm{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathrm{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\mathrm{E}|X|^p}{p\mathrm{E}|X|^p} + \frac{\mathrm{E}|Y|^q}{q\mathrm{E}|Y|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Наслідок (Нерівність Коші)

$$(EXY)^2 \leq EX^2EY^2.$$

Доведення.

Випливає з нерівності Гельдера при $p = q = 2$. $\square$

Закон великих чисел

Теорема (Закон великих чисел)

Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р.в.в. зі скінченними математичним сподіванням $EX_j = m_1$ та дисперсією $DX = \sigma^2$. Покладемо

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ має місце границя

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m_1\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \quad \text{коли} \quad n \to \infty.$$

Інакше кажучи, усереднена сума $\frac{S_n}{n}$ н.о.р.в.в. $X_1, \ldots, X_n$ із середнім $\mathrm{E}X_j = m_1$ та дисперсією $\mathrm{D}X = \sigma^2$ збігається за ймовірністю до m_1.

Доведення.

Скористаємося нерівністю Чебишова (5):

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m_1\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m_1)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\mathsf{D}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{D}X_j$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

а цей вираз прямує до нуля, коли $n \to \infty$. □

Доведення також можна провести за умови, що

$$\mathsf{D}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j\Big) = o(n^2).$$

Для н.о.р. в.в. X_j, що мають розподіл Бернуллі з ймовірністю успіху θ, тобто $\mathsf{E}X_j = \theta$, закон великих чисел стверджує, що після великої кількості випробувань середнє число успіхів буде наближатися до θ.

Задача

У таблиці наведено сумісний розподіл імовірностей для двох дискретних в.в. X *та* Y*:*

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 1$	*0,15*	*0,20*	*0,25*
$Y = 2$	*0,05*	*0,15*	*0,20*

Обчисліть $E(X|Y = 2)$.

Задача

i) *Нехай* $Y = X_1 + X_2$ *є сумою двох незалежних в.в.* X_1 *та* X_2*. Доведіть, що генератриса моментів* Y *є добутком генератрис моментів* X_1 *та* X_2*.*

ii) *Нехай* X_1 *та* X_2 *мають гамма-розподіл із параметрами* (α_1, λ) *та* (α_2, λ) *відповідно. За допомогою генератиси моментів покажіть, що* $Y = X_1 + X_2$ *також є гамма-розподіленою в.в., та вкажіть параметри розподілу.*

Задача

i) *Доведіть, що для неперервних в.в.* X *та* Y *справедливе співвідношення* $EY = E(E(Y|X))$.

ii) *Припустимо, що в.в.* X *має стандартний нормальний розподіл, а умовний розподіл пуассонівської в.в.* Y *для заданого значення* $X = x$ *має математичне сподівання* $g(x) = x^2 + 1$. *Обчисліть* EY *та* DY.

Задача

Число позовів X*, які виникають за кожним полісом із деякого класу, моделюють як пуассонівську в.в. з середнім* λ*. Нехай* $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ *є повторною випадковою вибіркою з розподілу* X*, та нехай* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

i) *За допомогою генератрис моментів покажіть, що* $\sum_{i=1}^{n} X_i$ *має розподіл Пуассона з середнім* $n\lambda$.

ii) *Скажіть, коротко аргументувавши, буде чи ні в.в.* $2X_1 + 5$ *мати розподіл Пуассона.*

iii) *Скажіть, коротко аргументувавши, буде чи ні в.в.* $\bar{X}$ *мати розподіл Пуассона у разі, коли* $n = 2$.

iv) *Яким буде асимптотичний розподіл* $\bar{X}$*, коли* n *велике?*

Суміші розподілів

Нехай заданий умовний розподіл в.в. X при заданому значенні в.в. $Y = y$. Функцію розподілу

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|Y=y}(x|y)\mathrm{d}F_Y(y) \tag{8}$$

будемо називати *сумішшю функції розподілу* $F_{X|Y=y}(x|y)$ *по* y *відносно розподілу* $F_Y(y)$.

У разі, коли існують відповідні щільності в.в. X та Y, функцію

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x|y)f_Y(y)\mathrm{d}y \tag{9}$$

будемо називати *сумішшю щільності розподілу* $f_{X|Y=y}(x|y)$ *по* y *відносно щільності* $f_Y(y)$.

Суміші пуассонівських розподілів

Якщо $F_{X|Y=y}(x|y)$ – розподіл Пуассона з параметром y, то розподіл $F_X(x)$ називають *змішаним пуассонівським*. Якщо $F_Y(y)$ – розподіл Пуассона, то розподіл $F_X(x)$ називають *пуассонівськи-змішаним*.

Суміші пуассонівських розподілів

Якщо $F_{X|Y=y}(x|y)$ – розподіл Пуассона з параметром y, то розподіл $F_X(x)$ називають *змішаним пуассонівським*. Якщо $F_Y(y)$ – розподіл Пуассона, то розподіл $F_X(x)$ називають *пуассонівськи-змішаним*.

Задача

Припустимо, що в (8) $F_{X|Y=y}(x|y)$ – розподіл Пуассона з параметром λy, $\lambda > 0$ – деяка стала, а $F_Y(y)$ – функція розподілу Пуассона з параметром μ. Знайти розподіл в.в. X.

Розв'язок

Очевидно, для $k = 0, 1, 2, \ldots$ розподіл X має наступний вигляд:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = k) &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda j} \frac{\lambda j^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^j}{j!} = e^{-\mu} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} (\mu e^{-\lambda})^j \frac{j^k}{j!} \\
&= e^{-\mu + \mu e^{-\lambda}} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} j^k e^{-\mu e^{-\lambda}} \frac{(\mu e^{-\lambda})^j}{j!} \\
&= e^{-\mu + \mu e^{-\lambda}} \frac{\lambda^k m_k(\mu e^{-\lambda})}{k!},
\end{aligned}
$$

де $m_k(\lambda)$ – k-ий момент розподілу Пуассона з параметром $\lambda > 0$. Отриманий закон відомий, як розподіл Неймана типу А.

Задача

Припустимо, що в (8) $F_{X|Y=y}(x|y)$ *– гамма-розподіл з параметрами* y *та* $\alpha > 0$*, тобто зі щільністю*

$$f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{y^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-yx}, \quad x > 0.$$

Знайти пуассонівськи-змішаний розподіл в.в. X*.*

Розв'язок

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{y^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-yx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\
&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} y^\alpha e^{-yx} \frac{\lambda^y}{y!} \\
&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda+\lambda e^{-x}} \sum_{y=0}^{\infty} y^\alpha e^{-\lambda e^{-x}} \frac{(\lambda e^{-x})^y}{y!} \\
&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\{-\lambda + \lambda e^{-x}\} m_\alpha(\lambda e^{-x}),
\end{aligned}$$

де $m_\alpha(\lambda)$ – α-ий момент р-лу Пуассона з параметром $\lambda > 0$.

При $\alpha = 1$ $f_{X|Y=y}(x|y)$ є щільністю експоненційного розподілу з параметром y, а отримана функція є щільністю розподілу Ґумбеля (розподілу екстремальних значень типу III):

$$f_X(x) = \lambda \exp\{\lambda - x + e^{-x}\},\ x > 0.$$

При $\alpha = 1$ $f_{X|Y=y}(x|y)$ є щільністю експоненційного розподілу з параметром y, а отримана функція є щільністю розподілу Ґумбеля (розподілу екстремальних значень типу III):

$$f_X(x) = \lambda \exp\{\lambda - x + e^{-x}\},\ x > 0.$$

Нехай

$$F_{X|Y=y}(x|y) = G^{*y}(x)$$

для деякої функції розподілу $G(x)$, де $G^{*k}(x)$ – k-кратна згортка функції $G(x)$ з собою:

$$G^{*k}(x) = G * G^{k-1}(x),\ k \geq 0,$$

$G^{*0}(x)$ – функція розподілу з одиничним стрибком в нулі. Тоді співвідношення (8) набуває вигляду

$$F_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} G^{*k}(x). \tag{10}$$

Розподіли вигляду (10) називають *узагальненими пуассонівськими*. Прикладом узагальненого пуассонівського розподілу є складний пуассонівський розподіл.

Розподіл Парето як суміш експоненційних розподілів

Припустимо, що кожен окремий поліс із великого страхового портфеля призводить до збитків, які розподілені за експоненційним законом, який є одним із найпростіших для моделювання збитків. Зрозуміло, що у більшості страхових портфелів середнє значення збитків є різним для різних застрахованих осіб. Тобто модель портфелю передбачає, що для кожного окремого поліса збитки розподілені за експоненційним законом зі своїм значенням параметра λ.

Розподіл Парето як суміш експоненційних розподілів

Припустимо, що кожен окремий поліс із великого страхового портфеля призводить до збитків, які розподілені за експоненційним законом, який є одним із найпростіших для моделювання збитків. Зрозуміло, що у більшості страхових портфелів середнє значення збитків є різним для різних застрахованих осіб. Тобто модель портфелю передбачає, що для кожного окремого поліса збитки розподілені за експоненційним законом зі своїм значенням параметра λ.

Як адекватний підхід до відображення мінливості у середніх значеннях збитків виступає припущення, що значення параметра λ експоненційних розподілів у межах портфелю самі є реалізацією деякої в.в.

Припустимо, що мінливість параметра λ можна зобразити за допомогою гамма-розподілу з параметрами α та δ і, відповідно, щільністю

$$f_\lambda(\nu) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \nu^{\alpha-1} e^{-\delta\nu}, \quad \nu > 0.$$

У такій задачі моделювання величини збитків X для всього портфелю гамма-розподіл використовують для усереднення експоненційних розподілів, трактуючи його як "змішувальний", а одержаний розподіл збитків як суміш розподілів.

Маргінальну щільність розподілу X можна отримати через сумісну та умовну щільності в.в. X та λ:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f_{X,\lambda}(x,\nu)\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty f_\lambda(\nu) f_{X|\lambda=\nu}(x|\nu)\mathrm{d}\nu \\ &= \int_0^\infty \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\nu^{\alpha-1}e^{-\delta\nu}\nu e^{-\nu x}\mathrm{d}\nu = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \nu^\alpha e^{-(\delta+x)\nu}\mathrm{d}\nu \\ &= \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\delta+x)^{\alpha+1}} = \frac{\alpha\delta^\alpha}{(\delta+x)^{\alpha+1}},\ x>0, \end{aligned}$$

у якій можна впізнати щільність розподілу Парето з параметрами α та δ.

Узагальнений розподіл Парето як суміш розподілів Ерланґа

Коли збитки мають експоненційний розподіл з параметром λ, який, у свою чергу, є гамма-розподіленою в.в. з параметрами α, δ, маргінальний розподіл величини збитків є розподілом Парето.

Цей результат можна узагальнити, припустивши, що збитки мають розподіл Ерланґа (гамма-розподіл з параметрами k та λ, коли k – ціле), а λ має гамма-розподіл з параметрами α та δ. Випадок $k = 1$ зводиться до розглянутого вище.

Для довільного k маргінальна щільність величини збитків X дорівнює

$$f_X(x) \;=\; \int_0^\infty f_{X,\lambda}(x,\nu)\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty f_\lambda(\nu) f_{X|\lambda=\nu}(x|\nu)\mathrm{d}\nu$$

Для довільного k маргінальна щільність величини збитків X дорівнює

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty f_{X,\lambda}(x,\nu)\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty f_\lambda(\nu) f_{X|\lambda=\nu}(x|\nu)\mathrm{d}\nu \\
&= \int_0^\infty \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\nu^{\alpha-1}e^{-\delta\nu}\frac{\nu^k}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-\nu x}\mathrm{d}\nu \\
&= \frac{\delta^\alpha x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)}\int_0^\infty \nu^{\alpha+k-1}e^{-(\delta+x)\nu}e^{-\nu x}\mathrm{d}\nu \\
&= \frac{\delta^\alpha\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)}\frac{x^{k-1}}{(\delta+x)^{\alpha+k}}, \quad x>0.
\end{aligned}
$$

Отримана функція є щільністю *узагальненого розподілу Парето*.

Задача

Розглянемо дві в.в. X *та* Y *із сумісною щільністю розподілу* $f_{X,Y}(x,y) = \frac{4}{3}(1-xy)$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

i) *Визначити маргінальні щільності розподілів* X *та* Y.

ii) *Показати, що умовна щільність* Y *за умови* $X = x$ *дорівнює* $f_{Y|X=x}(y|x) = 2\frac{1-xy}{2-x}$, $0 < y < 1$.

iii) (a) *Обчисліть умовне математичне сподівання* $E(Y|X=x)$ *як функцію від* x *та звідси отримайте* EY.

(b) *Перевірте відповідь в (a), обчисливши* EY *безпосередньо через маргінальну щільність розподілу* Y.

Задача

Кількість позовів X*, які виникають за кожним полісом із деякого портфелю, залежить від іншої в.в.* Y*. Припускають, що* X *має розподіл Пуассона з середнім* Y*. Також вважають, що сама в.в.* Y *має гамма-розподіл із параметрами* (a, b)*. Знайдіть вирази для безумовних моментів* EX *та* EX^2*, використовуючи відповідні умовні моменти.*

Задача

В.в. X має розподіл Пуассона з середнім Y, де Y сама є в.в. Розподіл Y є логнормальним з параметрами μ та σ^2. Отримайте вирази для безумовного математичного сподівання EX та дисперсії DX, використовуючи відповідні умовні моменти.

Задача

В.в. X *та* Y *пов'язані таким чином: в.в.* X *за умови* $Y = y$ *має нормальний розподіл* $N(2y, y^2)$. Y *є нормально розподіленою* $N(200, 100)$ *в.в. Обчисліть безумовну дисперсію* DX.