

Математичні моделі процесів ризику

Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка

4 жовтня 2016 р.

1 Лекція 1

- Вступ
- Основні поняття теорії ймовірностей
 - Стохастичні ситуації та їх математичні моделі
 - Незалежні події. Умовні ймовірності
 - Формула повної ймовірності. Формула Баєса
- Випадкові величини та їх розподіли
 - Дискретні випадкові величини
 - Моменти випадкових величин
- Генератриса
 - Генератриса розподілу
 - Генератриса моментів
 - Генератриса кумулянт
- Основні типи розподілів індивідуальних позовів та кількості позовів
 - Дискретні розподіли
 - Розподіли абсолютно неперервних в.в.

У 1903 році шведський актуарій Філіп Лундберг заклав основи сучасної теорії ризику.

Теорія ризику є синонімом математики загального страхування (зазвичай, страхування життя розглядають окремо), яка вивчає моделі позовів, які виникають у страховому бізнесі, і дає поради щодо того, якого розміру мають бути встановлені премії, щоб уникнути банкрутства страхової компанії.

Базі поняття: ризик, індивідуальний позов, кількість позовів, сумарні позови, імовірність банкрутства, розмір страхової премії.

Стохастичні ситуації та їх математичні моделі

Адекватності математичної моделі реальної ситуації!

Властивості чи умови стохастичної ситуації:

- **непередбачуваність:** результат ситуації неможливо наперед передбачити з абсолютною точністю;
- **відтворюваність:** є принаймні теоретична можливість відтворити розглянуту ситуацію як завгодно багато разів за незмінних умов;
- **стійкість частот:** якою б не була подія, що нас цікавить, під час багатократного відтворювання ситуації частота події (тобто відношення кількості випадків, коли спостерігали дану подію, до загальної кількості відтворювань ситуації) коливається біля деякого числа і наближається до нього все ближче і ближче при збільшенні кількості відтворювань ситуації.

Нехай Ω – непорожня множина, елементи якого позначають ω . Будемо ототожнювати елементи Ω з можливими елементарними, тобто неподільними, наслідками деякої стохастичної ситуації. Ω називають *множиною елементарних подій*.

Нехай \mathcal{F} – множина підмножин множини Ω , яка має такі властивості:

- i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- ii) якщо $B \in \mathcal{F}$, то і $\bar{B} \in \mathcal{F}$, де \bar{B} – доповнення до множини B ;
- iii) якщо $B_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}.$$

Множину \mathcal{F} називають *σ -алгеброю подій*, а її елементи (які є підмножинами множини Ω) називають *подіями*.

Міру, тобто σ -адитивну функцію множин, P , визначену на \mathcal{F} і нормовану умовою $P(\Omega) = 1$, називають *ймовірнісною мірою* або *ймовірністю*.

σ -адитивність: якщо A_1, A_2, \dots – несумісні події, тобто $A_i \in \mathcal{F}$ та $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Для $A \in \mathcal{F}$ значення $P(A)$ називають *ймовірністю події A* .

Трійку (Ω, \mathcal{F}, P) називають *ймовірнісним простором* або *ймовірнісною моделлю*.

Незалежні події. Умовні ймовірності

Події A та B називають *незалежними*, якщо

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Нехай $P(B) \neq 0$. *Умовна ймовірність* події A за умови B

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B).$$

Якщо A та B незалежні, то

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Події A_1, A_2, \dots, A_n *взаємно незалежні* або *незалежними у сукупності*, якщо $\forall m \leq n$ та $\forall i_1, \dots, i_m$ ($i_p \neq i_q$ при $p \neq q$ та $1 \leq i_p \leq n, p = 1, \dots, m$)

$$P\left(\bigcap_{p=1}^m A_{i_p}\right) = \prod_{p=1}^m P(A_{i_p}).$$

Розглянемо події H_1, H_2, \dots, H_n ($n \geq 2$):

- а) події H_1, H_2, \dots, H_n несумісні, тобто жодні дві з них не можуть здійснитися одночасно;
- б) одна з подій H_1, H_2, \dots, H_n обов'язково відбудеться, тобто $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, причому $P(H_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Якщо події H_1, H_2, \dots, H_n мають властивості а) та б), то кажуть, що вони утворюють *повну групу подій*.

Формула повної ймовірності

Лема (Формула повної ймовірності)

Нехай A – деяка подія, а події H_1, H_2, \dots, H_n утворюють повну групу. Тоді має місце рівність

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|H_k)P(H_k). \quad (1)$$

Доведення.

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap H_k) = \sum_{k=1}^n \frac{P(A \cap H_k)}{P(H_k)} P(H_k) = \sum_{k=1}^n P(A|H_k)P(H_k).$$



Формула Баєса

Теорема (Формула Баєса)

Нехай A – деяка подія, яка має додатну ймовірність, $P(A) > 0$, а події H_1, H_2, \dots, H_n утворюють повну групу. Тоді

$$P(H_k|A) = P(A|H_k)P(H_k) / \sum_{k=1}^n P(A|H_k)P(H_k). \quad (2)$$

Доведення.

$$P(H_k|A) = P(A \cap H_k) / P(A), \quad P(A \cap H_k) = P(A|H_k)P(H_k)$$

та формула повної ймовірності (1). □

$P(H_k)$ - апіорні ймовірності, $P(H_k|A)$ – апостеріорні.

Дискретні та абсолютно неперервні випадкові величини

Розглянемо події B_1, B_2, \dots , такі, що $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ та $\bigcup_j B_j = \Omega$. Нехай $\{x_1, x_2, \dots\}$ – дійсні числа. Випадкову величину

$$X(\omega) = \sum_j x_j \mathbb{I}_{B_j}(\omega)$$

називають *дискретною*. При цьому $B_j = \{\omega : X(\omega) = x_j\}$.

Позначимо $p_i = P(B_i)$. Набір $\{(x_i, p_i)\}_{i \geq 1}$ називають *законом розподілу ймовірностей* чи просто *розподілом* дискретної в.в. X .

Функція розподілу

Розглянемо ймовірність $P(X \in A)$ у випадку, коли множина A є нескінченним інтервалом вигляду $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Покладемо

$$F_X(x) = P(X < x).$$

Функція $F(x)$ визначена для кожного дійсного x . Її називають *функцією розподілу* в.в. X .

Функція розподілу $F(x)$ будь-якої в.в. має такі властивості:

- $F(x)$ монотонно зростаюча і неперервна зліва;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Обернене твердження також істинне: для довільної функції $F(x)$, яка задовольняє ці три умови, існують ймовірнісний простір і задана на ньому в.в. така, що $F(x)$ є її функцією розподілу.

Абсолютно неперервні випадкові величини

В.в. X та її функція розподілу F_X абсолютно неперервні, якщо $\forall x \in \mathbb{R}$ існує $f_X(x) \geq 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy.$$

$f_X(x)$ називають щільністю розподілу в.в. X та функції розподілу F_X .

Властивості щільності:

- невід'ємність: $f_X(x) \geq 0$;
- нормованість: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) dy = 1$.

Якщо функція розподілу диференційовна, то

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Моменти випадкових величин

Математичним сподіванням EX в.в. X є її інтеграл Лебега:

$$EX = \int_{\Omega} X dP.$$

EX існує тоді і лише тоді, коли існує $E|X|$. Тоді в.в. X називають *інтегрованою*.

Має місце рівність

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x),$$

у правій частині якого стоїть інтеграл Стільтєса. Якщо в.в. X абсолютно неперервна і має щільність $f_X(x)$, то

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Якщо X – дискретна в.в. з розподілом $\{(x_i, p_i)\}_{i \geq 1}$, то

$$EX = \sum_{i \geq 1} p_i x_i \quad \left(= \sum_{i \geq 1} x_i P(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega) \right).$$

Нехай $g(x)$ – борелівська функція, т.б. дійсна функція, визначена на \mathbb{R} так, що для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множина $\{x: g(x) < a\}$ є борелівською. Тоді

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x).$$

Якщо в.в. X та Y незалежні, то

$$EXY = EX \cdot EY.$$

Математичне сподівання в.в. X^k називають *моментом порядку k* чи *k -м моментом* в.в. X :

$$m_k = EX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF_X(x).$$

Центральний момент порядку k в.в. X визначають рівністю:

$$\mu_k = E(X - EX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k dF_X(x).$$

Особливу роль відіграє другий центральний момент μ_2 , який називають *дисперсією* в.в. X :

$$DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2.$$

Величину $\sigma_X = \sqrt{DX}$ називають *середньоквадратичним* або *стандартним відхилом* в.в. X .

Генератриса розподілу

Нехай X – цілочисельна невід'ємна в.в. з розподілом

$$P(X = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Генератрисою $G_X(t)$ розподілу в.в. X називають ряд

$$G_X(t) = Et^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad |t| \leq 1.$$

Степеневий ряд однозначно визначений своїми коефіцієнтами, тому зв'язок між розподілами і відповідними генератрисами взаємно однозначний. Розподіл імовірностей відновлюють за генератрисою:

$$p_k = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, \dots$$

Зокрема, $G_X(0) = P(X = 0)$. Також $G_X(1) = p_0 + p_1 + \dots = 1$.

Генератрису $G_X(t)$ можна використовувати для простого знаходження моментів нижчих порядків. Розвинемо функцію t^X у ряд Тейлора в околі точки 1:

$$t^X = 1 + X(t-1) + X(X-1)\frac{(t-1)^2}{2!} + X(X-1)(X-2)\frac{(t-1)^3}{3!} + \dots$$

Тоді

$$G_X(t) = Et^X = 1 + (t-1)EX + \frac{(t-1)^2}{2!}EX(X-1) + \frac{(t-1)^3}{3!}EX(X-1)(X-2) + \dots$$

Диференціюючи цей вираз по t і покладаючи $t = 1$, отримуємо математичне сподівання. Подальше диференціювання дає формули для визначення моментів інших порядків.

Генератриса моментів

Генератрисою моментів $M_X(t)$ в.в. X називають функцію

$$M_X(t) = E \exp\{tX\}.$$

$M_X(t)$ визначена для всіх значень t , для яких існує EX .

Різним імовірнісним розподілам відповідають різні генератрисы моментів. Існує взаємно однозначна відповідність між генератрисами моментів та розподілами, для яких вони існують.

k -й момент в.в. X можна отримати за допомогою диференціювання $M_X(t)$ у точці 0. Для цього розвинемо у ряд Тейлора експоненційну функцію:

$$M_X(t) = 1 + tEX + \frac{t^2}{2!} EX^2 + \frac{t^3}{3!} EX^3 + \dots$$

Тоді

$$m_k = M_X^{(k)}(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Нехай цілочисельна невід'ємна в.в. X має генератрису розподілу

$$G_X(t) = Et^X.$$

Її генератрису моментів можна отримати, підставивши e^t замість t у $G_X(t)$, тобто

$$M_X(t) = G_X(e^t).$$

Генератриса кумулянт

Для багатьох в.в. знаходження математичного сподівання і дисперсії за допомогою генератриси кумулянт є простішим, ніж за допомогою генератриси моментів.

Генератрисою кумулянт $C_X(t)$ в.в. X називають функцію

$$C_X(t) = \ln M_X(t).$$

r -ю кумулянтою називають коефіцієнт $\frac{t^r}{r!}$ у розкладі в ряд Тейлора $C_X(t)$.

Коли відома $C_X(t)$, легко можна визначити $M_X(t)$:

$$M_X(t) = \exp\{C_X(t)\}.$$

Розглянемо перші дві похідні генератрис кумулянт:

$$C'_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \quad \text{та} \quad C''_X(t) = \frac{M''_X(t)M_X(t) - (M'_X(t))^2}{M_X^2(t)}.$$

Оскільки $M_X(0) = 1$, то

$$C'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = EX \quad \text{та} \quad C''_X(0) = \frac{M''_X(0)M_X(0) - (M'_X(0))^2}{M_X^2(0)} = EX^2$$

Таким чином, перші дві похідні $C_X(t)$, обчислені при $t = 0$, безпосередньо дають середнє значення та дисперсію в.в. X .

Основні типи розподілів індивідуальних позовів та кількості позовів

Розглянемо деякі спеціальні розподіли, які надалі ми будемо часто використовувати для моделювання кількості індивідуальних позовів та їх величини.

Дискретні розподіли

Розглянуті тут розподіли є моделями кількості якихось подій: числа “успіхів”, числа “випробувань”, кількості смертей, кількості вимог тощо. Будемо припускати, що значення, яких набуває в.в., є цілими числами з множини $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Рівномірний розподіл

Множина елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Всі елементарні події відбуваються з рівною ймовірністю $\frac{1}{n}$.
Визначимо в.в. X так: $X(i) = i, i = 1, 2, \dots, n$. Тоді розподіл X має вигляд

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Обчислимо моменти в.в. X :

$$m_1 = EX = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{n+1}{2};$$

$$m_2 = EX^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\mu_2 = DX = m_2 - m_1^2 = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Розподіл Бернуллі

Випробуванням Бернуллі називають стохастичну ситуацію, яка може закінчитися лише одним із двох результатів: або “успіхом” (У) або “невдачею” (Н).

Множина елементарних подій $\Omega = \{У, Н\}$. Ймовірнісна міра:

$$P(\{У\}) = \theta, \quad P(\{Н\}) = 1 - \theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

В.в. X визначимо так: $X(У) = 1$, $X(Н) = 0$. Тоді X є кількістю успіхів, що відбулися (0 чи 1).

Розподіл Бернуллі

Випробуванням Бернуллі називають стохастичну ситуацію, яка може закінчитися лише одним із двох результатів: або “успіхом” (У) або “невдачею” (Н).

Множина елементарних подій $\Omega = \{У, Н\}$. Ймовірнісна міра:

$$P(\{У\}) = \theta, \quad P(\{Н\}) = 1 - \theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

В.в. X визначимо так: $X(У) = 1$, $X(Н) = 0$. Тоді X є кількістю успіхів, що відбулися (0 чи 1).

Розподіл в.в. X :

$$P(X = k) = \theta^k (1 - \theta)^{1-k}, \quad k = 0, 1.$$

Моменти X :

$$m_1 = \theta, \quad m_2 = \theta^2, \quad \mu_2 = \theta(1 - \theta).$$

Біноміальний розподіл

Розглянемо послідовність із n випробувань Бернуллі, які

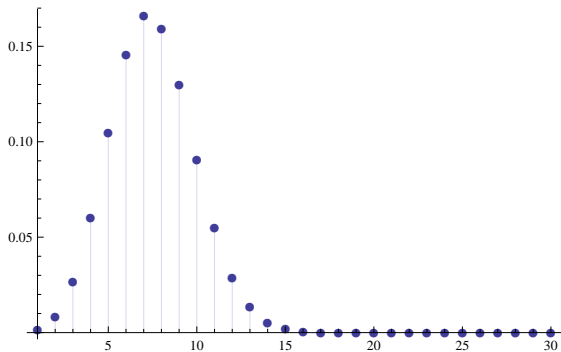
- незалежні у сукупності між собою, причому
- ймовірність успіху не залежить від номеру випробування.

Таку послідовність називають *схемою випробувань Бернуллі*.

Множина елементарних подій Ω є об'єднанням усіх можливих елементарних результатів n випробувань.

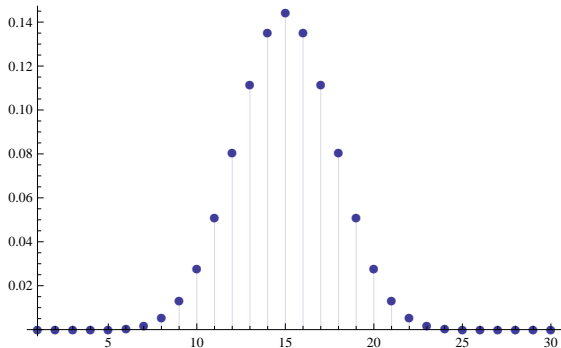
Нехай в.в. X позначає кількість успіхів з-поміж n випробувань. Тоді розподіл X такий:

$$P(X = k) = C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < \theta < 1.$$



$$n = 30, \theta = \frac{1}{4}$$

Рис. 1.1. Біноміальні розподіли



$$n = 30, \theta = \frac{1}{2}$$

Рис. 1.2. Біноміальні розподіли

Знайдемо генератриси в.в. X :

Знайдемо генератриси в.в. X :

$$G_X(t) = \mathbb{E}t^X = \sum_{k=0}^n C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k} t^k = (\theta t + 1 - \theta)^n;$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = (\theta e^t + 1 - \theta)^n;$$

$$C_X(t) = \ln M_X(t) = n \ln(\theta e^t + 1 - \theta).$$

Знаючи вигляд генератрисы розподілу $G_X(t)$, легко обчислити моменти біноміально розподіленої в.в. X :

$$G'_X(t) = n\theta(\theta t + 1 - \theta)^{n-1} \Rightarrow m_1 = G'_X(1) = n\theta;$$
$$G''_X(t) = n(n-1)\theta^2(\theta t + 1 - \theta)^{n-2} \Rightarrow$$

$$m_2 - m_1 = G''_X(1) = n(n-1)\theta^2;$$
$$m_2 = n(n-1)\theta^2 + n\theta; \quad \mu_2 = n\theta(1 - \theta).$$

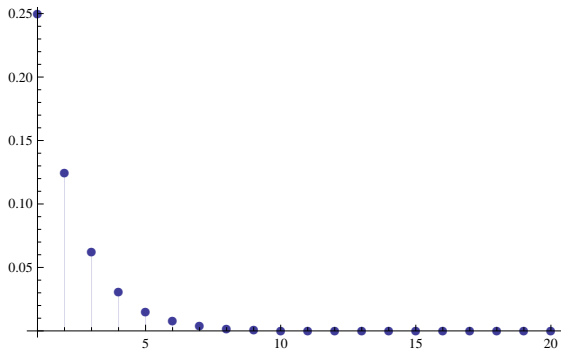
Геометричний розподіл

Знову розглянемо схему випробувань Бернуллі з $P(\{Y\}) = \theta$, $0 < \theta < 1$, яка триває до здійснення першого успіху.

Множина елементарних подій $\Omega = \{Y, NY, NNY, NNN, \dots\}$.

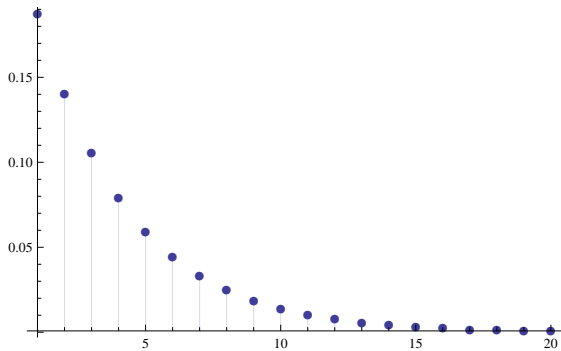
Визначимо в.в. X як номер випробування, коли відбувся успіх.
Тоді

$$P(X = k) = \theta(1 - \theta)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



$$\theta = \frac{1}{2}$$

Рис. 1.3. Геометричні розподіли



$$\theta = \frac{1}{4}$$

Рис. 1.4. Геометричні розподіли

Генератриси:

Генератриса:

$$G_X(t) = Et^X = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(1-\theta)^{k-1} t^k = \theta t \sum_{k=0}^{\infty} (1-\theta)^k t^k = \frac{\theta t}{1 - (1-\theta)t};$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = \frac{\theta e^t}{1 - (1-\theta)e^t};$$

$$C_X(t) = \ln M_X(t) = t + \ln \theta - \ln(1 - (1-\theta)e^t).$$

Моменты X :

Генератриса:

$$G_X(t) = Et^X = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(1-\theta)^{k-1} t^k = \theta t \sum_{k=0}^{\infty} (1-\theta)^k t^k = \frac{\theta t}{1 - (1-\theta)t};$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = \frac{\theta e^t}{1 - (1-\theta)e^t};$$

$$C_X(t) = \ln M_X(t) = t + \ln \theta - \ln(1 - (1-\theta)e^t).$$

Моменты X :

$$M'_X(t) = \frac{\theta e^t}{(1 - (1-\theta)e^t)^2} \Rightarrow m_1 = M'_X(0) = \frac{1}{\theta};$$

$$M''_X(t) = \frac{\theta e^t(1 + (1-\theta)e^t)}{(1 - (1-\theta)e^t)^3} \Rightarrow m_2 = \frac{2 + \theta}{\theta^2},$$

$$\mu_2 = M''_X(0) = m_2 - m_1^2 = \frac{1 - \theta}{\theta^2}$$

Розподіл Пуассона

Цей розподіл моделює кількість подій, які сталися протягом зазначеного проміжку часу, коли події відбуваються одна за одною за певним правилом. Це правило передбачає, що події здійснюються окремо, зі сталою інтенсивністю, а кількості подій, які відбулися на неперетинних проміжках часу, є незалежними між собою.

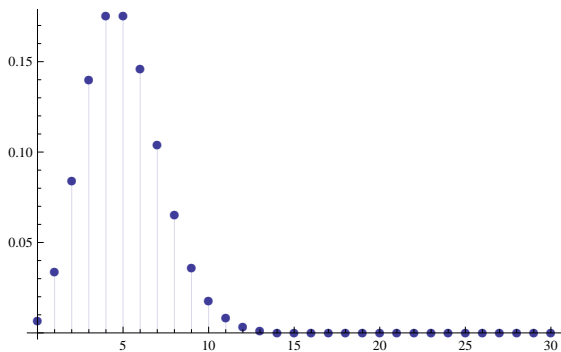
Як інший підхід до розподілу Пуассона розглянемо послідовність біноміальних розподілів з параметрами (n, θ) , коли $n \rightarrow \infty$ та $\theta \rightarrow 0$ одночасно так, що середнє значення $n\theta$ є сталим і дорівнює λ .

В.в. X має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

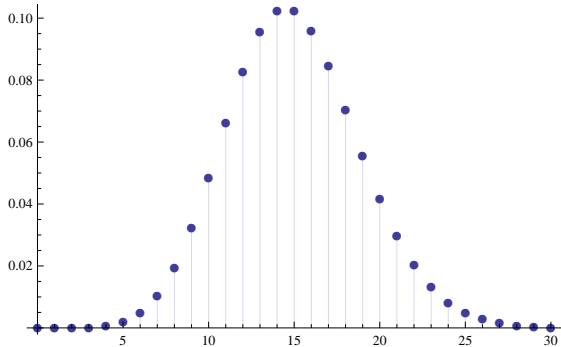
Ці ймовірності отримують з біноміальних при $n \rightarrow \infty$ та $\theta = \frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1 - \lambda/n)^n}{(1 - \lambda/n)^k}$$



$$\lambda = 5$$

Рис. 1.5. Розподіли Пуассона



$$\lambda = 15$$

Рис. 1.6. Розподіли Пуассона

Генератриси:

Генератриси:

$$G_X(t) = Et^X = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)};$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = e^{\lambda(e^t-1)}; \quad C_X(t) = \ln M_X(t) = \lambda(e^t - 1).$$

Моменти X :

Генератриса:

$$G_X(t) = Et^X = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)};$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = e^{\lambda(e^t-1)}; \quad C_X(t) = \ln M_X(t) = \lambda(e^t - 1).$$

Моменты X :

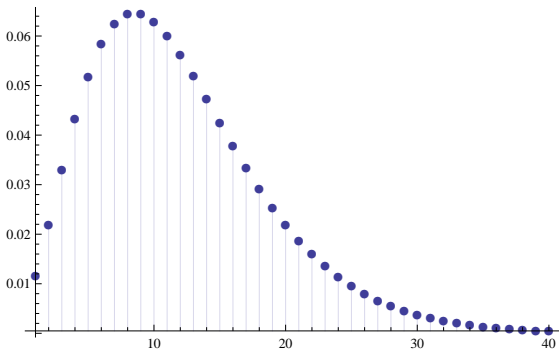
$$C'_X(t) = \lambda e^t \Rightarrow m_1 = C'_X(0) = \lambda; \quad C''_X(t) = \lambda e^t \Rightarrow \mu_2 = C''_X(0) = \lambda.$$

Від'ємний біноміальний розподіл

Цей розподіл є узагальненням геометричного. Нехай в.в. X – номер того випробування, на якому відбувся k -й успіх, де k – натуральне число. Тоді розподіл X такий:

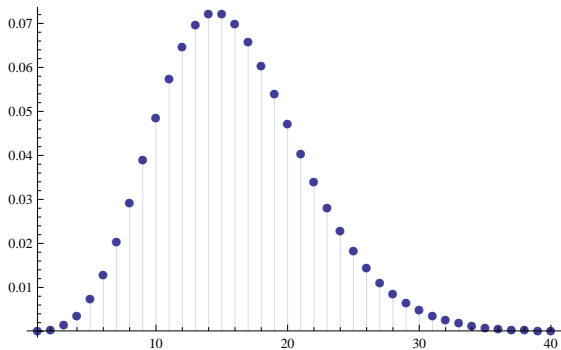
$$P(X = j) = C_{j-1}^{k-1} \theta^k (1 - \theta)^{j-k}, \quad j = k, k + 1, \dots, \quad 0 < \theta < 1.$$

Зокрема, при $k = 1$ в.в. X має геометричний розподіл.



$$k = 4, \theta = \frac{1}{4}$$

Рис. 1.7. Від'ємні біноміальні розподіли



$$k = 10, \theta = \frac{1}{2}$$

Рис. 1.8. Від'ємні біноміальні розподіли

Генератриси:

Генератрисы:

$$G_X(t) = \sum_{j=k}^{\infty} C_{j-1}^{k-1} \theta^k (1-\theta)^{j-k} t^j = (\theta t)^k \sum_{j=k}^{\infty} C_{j-1}^{k-1} (1-\theta)^{j-k} t^{j-k} = \frac{\theta^k t^k}{(1 - (1-\theta)t)^k}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\theta e^t}{1 - (1-\theta)e^t} \right)^k ; \quad C_X(t) = k(t + \ln \theta - \ln(1 - (1-\theta)e^t))$$

Моменты X :

Генератриса:

$$G_X(t) = \sum_{j=k}^{\infty} C_{j-1}^{k-1} \theta^k (1-\theta)^{j-k} t^j = (\theta t)^k \sum_{j=k}^{\infty} C_{j-1}^{k-1} (1-\theta)^{j-k} t^{j-k} = \frac{\theta^k t^k}{(1 - (1-\theta)t)^k}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\theta e^t}{1 - (1-\theta)e^t} \right)^k; \quad C_X(t) = k(t + \ln \theta - \ln(1 - (1-\theta)e^t))$$

Моменты X :

$$C'_X(t) = \frac{k}{1 - (1-\theta)e^t} \Rightarrow m_1 = C'_X(0) = \frac{k}{\theta};$$
$$C''_X(t) = \frac{k(1-\theta)e^t}{(1 - (1-\theta)e^t)^2} \Rightarrow \mu_2 = C''_X(0) = \frac{k(1-\theta)}{\theta^2}.$$

Математичне сподівання та дисперсія у k разів більші, ніж для геометрично розподіленої в.в. Це можна пояснити тим, що в.в. із від'ємно біноміальним розподілом можна подати як суму k в.в. із геометричним розподілом (кількість випробувань до першого успіху, плюс кількість додаткових випробувань до другого успіху, ..., плюс кількість додаткових випробувань до k -го успіху).

Часто використовують інше формулювання від'ємного біноміального розподілу. Нехай в.в. Y – це кількість невдач перед k -м успіхом. Тоді $Y = X - k$, де в.в. X визначено вище, та

$$P(Y = j) = C_{k+j-1}^j \theta^k (1-\theta)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad EY = EX - k = \frac{k(1-\theta)}{\theta}$$

Рівномірний розподіл

В.в. X має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$, що позначається $X \sim \mathcal{U}[a, b]$, якщо її щільність є сталою всередині цього відрізка та дорівнює нулю поза ним, тобто

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{x \in [a, b]}. \quad (3)$$

Моменти:

$$m_1 = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2};$$

$$m_2 = EX^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}; \quad \mu_2 = m_2 - m_1^2 =$$

Гамма-розподіл (зокрема, експоненційний та хі-квадрат)

Сім'я гамма-розподілів має два додатних параметри і є дуже гнучкою. Щільність може набувати різної форми залежно від значень параметрів і визначена на додатній півосі $\{x: x > 0\}$.

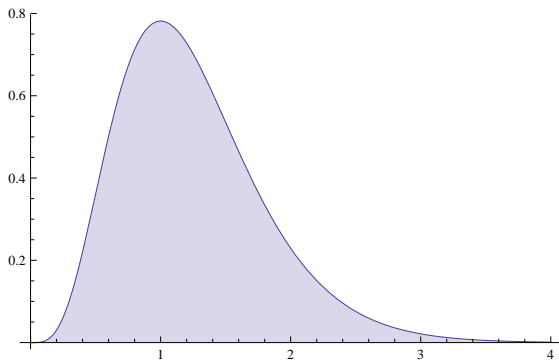
Нагадаємо спершу, що гамма-функцію $\Gamma(\alpha)$ визначають для $\alpha > 0$ таким чином:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

Зокрема, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ для $\alpha > 1$ (тобто коли n – ціле число, то $\Gamma(n) = (n - 1)!$) та $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

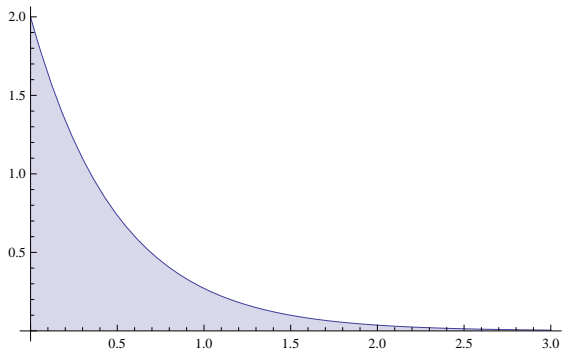
Щільність гамма-розподілу з параметрами α та λ має вигляд

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$



$$\alpha = 5, \lambda = 4$$

Рис. 1.9. Щільності гамма-розподілу



$$\alpha = 1, \lambda = 2$$

Рис. 1.10. Щільності гамма-розподілу

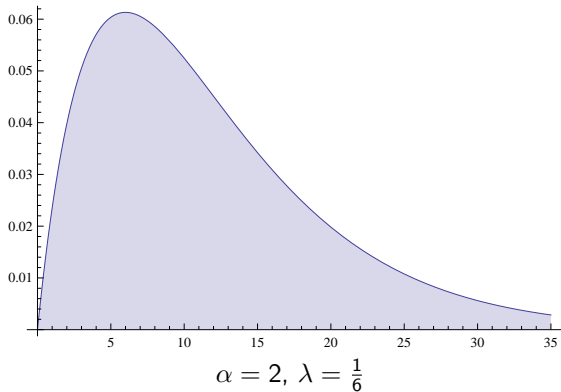
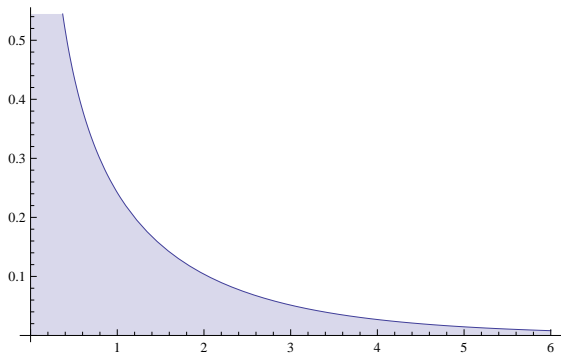


Рис. 1.11. Щільності гамма-розподілу



$$\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2} (\nu = 1)$$

Рис. 1.12. Щільності гамма-розподілу

Обчислимо генератрису моментів $M_X(t)$, використовуючи заміну $y = (\lambda - t)x$:

Обчислимо генератрису моментів $M_X(t)$, використовуючи заміну $y = (\lambda - t)x$:

$$\begin{aligned} M_X(t) = Ee^{tX} &= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{(\lambda-t)^\alpha} dy \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}. \end{aligned}$$

Обчислимо генератрису моментів $M_X(t)$, використовуючи заміну $y = (\lambda - t)x$:

$$\begin{aligned} M_X(t) = Ee^{tX} &= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{(\lambda-t)^\alpha} dy = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}. \end{aligned}$$

Спеціальний випадок 1: експоненційний (показниковий) розподіл – це гамма розподіл з параметром $\alpha = 1$. Функція розподілу та щільність експоненційного розподілу:

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0; \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Моменти:

$$m_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Експоненційний розподіл часто використовують як просту модель тривалості життя певних типів обладнання.

Спеціальний випадок 2: хі-квадрат (χ^2) розподіл з параметром ν “ступеней вільності” – це гамма розподіл з параметрами $\alpha = \frac{\nu}{2}$, де ν – натуральне число, та $\lambda = \frac{1}{2}$.
Щільність хі-квадрат розподілу з ν ступеней вільності:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Моменти:

$$m_1 = \nu, \quad \mu_2 = 2\nu.$$

Бета-розподіл

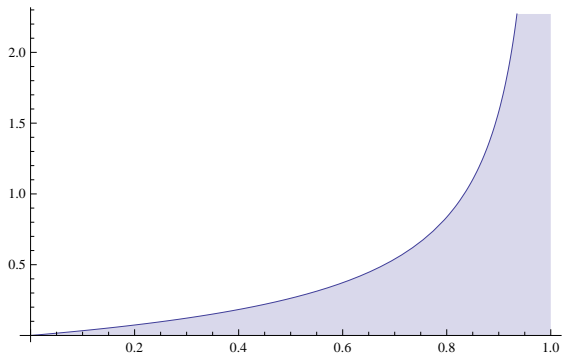
Також є іншою досить гнучкою сім'єю розподілів із двома параметрами, визначених на $\Omega = (0, 1)$.

Бета-функція

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

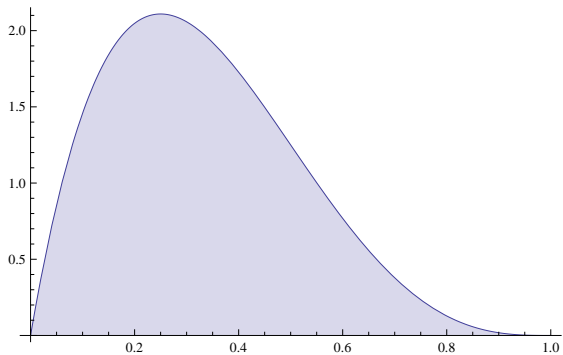
Щільність бета-розподілу:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{B(\alpha + \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$



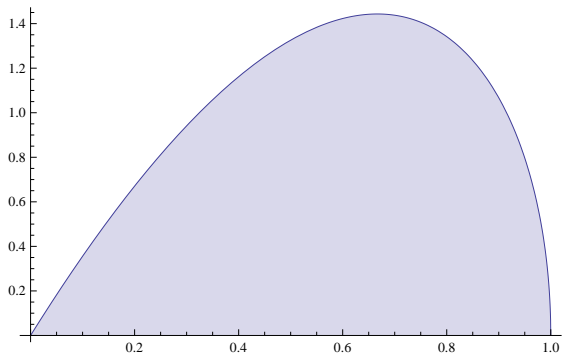
$$\alpha = 2, \beta = \frac{1}{4}$$

Рис. 1.13. Щільності бета-розподілу



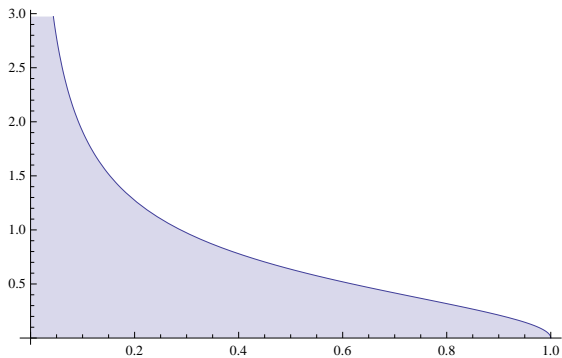
$$\alpha = 2, \beta = 4$$

Рис. 1.14. Щільності бета-розподілу



$$\alpha = 2, \beta = \frac{3}{2}$$

Рис. 1.15. Щільності бета-розподілу



$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}$$

Рис. 1.16. Щільності бета-розподілу

Генератриса моментів:

Генератриса моментів:

$$\begin{aligned}M_X(t) &= Ee^{tX} = \int_0^1 e^{tx} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_0^1 x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + k + \beta)} \\&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + k)} \frac{t^k}{k!}.\end{aligned}$$

Моменти:

Моменти:

$$m_1 = M'_X(0) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta};$$

$$m_2 = M''_X(0) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)};$$

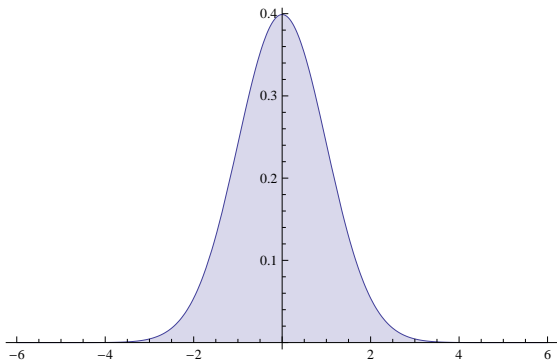
$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

Нормальний (гауссівський) розподіл

Нормальний розподіл $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ має два параметри, які зручним чином безпосередньо виражаються через середнє μ та стандартний відхил σ . Розподіл симетричний відносно μ . Щільність нормального розподілу

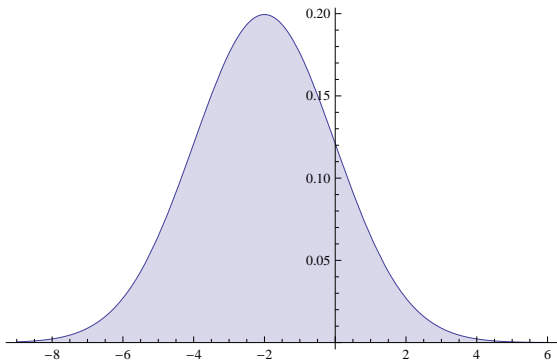
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Нормальний розподіл використовують для побудови багатьох інших розподілів (логнормальний, хі-квадрат, Фішера, Стюдента тощо), на ньому ґрунтується велика кількість статистичних висновків.



$$\mu = 0, \sigma = 1$$

Рис. 1.17. Щільності нормального розподілу



$$\mu = -2, \sigma = 2$$

Рис. 1.18. Щільності нормального розподілу

Генератриса моментів:

Генератриса моментів:

$$\begin{aligned}M_X(t) &= E \exp\{tX\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{tx\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x - \mu - t\sigma^2)^2 + \mu^2 - (\mu + t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\&= \exp\left\{\frac{2\mu t\sigma^2 + t^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x - \mu - t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\&= \exp\left\{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}\end{aligned}$$

Генератриса кумулянт $C_X(t) = \mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}$.

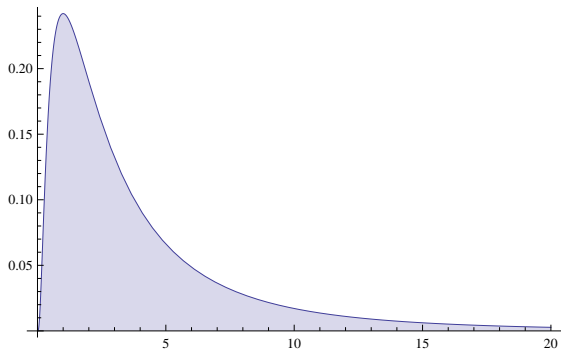
Моменти: $m_1 = C'_X(0) = \mu$; $\mu_2 = C''_X(0) = \sigma^2$.

Логнормальний розподіл

Якщо X відображає, наприклад, величину вимоги, а $Y = \ln X$ має нормальний розподіл, то кажуть, що в.в. X має логнормальний розподіл, $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$.

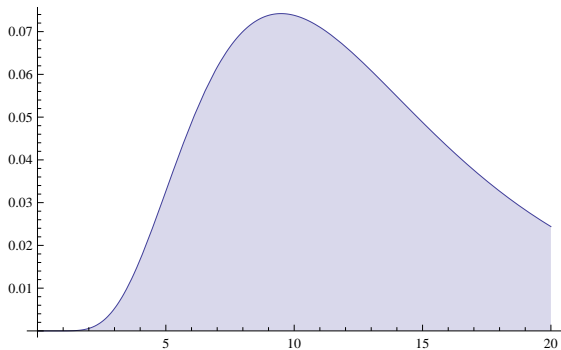
Щільність логнормального розподілу:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad 0 < x < \infty.$$



$$\mu = 1, \sigma = 1$$

Рис. 1.19. Щільності логнормального розподілу



$$\mu = \frac{5}{2}, \sigma = \frac{1}{2}$$

Рис. 1.20. Щільності логнормального розподілу

Генератриса моментів:

$$\begin{aligned}M_X(t) &= E \exp\{tX\} = \int_0^{\infty} \exp\{tx\} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{te^y\} \exp\left\{-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \exp\{ky\}}{k!} \exp\left\{-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(y - \mu)^2 - 2k\sigma^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \exp\left\{\mu k + \frac{k^2\sigma^2}{2}\right\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(y - \mu - k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \exp\left\{\mu k + \frac{k^2\sigma^2}{2}\right\}.\end{aligned}$$

Звідси отримуємо моменти, як відповідні коефіцієнти при $\frac{t^k}{k!}$:

$$m_1 = M'_X(0) = \exp \left\{ \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right\};$$

$$m_2 = M''_X(0) = \exp \{2\mu + 2\sigma^2\};$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \exp \{2\mu + 2\sigma^2\} - \exp \{2\mu + \sigma^2\} \\ &= \exp \{2\mu + \sigma^2\} (\exp \{\sigma^2\} - 1). \end{aligned}$$

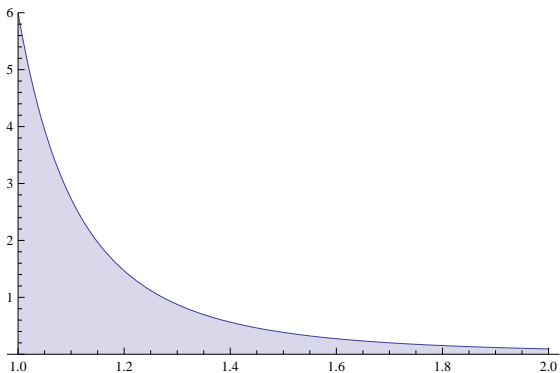
Розподіл Парето

В.в. X має розподіл Парето з параметрами $a > 0$, $\lambda > 0$, якщо

$$f_X(x) = \frac{a\lambda^a}{(\lambda + x)^{a+1}}, \quad x > 0.$$

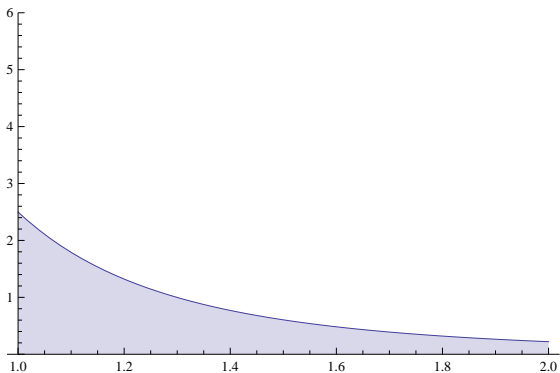
Тоді функція розподілу X має вигляд

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^a, \quad x > 0.$$



$$a = 2, \lambda = \frac{1}{3}$$

Рис. 1.21. Щільності розподілу Парето



$$a = \frac{5}{2}, \lambda = 1$$

Рис. 1.22. Щільності розподілу Парето

Оскільки моменти порядку k в.в. X скінченні лише для $k < a$, математичне сподівання і дисперсію обчислимо безпосередньо:

Оскільки моменти порядку k в.в. X скінченні лише для $k < a$, математичне сподівання і дисперсію обчислимо безпосередньо:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = a\lambda^a \int_0^{\infty} \frac{x}{(\lambda+x)^{a+1}} dx \\
 &= a\lambda^a \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(\lambda+x)^a} - \frac{\lambda}{(\lambda+x)^{a+1}} \right) dx \\
 &= a\lambda^a \left(\frac{\lambda^{-a+1}}{a-1} - \frac{\lambda\lambda^{-a}}{a} \right) = \frac{\lambda}{a-1}, \quad a > 1;
 \end{aligned}$$

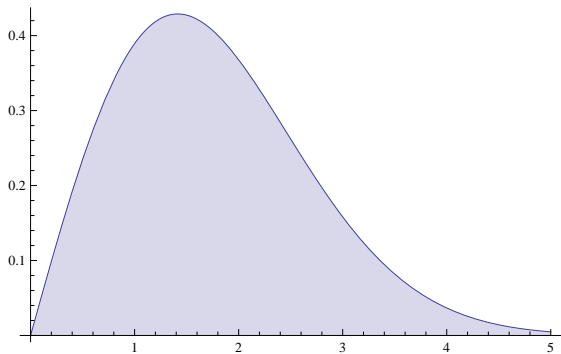
$$\begin{aligned}
 m_2 &= \int_0^{\infty} x^2 f_X(x) dx = a\lambda^a \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(\lambda+x)^{a+1}} dx \\
 &= a\lambda^a \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(\lambda+x)^{a-1}} - \frac{2\lambda}{(\lambda+x)^a} + \frac{\lambda^2}{(\lambda+x)^{a+1}} \right) dx \\
 &= a\lambda^a \left(\frac{\lambda^{-a+2}}{a-2} - 2\frac{\lambda\lambda^{-a+1}}{a-1} + \frac{\lambda^2\lambda^{-a}}{a} \right) = \frac{2\lambda^2}{(a-1)(a-2)}, \quad a > 2
 \end{aligned}$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{a\lambda^2}{(a-1)(a-2)} - \frac{\lambda^2}{(a-1)^2}, \quad a > 2$$

Розподіл Вейбулла

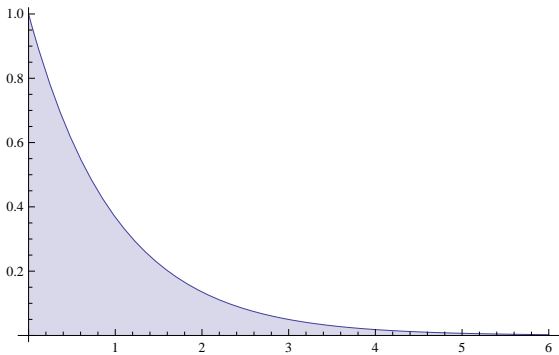
В.в. X має розподіл Вейбулла з параметрами $c > 0$, $\gamma > 0$, якщо

$$f_X(x) = c\gamma x^{\gamma-1} \exp\{-cx^\gamma\}, \quad x > 0.$$



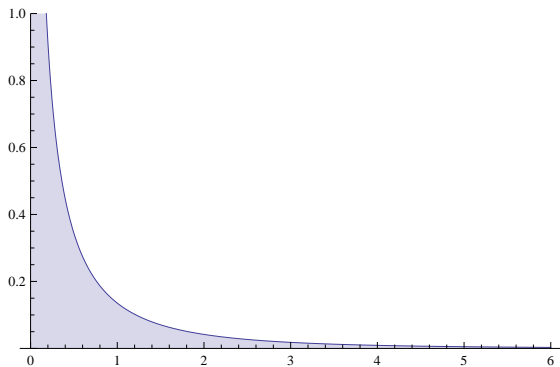
$$\gamma = 2, c = \frac{1}{4}$$

Рис. 1.23. Щільності розподілу Вейбулла



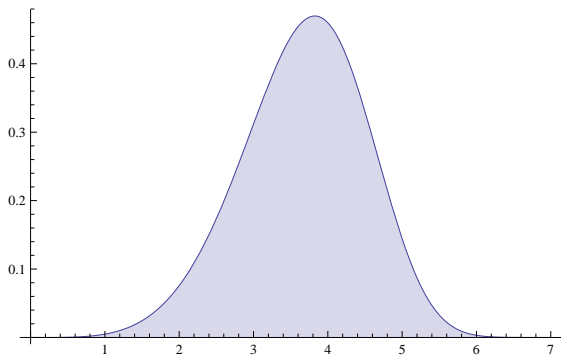
$$\gamma = 1, c = 1$$

Рис. 1.24. Щільності розподілу Вейбулла



$$\gamma = \frac{1}{2}, c = 2$$

Рис. 1.25. Щільності розподілу Вейбулла



$$\gamma = 8, c = 2^{-10}$$

Рис. 1.26. Щільності розподілу Вейбулла

Генератрису моментів (використаємо заміну $cx^\gamma = y$):

Генератрису моментів (використаємо заміну $cx^\gamma = y$):

$$\begin{aligned}M_X(t) &= E \exp\{tX\} = \int_0^\infty \exp\{tx\} c\gamma x^{\gamma-1} \exp\{-cx^\gamma\} dx \\&= \int_0^\infty \exp\left\{t\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\} \exp\{-y\} dy = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{k}{\gamma}} \exp\{-y\} dy \\&= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} c^{-\frac{k}{\gamma}} \int_0^\infty y^{\frac{k}{\gamma}} \exp\{-y\} dy = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} c^{-\frac{k}{\gamma}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\gamma}\right).\end{aligned}$$

Моменти:

Генератрису моментів (використаємо заміну $cx^\gamma = y$):

$$\begin{aligned}M_X(t) &= E \exp\{tX\} = \int_0^\infty \exp\{tx\} c\gamma x^{\gamma-1} \exp\{-cx^\gamma\} dx \\&= \int_0^\infty \exp\left\{t\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\} \exp\{-y\} dy = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{k}{\gamma}} \exp\{-y\} dy \\&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c^{-\frac{k}{\gamma}} \int_0^\infty y^{\frac{k}{\gamma}} \exp\{-y\} dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c^{-\frac{k}{\gamma}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\gamma}\right).\end{aligned}$$

Моменти: $m_k = M^{(k)}(0) = c^{-\frac{k}{\gamma}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\gamma}\right),$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = c^{-\frac{2}{\gamma}} \left(\Gamma(1 + 2\gamma^{-1}) - (\Gamma(1 + \gamma^{-1}))^2 \right).$$

Зауважимо, що розглянутий вище розподіл Парето – це розподіл, у якого “правий хвіст”

$$P(X > x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^a$$

прямує до нуля як x^{-a} і є значно “важчим”, ніж експоненційний, у якого

$$P(X > x) = \exp\{-\lambda x\}.$$

Повертаючись до розподілу Вейбулла, маємо такі випадки:

- якщо $\gamma < 1$, то виникає розподіл, який, у певному розумінні, є проміжним між експоненційним та розподілом Парето;
- при $\gamma > 1$ правий хвіст легший за експоненційний;
- випадок $\gamma = 1$ відповідає експоненційному розподілу.

Така гнучкість розподілу Вейбулла дозволяє використовувати його для моделювання збитків (як правило, з $\gamma < 1$).

Задача

Нехай A і B – незалежні події. Доведіть, що A і \bar{B} , доповнення до множини B , теж є незалежними подіями.

Задача

Розглянемо дві події A і B такі, що $P(A) = 0.3$ і $P(A \cap B) = 0.1$.
Знайти найменше і найбільше можливі значення умовної ймовірності $P(A|B)$.

Задача

Розглянемо 12 незалежних полісів страхування, пронумерованих 1, 2, 3, ..., 12, за кожним з яких може надійти не більше однієї вимоги. Для кожного полісу ймовірність настання страхового випадку становить 0.1. Знайти ймовірність, що жодної вимоги не надійде від групи полісів із номерами 1, 2, 3, 4, 5 і 6, та лише 1 вимога надійде від групи полісів з номерами 7, 8, 9, 10, 11, і 12.

Задача

Страхова компанія покриває вимоги від чотирьох різних портфельів полісів загального страхування, позначених через G_1 , G_2 , G_3 і G_4 . Число полісів у кожному з портфельів наведено

нижче:

| Портфель | G_1 | G_2 | G_3 | G_4 |
|---------------|-------|-------|--------|-------|
| Число полісів | 4 000 | 7 000 | 13 000 | 6 000 |

Оцінюють, що частка полісів, за якими виникнуть вимоги у наступному році становить 8%, 5%, 2% і 4% відповідно.

Припустимо, що за вибраним навмання через один рік полісом із загальної групи 30 000 полісів усіх чотирьох портфельів надійшла за цей рік вимога. Обчисліть імовірність, що поліс вибрано з портфелю G_3 .

Задача

Припустимо, що у групі страхових полісів (які є незалежними щодо надходження вимог), від 20% полісів надійшли вимоги протягом останнього року. Аудитор вивчає поліси з групи один за одним у випадковому порядку, доки не знайде два поліси з вимогою.

(i) Визначте ймовірність, що рівно п'ять полісів треба було дослідити, перш ніж два послідовні поліси з вимогами було знайдено.

(ii) Знайти очікуване число полісів, які треба дослідити, поки два поліси (не обов'язково послідовні) з вимогами не будуть виявлені.

Задача

Величини позовів за певної страхової ситуації моделюють за допомогою розподілу, генератриса моментів якого дорівнює $M(t) = (1 - 10t)^{-2}$. Обчисліть EX , EX^2 та EX^3 .

Задача

Розглянемо дискретну в.в. X із розподілом $P(X = x) = \frac{4}{5^{x+1}}$,
 $x = 0, 1, 2, \dots$

- i) Визначте генератрису моментів X .
- ii) Обчисліть EX , використовуючи результат пункту i).

Задача

Величину позову X в одиницях \$1000 для певного типу страхування промисловості моделюють як гамма-розподілену в.в. із параметрами $\alpha = 3$ та $\lambda = \frac{1}{4}$.

- i) Використовуючи генератриси моментів, покажіть, що $\frac{1}{2}X$ має χ^2 розподіл з 6 степенями вільності.
- ii) Обчисліть ймовірність того, що величина позову перевищить \$20 000.

Задача

Припустимо, що X є в.в. з генератрисою моментів $M_X(t)$ та генератрисою кумулянт $C_X(t)$. Нехай $Y = aX + b$, де a та b – деякі сталі. Нехай також в.в. Y має генератрису моментів $M_Y(t)$ та генератрису кумулянт $C_Y(t)$.

- i) Покажіть, що $C_Y(t) = bt + C_X(at)$.
- ii) Обчисліть коефіцієнт асиметрії $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ в.в. Y , якщо $M_X(t) = (1 - t)^{-2}$ та $Y = 3X + 2$.

Задача

Розмір виплат у деякій страховій ситуації моделюють за допомогою розподілу, генератриса моментів якого має вигляд

$$M(t) = (1 - 10t)^{-2}.$$

Покажіть, що $EX^2 = 600$ і знайдіть значення EX^3 .

Задача

Нехай X – випадкова величина зі щільністю розподілу

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

- i) Покажіть, що генератриса моментів X має вигляд

$$M_X(t) = (1 - t^2)^{-1}$$

при $|t| < 1$.

- ii) Знайдіть математичне сподівання і дисперсію X , використовуючи знайдену генератрису моментів.

Задача

Величину певного типу позовів (в одиницях 10000 грн) моделюють як експонеційно розподілену випадкову величину з параметром $\lambda = 1.25$. Аналітик вивчає S , суму 10 таких незалежних величин позовів. Зокрема його цікавить імовірність того, що S перевищить 100 000 грн. Використовуючи генератрису моментів, покажіть, що S має гамма-розподіл, а $2.5S$ має розподіл χ^2_{20} .

Задача

(i) X та Y є незалежними випадковими величинами з розподілу Пуассона з середнім λ . Виведіть генератрису моментів X та покажіть, що $X + Y$ також має розподіл Пуассона.

(ii) Страховик має портфель зі 100 полісів. Річні премії завбільшки 0.2 одиниці на поліс сплачують щорічно наперед. Позови, які сплачують наприкінці року, мають сталу величину 1 одиниця на позов. Число щорічних позовів за кожним полісом має розподіл Пуассона з середнім 0.18. Обчисліть, скільки початкового капіталу потрібно, що забезпечити ймовірність банкрутства в кінці року не більше 1%.