Статистичні методи теорії ризику

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

І семестр 2012

Зміст

1. Лекція 7
   - Системи знижок за відсутність позовів
     - Системи бонус-малус розрахунку премій з урахуваннямпопередньої історії
     - Дисконтні категорії
     - Матриця переходів
   - Ланцюги Маркова з дискретним часом і скінченною кількістю ст
     - Визначення та властивості
     - Граф переходів ланцюга Маркова
     - Рівняння Колмогорова-Чепмена
     - Ергодична теорема
     - Аналізування стаціонарного стану
     - Час перебування процесу на підмножині станів
   - Неоднорідність портфелю
   - Вплив систем бонус-малус на схильність до позовів
   - Витяг із Закону України “Про обов’язкове страхування цивільно-

Системи бонус-малус розрахунку премій з урахуванням попередньої історії подання позовів

Під час прийняття рішення про величину премії, яку повинен заплатити страхувальник, багато страхових компаній використовують інформацію про кількість позовів, заявлених власником поліса протягом попередніх років.

Це дає можливість краще визначити вірогідність того, що власник поліса звернеться з позовом у майбутньому.

Залежно від ступеня ризику в кожному конкретному випадку ставки страхових платежів можуть бути знижені або підвищені шляхом застосування відповідних коефіцієнтів.

Надання знижки за відсутність страхових випадків або навпаки, збільшення тарифу при їх наявності, носить назву *системи бонусів*, принцип якої полягає у вторинній диференціації премії, тобто застосування знижок або надбавок до індивідуальних договорів, які відносяться до однієї однорідної групи за певною ознакою залежно від збитковості, яка склалася для індивідуального клієнта.

Такі системи часто застосовуються при страхуванні автотранспорту, цивільної відповідальності власників транспортних засобів і подібних їм ризиків, в основному пов'язаних із майном чи відповідальністю.

Системи бонус-малус

Застосування системи знижок за відсутність страхових випадків іноді називають *системою дисконтування за відсутність вимог виплат* (No claims discont system, NCD-system) або *знижкою за безаварійність*. В європейській страховій традиції такі системи називають *системами бонус-малус*(Bonus-Malus System, BMS), що в перекладі з латині означає "хороший-поганий".

Надаючи знижку за відсутність страхових випадків, страхова компанія зберігає існуючих клієнтів і залучає нових, які, у свою чергу, сподіваються на надання такої знижки.

За наявності великої кількості вимог від одного страхувальника протягом періоду страхування можливий інший розвиток подій — підвищення тарифів. Розмір знижок безпосередньо залежить від кількості років без позовів від клієнта.

Коли власник поліса вирішує, чи звертатися з позовом, чи ні, він має взяти до уваги вплив позовів на величину премії в наступні роки. Таким чином, однією з причин введення системи знижок є намагання уникнути малих позовів.

Власник поліса не звернеться з позовом, якщо розмір виплати буде меншим, ніж наступне збільшення страхової премії. Отже, система знижок за відсутності вимог виплат зменшує кількість малих позовів до страхової компанії і загальну вартість позовів, що перекриває зменшення надходження премій.

Ще важливішим є зменшення витрат на адміністрування вимог. Чим меншу кількість вимог треба адмініструвати, тим меншими можна зробити нарахування (у премії) на витрати для клієнта. Зменшуючи кількість малих позовів, фірма витісняє позови, вартість адміністрування яких є непропорційно великою. Це робить величини премій даної страхової компанії більш конкурентноспроможними.

У системі бонус-малус виділяють дві частини: дисконтні категорії та правила переходу між категоріями. Щоб дослідити властивості таких систем, треба знати щорічну ймовірність позову для даного клієнта.

Дисконтні категорії

Часто категорії пов'язують із кількістю років без позовів. У той же час правило переходу фактично не пов'язані з кількістю років після позову. Поява вимоги не означає для клієнта відміни знижок: як правило, клієнт просто переходить до іншої категорії з меншим дисконтом.

Приклад

Розглянемо систему бонус-малус, яка має три категорії:

Категорія	Дисконт, %
0	0
1	25
2	40

У категорії 0 клієнт платить певну премію, розмір якої визначається персонально залежно від індивідуальних особливостей застрахованого (наприклад, віку, статі), які є рейтинговими факторами. Для простоти розглянемо множину застрахованих, яких можна вважати однаковими відносно рейтингових факторів. У цьому разі повна премія однакова для всіх полісів у портфелі.

У категорії 1 власник поліса платить лише 75% повної премії, а в категорії 2 – лише 60%. Якщо застрахований не подає жодного полісу протягом року, то він переходить до наступної категорії (чи залишається у категорії 2). Якщо подано один чи більше позовів, то клієнт переходить на нульовий рівень дисконту.

Зазвичай застосовують п'ять-шість (іноді значно більше) категорій, і позов може спричинити перехід більш ніж на одну

Матриця переходів

Позначимо очікувану частку власників полісів у j-ій дисконтній категорії, $j = 0, 1, \ldots, n$, t-ий рік тривалості договору страхування (чи інший період часу) через $\pi_j(t)$.

$$\pi_0(t) + \pi_1(t) + \cdots + \pi_n(t) = 1.$$

Розподіл власників за категоріями зобразимо за допомогою вектора $\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \ldots, \pi_n(t))$. Ймовірності того, що власник поліса з категорії i (у даному році) перейде до категорії j (у наступному році) не залежать від моменту часу t і можуть бути зображені за допомогою *матриці перехідних імовірностей*

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

Припустимо, що всі клієнти починають з категорії 0. Тому на початку першого року дії поліса, тобто в момент $t = 0$, $\pi_0(0) = 1$, і розподіл клієнтів за категоріями заданий вектором $\boldsymbol{\pi}(0) = (1, 0, \ldots, 0)$. На початку другого року власники полісів будуть перерозподілені по кожній категорії згідно з імовірностями переходу p_{0j} зі стану 0 в стан j, тобто

$$\boldsymbol{\pi}(1) = (p_{00}, p_{01}, \ldots, p_{0n}) = \boldsymbol{\pi}(0)P.$$

Аналогічно,

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(t-1)P = \cdots = \boldsymbol{\pi}(0)P^t.$$

Обґрунтуємо цей висновок та проаналізуємо поведінку $\boldsymbol{\pi}(t)$ для великих значень t, використовуючи основні поняття теорії ланцюгів Маркова з дискретним часом і скінченною кількістю станів.

Ланцюги Маркова з дискретним часом і скінченною кількістю станів

Нехай $U = \{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ – деяка скінченна множина, елементи якої будемо називати *станами*. Для простоти $U = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо деякий процес, який у момент $t = 0, 1, 2, \ldots$ може перебувати в одному із цих станів, а в $t + 1$ перейти в деякий інший стан чи залишитися в попередньому. Кожен такий перехід не є точно визначеним: із певними ймовірностями процес може перейти в один із станів $i \in U$.

Визначення

Якщо ймовірності переходу залежать лише від часу t *і стану, в якому перебуває процес в цей час, і не залежать від станів, в яких процес перебував у моменти* $0, 1, 2, \ldots, t-1$, *то такий процес називають ланцюгом Маркова з дискретним часом і скінченною кількістю станів*

Отже, послідовність дискретних в.в. $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ утворює ланцюг Маркова з дискретним часом, якщо має місце **марківська властивість**

$$P(X(t+1) = i_{t+1} | X(t) = i_t, X(t-1) = i_{t-1}, \ldots, X(0) = i_0)$$

$$= P(X(t+1) = i_{t+1} | X(t) = i_t), \quad i_k \in U,\ k \geq 0. \qquad (1)$$

Ланцюг Маркова повністю заданий, коли визначений розподіл ймовірностей

$$\boldsymbol{\pi}(0) = (\pi_0(0), \pi_1(0), \ldots, \pi_n(0))$$

перебування процесу в станах $k \in U$ у початковий момент часу $t = 0$, тобто $\pi_k(0) = P(X(0) = k)$, та визначені ймовірності

$$p_{ij}(t) = P(X(t+1) = j | X(t) = i)$$

переходу зі стану $i \in U$ в стан $j \in U$ в наступні моменти часу $t = 1, 2$

Визначення

Якщо ймовірності переходу не залежать від часу (тобто $p_{ij}(t) = p_{ij}$ для довільного t), то такий ланцюг Маркова називають однорідним.

Саме однорідні ланцюги Маркова ми і будемо вивчати.

Граф переходів ланцюга Маркова

Поширеним способом візуального задання ланцюга Маркова є граф переходів.

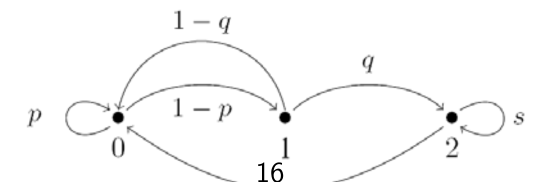
Вершини цього графа ототожнюють зі станами, а орієнтоване ребро з початком у вершині i та кінцем у вершині j, сполучає ці вершини лише у тому випадку, коли ймовірність переходу $p_{ij} \neq 0$. Дану ймовірність переходу також пишуть біля відповідного ребра.

Продовження прикладу

Припустимо, що ймовірністю p власник поліса залишається у категорії 0, з імовірністю q переходить від першої до другої дисконтної категорії та з імовірністю s залишається у категорії 2. Тоді матриця перехідних імовірностей дорівнює

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 1-q & 0 & q \\ 1-s & 0 & s \end{pmatrix},$$

а граф переходів відповідного ланцюга Маркова має вигляд



Теорема

Нехай послідовність в.в. $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *утворює однорідний ланцюг Маркова з дискретним часом і скінченною множиною станів* $U = \{0, 1, \ldots, n\}$ *та матрицею перехідних імовірностей* $P = (p_{ij})_{i,j=0}^{n}$. *Тоді*

$$P(X(t+1) = k) = \sum_{u \in U} P(X(t) = j)\ p_{jk}, \quad t = 0, 1, 2 \ldots$$

Доведення

Подія $\{X(t+1)=k\}$ є реалізацією тих траєкторій із множини усіх траєкторій $\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \ldots, X(t)=i_t, X(t+1)=i_{t+1} \colon i_0, \ldots, i_{t+1} \in U\}$, які завершуються станом $i_{t+1}=k$. Тому ймовірність цієї події дорівнює сумі ймовірностей здійснення кожної такої траєкторії:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X(t)=k) = \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_t \in U} \mathrm{P}(X(0)=i_0, X(1)=i_1, \ldots,\\ X(t)=i_t, X(t+1)=k) \\ = \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_t \in U} \mathrm{P}(X(0)=i_0, X(1)=i_1, \ldots, X(t)=i_t) \times \\ \times \mathrm{P}(X(t+1)=k | X(0)=i_0, X(1)=i_1, \ldots, X(t)=i_t). \end{aligned}$$

За марківською властивістю (1) цей вираз дорівнює

$$\sum_{i_0,i_1,\ldots,i_t\in U} \mathsf{P}(X(0)=i_0, X(1)=i_1,\ldots,X(t)=i_t)\times$$
$$\times\mathsf{P}(X(t+1)=k|X(t)=i_t)$$
$$=\sum_{i_0,i_1,\ldots,i_t\in U} \mathsf{P}(X(0)=i_0, X(1)=i_1,\ldots,X(t)=i_t)p_{i_t k}.$$

Фіксуючи в останній сумі i_{t-1} та підсумовуючи за іншими індексами, отримаємо, що

$$\mathsf{P}(X(t)=k)=\sum_{u\in U}\mathsf{P}(X(t-1)=u)p_{uk}.$$

Результат цієї теореми можна записати у матричній формі. Нехай вектор

$$\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \dots, \pi_n(t))$$

визначає розподіл імовірностей перебування процесу в станах $0, 1, \dots, n$ у момент часу t, тобто

$$\pi_k(t) = \mathsf{P}(X(t) = k)$$

– ймовірність потрапляння після t переходів у стан k. Тоді твердження теореми 1.1 можна подати у формі

$$\boldsymbol{\pi}(t+1) = \boldsymbol{\pi}(t)P, \quad t \geq 1.$$

Послідовно застосовуючи цю формулу, отримуємо наступну теорему.

Теорема

Нехай $\boldsymbol{\pi}(t)$ *– розподіл імовірностей перебування ланцюга Маркова* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *на множині станів* U *в момент часу* t, P *– матриця перехідних імовірностей. Тоді*

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)P^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Рівняння Колмогорова-Чепмена

Позначимо через

$$p_{ij}^{(t)} = \mathrm{P}(X(t) = j | X(0) = i) = \mathrm{P}(X(t+s) = j | X(s) = i), \; s = 0, 1, \ldots$$

ймовірності переходу за t кроків зі стану i у стан j. Нехай також

$$P^{(t)} = \{p_{ij}^{(t)}\}$$

– матриця таких перехідних ймовірностей.

Теорема (Рівняння Колмогорова-Чепмена)

$$p_{ij}^{(t+s)} = \sum_{u \in U} p_{iu}^{(t)} p_{uj}^{(s)}, \qquad (2)$$

або, в матричній формі, $P^{(t+s)} = P^{(t)} P^{(s)}$.

Доведення.

Доведення співвідношення (2) просте і ґрунтується на формулі повної ймовірності та марківській властивості (1):

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(t+s)} &= \mathrm{P}(X(t+s)=j|X(0)=i)\\
&= \sum_{u\in U}\mathrm{P}(X(t+s)=j, X(s)=u|X(0)=i)\\
&= \sum_{u\in U}\mathrm{P}(X(t+s)=j|X(s)=u, X(0)=i)\times\\
&\quad \times\mathrm{P}(X(s)=u|X(0)=i)\\
&= \sum_{u\in U}\mathrm{P}(X(t+s)=j|X(s)=u)\mathrm{P}(X(s)=u|X(0)=i)\\
&= \sum_{u\in U}p_{iu}^{(s)}p_{uj}^{(t)}.
\end{aligned}
$$

Зауваження

Оскільки $P^{(1)} = P$, то $P^{(k)} = P^k$, що означає, що для однорідних ланцюгів Маркова ймовірності переходу за k кроків $p_{ij}^{(k)}$ є елементами k-их степеней матриці P.

Це зауваження та теорема 1.2 показують, що ключовим у вивченні розподілів перебування процесу на множині станів є вивчення степеней матриці перехідних імовірностей. Елементи цих степеней самі допускають цікаву ймовірнісну інтерпретацію.

Зокрема, розглянемо в якості початкового вектора $\pi(0)$ вектор, у якого i-та компонента дорівнює 1, а всі інші – 0. Тоді за теоремою 1.2 $\pi(t) = \pi(0)P^t$. Але $\pi(0)P^t$ – це i-ий рядок матриці P^t. Тому i-ий рядок t-ої степені матриці переходу дає ймовірності перебування в одному з можливих станів у момент t за умови, що процес почався зі стану i.

Ергодична теорема

Визначення

Стан j називають досяжним зі стану i, якщо існує момент часу $t = t(i, j)$ такий, що

$$p_{ij}^{(t)} = P(X(t) = j | X(1) = i) > 0.$$

Досяжність j зі стану i позначають $i \to j$. Якщо $i \to j$ та $j \to i$, то використовують познаку $i \leftrightarrow j$.

Дане відношення є відношенням еквівалентності. Відповідно до цього множину станів можна розбити на неперетинні класи еквівалентності.

Визначення

Якщо вся множина станів належить до одного класу еквівалентності, то такий ланцюг Маркова називають нерозкладним.

Інакше кажучи, ланцюг Маркова є нерозкладним, якщо з будь-якого його стану можна досягти будь-який інший стан за скінченну кількість переходів.

Наступна теорема описує широкий клас ланцюгів Маркова, які відзначаються так званою властивістю ергодичності: границі

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)}$$

не тільки існують, не залежать від i, а й утворюють розподіл імовірностей ($\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1$), причому $\pi_j > 0$ для всіх $j \in U$.

Теорема (Ергодична теорема)

Нехай $P = (p_{ij})$ *– матриця перехідних імовірностей ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів* $U = \{0, 1, \ldots, n\}$*.*

а) Якщо для деякого t_0

$$\min_{i,j} p_{ij}^{(t_0)} > 0, \tag{3}$$

то знайдуться числа $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ *такі, що*

$$\pi_j > 0, \quad \sum_{j=0}^{n} \pi_j = 1, \tag{4}$$

причому для довільних станів i *та* j

$$p_{ij}^{(t)} \to \pi_j, \quad t \to \infty. \tag{5}$$

б) Навпаки, коли існують числа $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$, які задовольняють умови (4) та (5), то знайдеться t_0 таке, що виконується умова (3).

в) Числа $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ з а) є розв'язками наступної системи рівнянь:

$$\pi_j = \sum_{u=0}^{n} \pi_u p_{uj}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \tag{6}$$

Доведення

а) Позначимо

$$m_j^{(t)} = \min_{i \in U} p_{ij}^{(t)}, \quad M_j^{(t)} = \max_{i \in U} p_{ij}^{(t)}.$$

З рівняння Колмогорова-Чепмена випливає, що

$$p_{ij}^{(t+1)} = \sum_{u \in U} p_{iu} p_{uj}^{(t)}. \tag{7}$$

Звідси

$$m_j^{(t+1)} = \min_{i \in U} p_{ij}^{(t+1)} = \min_{i \in U} \sum_{u \in U} p_{iu} p_{uj}^{(t)} \geq$$

$$\geq \min_{i \in U} \sum_{u=0}^{n} p_{iu} \min_{u \in U} p_{uj}^{(t)} = m_j^{(t)}$$

Аналогічно показуємо, що

$$M_j^{(t)} \geq M_j^{(t+1)}.$$

Отже, для доведення (3) досить показати, що

$$M_j^{(t)} - m_j^{(t)} \to 0,\ t \to \infty, j \in U.$$

Нехай $\varepsilon = \min_{i,j} p_{ij}^{(t_0)} > 0$. Тоді

$$p_{ij}^{(t_0+t)} = \sum_{u=0}^{n} p_{iu}^{(t_0)} p_{uj}^{(t)} \sum_{u=0}^{n} \left(p_{iu}^{(t_0)} - \varepsilon p_{ju}^{(t)} \right) p_{uj}^{(t)} +$$

$$+\varepsilon \sum_{u=0}^{n} p_{ju}^{(t)} p_{uj}^{(t)} = \sum_{u=0}^{n} \left(p_{iu}^{(t_0)} - \varepsilon p_{ju}^{(t)} \right) p_{uj}^{(t)} + \varepsilon p_{jj}^{(2t)}.$$

Але

$$p_{iu}^{(t_0)} - \varepsilon p_{ju}^{(t)} \geq 0,$$

бо

$$p_{iu}^{(t_0)} \geq \min_{i,u} p_{iu}^{(t_0)} = \varepsilon \geq \varepsilon p_{ju}^{(t)},$$

тому

$$p_{ij}^{(t_0+t)} \geq m_j^{(t)} \sum_{u=0}^{n} \left(p_{iu}^{(t_0)} - \varepsilon p_{ju}^{(t)} \right) + \varepsilon p_{jj}^{(2t)}$$

$$= m_j^{(t)}(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}^{(2t)},$$

а значить,

$$m_j^{(t_0+t)} \geq m_j^{(t)}(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}^{(2t)}.$$

Так само показуємо, що

$$M_j^{(t_0+t)} \leq M_j^{(t)}(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}^{(2t)}.$$

Поєднуючи ці дві нерівності, отримуємо

$$M_j^{(t_0+t)} - m_j^{(t_0+t)} \leq \left(M_j^{(t)} - m_j^{(t)}\right)(1-\varepsilon)$$

та, послідовно застосовуючи k разів отриману нерівність,

$$M_j^{(kt_0+t)} - m_j^{(kt_0+t)} \leq \left(M_j^{(t)} - m_j^{(t)}\right)(1-\varepsilon)^k \downarrow 0, \quad k \to \infty.$$

Отже, за деякою підпослідовністю $\{t_k\}_{k\geq 1}$ вираз $M_j^{(t_k)} - m_{j_k}^{(t)}$ збігається до нуля, коли $t_k \to \infty$. Але різниця $M_j^{(t)} - m_j^{(t)}$ монотонна за t, а це означає, що $M_j^{(t)} - m_j^{(t)} \to 0$, $t \to \infty$.

Якщо позначити
$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} m_j^{(t)},$$
то з отриманих оцінок випливає, що для $t \geq t_0$
$$\left| p_{ij}^{(t)} - \pi_j \right| \leq M_j^{(t)} - m_j^{(t)} \leq (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{t_0}\right]-1},$$
тобто збіжність $p_{ij}^{(t)}$ до граничних значень π_j відбувається зі швидкістю геометричної прогресії.

Очевидно також, що
$$m_j^{(t)} \geq m_j^{(t_0)} > 0, \text{ коли } t \geq t_0,$$
а значить, $\pi_j > 0$.

Умова
$$\sum_{j=0}^{n} \pi_j = 1$$
випливає з (5) та рівності
$$\sum_{j=0}^{n} p_{ij}^{(t)} = 1.$$

б) Умова (3) безпосередньо випливає з (5), тому що множина станів скінченна та $\pi_j > 0$.

в) Рівняння (6) випливають при граничному переході (5) з рівності $p_{ij}^{(t+1)} = \sum_{u=0}^{n} p_{iu}^{(t)} p_{uj}$.

Якщо граничний розподіл (4) заданий вектором

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n),$$

то систему рівнянь (6) можна подати у матричній формі:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P. \tag{8}$$

Аналізування стаціонарного стану

Визначення

Кожен розв'язок $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ *рівняння (8), який задовольняє умови (4), називають стаціонарним або інваріантним розподілом, іноді – розподілом рівноваги.*

Пояснити цю назву можна наступним чином. Розглянемо розподіл $\boldsymbol{\pi}$ в якості початкового розподілу $\boldsymbol{\pi}(0)$, тобто $\pi_j(0) = \pi_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Тоді

$$\pi_j(1) = \sum_{u=0}^{n} \pi_u(0) p_{uj} = \sum_{u=0}^{n} \pi_u p_{uj} = \pi_j,$$

і взагалі $\pi_j(t) = \pi_j$. Інакше кажучи, якщо в якості початкового розподілу взяти стаціонарний, то він не буде мінятися з часом

$$\mathrm{P}(X(t) = j) = \mathrm{P}(X(0) = j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Умова (3) гарантує існування граничного стаціонарного розподілу $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$. Доведемо єдиність цього розподілу.

Дійсно, нехай $\boldsymbol{\pi}' = (\pi_0', \pi_1', \ldots, \pi_n')$ – ще один стаціонарний розподіл. Тоді

$$\pi_j' = \sum_{u=0}^{n} \pi_u' p_{uj} = \cdots = \sum_{u=0}^{n} \pi_u' p_{uj}^{(t)},$$

та з (5) випливає, що

$$\pi_j' = \sum_{u=0}^{n} \pi_u' \pi_j = \pi_j.$$

Зауваження

Стаціонарний розподіл імовірностей може існувати і для неергодичних ланцюгів. Дійсно, якщо

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$P^{2t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad P^{2t+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

і, відповідно, границі $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)}$ не існують. В той же час система рівнянь $q_j = \sum\limits_{u=0}^{1} q_u p_{uj}$, $j = 0, 1$, дає єдиний розв'язок $q_0 = q_1$, який згідно з умовою $q_0 + q_1 = 1$ дорівнює $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Продовження прикладу

Нехай імовірність того, що застрахований не звернеться з позовом, дорівнює 0,9. Тоді $\boldsymbol{\pi}$ є розв'язком рівняння

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} (\pi_0, \pi_1, \pi_2),$$

або

$$\begin{cases} 0,1\pi_0 + 0,1\pi_1 + 0,1\pi_2 = \pi_0, \\ 0,9\pi_0 = \pi_1, \\ 0,9\pi_1 + 0,9\pi_2 = \pi_2. \end{cases}$$

Додатково використаємо рівняння $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, після чого легко отримуємо розв'язок $\boldsymbol{\pi} = (0,1; 0,09; 0,81)$.

Час перебування процесу на підмножині станів

Нехай A – деяка група станів, $A \subset U$. Введемо величину

$$\nu_A(t) = \frac{\mathbb{I}_{\{X(0)\in A\}} + \mathbb{I}_{\{X(1)\in A\}} + \dots \mathbb{I}_{\{X(t)\in A\}}}{t+1}$$

– частка часу, проведеного процесом у множині A. Оскільки

$$\mathsf{E}(\mathbb{I}_{\{X(t)\in A\}}|X(0)=i) = \mathsf{P}(X(t)\in A|X(0)=i) = \sum_{j\in A} p_{ij}^{(t)} \equiv p_i^{(t)}(A),$$

то

$$\mathsf{E}(\nu_A(t)|X(0)=i) = \frac{1}{t+1}\sum_{k=0}^{t} p_i^{(k)}(A)$$

та, зокрема,

$$\mathsf{E}(\nu_{\{j\}}(t)|X(0)=i) = \frac{1}{t+1}\sum_{k=0}^{t} p_{ij}^{(k)}.$$

Зі збіжності $p_{ij}^{(t)} \to \pi_j$, $t \to \infty$, випливає, що

$$\mathsf{E}\nu_{\{j\}}(t) \to \pi_j$$

та, відповідно,

$$\mathsf{E}\nu_A(t) \to \pi_A, \quad \pi_A = \sum_{j\in A} \pi_j.$$

Для ергодичних ланцюгів можна довести і більш сильний результат.

Теорема (Закон великих чисел)

Якщо $X(0), X(1), \ldots$ – скінченний ергодичний ланцюг Маркова, то для будь-яких $\varepsilon > 0$, множини $A \in U$ та початкового розподілу станів має місце закон великих чисел:

$$P(|\nu_A(t) - \pi_A| > \varepsilon) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Перш ніж перейти до доведення, зауважимо, що безпосередньо застосувати теорему про ЗВЧ до в.в. $\mathbb{I}_{X(0)\in A}, \mathbb{I}_{X(1)\in A}, \dots,$ $\mathbb{I}_{X(t)\in A}, \dots$ з розподілу Бернуллі не можна, тому що вони, взагалі кажучи, є залежними.

Проте доведення можна провести за тією самою схемою, що й у випадку незалежних величин, враховуючи те, що для ергодичних ланцюгів зі скінченною кількістю станів існує таке $0 < \rho < 1$, що

$$|p_{ij}^{(t)} - \pi_j| \leq C\rho^t. \tag{9}$$

Доведення

Розглянемо стани i та j і покажемо, що для $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|\nu_{\{j\}}(t) - \pi_j| > \varepsilon | X(0) = i) \to 0, \quad t \to \infty. \tag{10}$$

За нерівністю Чебишова

$$\mathsf{P}(|\nu_{\{j\}}(t) - \pi_j| > \varepsilon | X(0) = i) \leq \frac{\mathsf{E}(|\nu_{\{j\}}(t) - \pi_j|^2 | X(0) = i)}{\varepsilon^2}.$$

Тому досить показати, що

$$\mathsf{E}(|\nu_{\{j\}}(t) - \pi_j|^2 | X(0) = i) \to 0, \ \ t \to \infty.$$

$$\mathsf{E}(|\nu_{\{j\}}(t)-\pi_j|^2|X(0)=i)$$

$$=\frac{1}{(t+1)^2}\mathsf{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{t}(\mathbb{I}_{\{X(k)=j\}}-\pi_j)\right)^2|X(0)=i\right)$$

$$=\frac{1}{(t+1)^2}\sum_{k=0}^{t}\sum_{l=0}^{t}m_{i,j}^{(k,l)},$$

де

$$m_{i,j}^{(k,l)}=\mathsf{E}\left(\mathbb{I}_{\{X(k)=j\}}\mathbb{I}_{\{X(l)=j\}}|X(0)=i\right)-$$

$$-\pi_j\mathsf{E}\left(\mathbb{I}_{\{X(k)=j\}}|X(0)=i\right)-\pi_j\mathsf{E}\left(\mathbb{I}_{\{X(l)=j\}}|X(0)=i\right)+\pi_j^2$$

$$=p_{ij}^{(a)}p_{jj}^{(b)}-\pi_j p_{ij}^{(k)}-\pi_j p_{ij}^{(l)}+\pi_j^2,$$

$a=\min\{k,l\},\ b=|k-l|.$

З нерівності (9) випливає, що

$$p_{ij}^{(t)} = \pi_j + \varepsilon_{ij}^{(t)}, \quad |\varepsilon_{ij}^{(t)}| \le C\rho^t.$$

Тому

$$|m_{i,j}^{(k,l)}| \le C_1(\rho^a + \rho^b + \rho^k + \rho^l),$$

де C_1 – деяка стала. Отже,

$$\frac{1}{(t+1)^2}\sum_{k=0}^{t}\sum_{l=0}^{t} m_{i,j}^{(k,l)} \le \frac{C_1}{(t+1)^2}\sum_{k=0}^{t}\sum_{l=0}^{t}(\rho^a + \rho^b + \rho^k + \rho^l)$$

$$\le \frac{4C_1}{(t+1)^2}\cdot\frac{2(t+1)}{1-\rho} = \frac{8C_1}{(t+1)(1-\rho)} \to 0, \quad t \to 0,$$

звідки і випливає справедливість співвідношення (10), з якого, у свою чергу, випливає твердження теореми.

Неоднорідність портфелю

Один із чинників, який підтверджує доцільність систем бонус-малус, полягає в тому, що вони приводять до автоматичного визначення премій. Інакше кажучи, застрахований, який подає менше позовів, платить меншу премію, ніж той, від кого надходить більше позовів.

Незважаючи на очевидність цього факту, більш глибокі дослідження систем бонус-малус показали, що вони спрацьовують не так добре, як на те сподівалися, і власники полісів сплачують премії, не пропорційні їхній імовірності подати позов.

Частково це відбувається внаслідок малої кількості дисконтних категорій і відносно низькі рівні запропонованих знижок, а також через невелику ймовірність виникнення позовів (а значить, велику ймовірність для всіх застрахованих на певному етапі досягти максимального рівня дисконту).

Якщо задано ймовірності позовів для всіх застрахованих, то дійсно є можливість математично визначити систему бонус-малус, яка через довгий проміжок часу приведе до того, що застраховані будуть платити нетто-премію, прямо пропорційну їхній імовірності звернутися з позовом. Проте ця система складна для адміністрування й розуміння.

Наступний приклад демонструє іншу крайність, коли припускають, що існує всього два типи власників полісів і всього три категорії знижок.

Приклад

Нехай замість того, щоб знати стільки ймовірностей, скільки є застрахованих, маємо лише кращих та гірших водіїв.

Імовірність позову від кращого водія досить мала і дорівнює, наприклад, 0,1, а від гіршого – удвічі більша. Припустимо також, що дисконтні категорії такі самі, як у попередніх прикладах.

Треба порівняти середні значення премій, які платитимуть кращі та гірші водії після досягнення стаціонарного розподілу.

Стаціонарний розподіл для кращих водіїв обчислено у прикладі: $\boldsymbol{\pi}' = (0,1; 0,09; \; 0,81)$. Аналогічно для: $\boldsymbol{\pi}'' = (0,2; 0,16; 0,64)$.

Оскільки гірші подають удвічі більше позовів, то природно очікувати, що їх нетто-премія (без адміністративних витрат і навантаження на ризик) у середньому також буде вдвічі більшою (за умови, що розподіл величини виплат однаковий для усіх водіїв). Подивимося, що відбудеться насправді.

Припустимо, що повна премія дорівнює П. Тоді середня нетто-премія для кращих водіїв дорівнює

$$0,1\Pi + 0,09 \cdot 0,75\Pi + 0,81 \cdot 0,6\Pi = 0,6535\Pi,$$

а для гірших $0,2\Pi + 0,16 \cdot 0,75\Pi + 0,64 \cdot 0,6\Pi = 0,704\Pi$. Отже, незважаючи на те, що гірші водії можуть удвічі частіше звертатися з позовами, середня премія, яку вони платять, зовсім не набагато перевищує премію для кращих водіїв.

У цьому простому прикладі максимально доступна знижка недостатня, щоб отримати ідеальну подвоєну премію. Спробуємо підібрати потрібні величини дисконтних знижок. Припустимо, що знижки за категоріями становлять α та β. Тоді, розв'язуючи рівняння

$$2(0,1+0,09(1-\alpha)+0,81(1-\beta)) = 0,2+0,16(1-\alpha)+0,64(1-\beta),$$

отримаємо параметричний розв'язок

$$\beta = 1,0204 - 0,0204\alpha > 1, \quad \alpha \in (0,1)$$

Це означає, що для даної системи бонус-малус ідеальну пропорційну премію отримати неможливо.

Ситуацію можна поліпшити, якщо ввести більше дисконтних категорій, але при цьому, звичайно, система ускладниться.

Вплив систем бонус-малус на схильність до позовів

Раніше ми припускали, що ймовірність звернення з позовом була однаковою незалежно від того, до якої дисконтної категорії належить застрахований. Коли він вирішує, звертатися з позовом чи ні, то має також враховувати і можливе збільшення **майбутньої премії**.

Розглянемо, наприклад, застрахованого, який сплачує повну премію П за системою бонус-малус із трьома дисконтними категоріями (див. приклад).

- Якщо за перший рік (або в наступні роки) не було жодного позову, майбутні премії: $0,75П$; $0,6П$; $0,6П$; $\ldots$
- Якщо протягом першого року був позов, а в наступні роки – ні, то премії в наступні роки такі: П; $0,75П$; $0,6П$; $0,6П$; $\ldots$

Отже, додаткова величина, на яку збільшується премія після виникнення позову за умови, що в наступні роки позови не виникнуть, дорівнює

$$\Pi + 0,75\Pi + 0,6\Pi + 0,6\Pi + \dots$$

$$-0,75\Pi - 0,6\Pi - 0,6\Pi - \dots = 0,4\Pi.$$

Аналогічно значення додаткової премії можна розрахувати для інших дисконтних категорій.

Таким чином, залежно від величини збитків та додаткової премії ймовірність того, що застрахований подасть позов, змінюється та стає різною для різних категорій. Цю різницю можна обчислити, розглядаючи виплати включно по той рік, у якому досягається максимальний дисконт.

Можливо, що застрахований не буде заглядати далеко в майбутнє, розуміючи, що все одно може подати принаймні один позов протягом цього періоду.

Кількість років, які він бере до уваги, називають *горизонтом застрахованого*.

Очевидно, ймовірність подання позову залежить від горизонту.

Вправа

Нехай система бонус-малус складається з чотирьох дисконтних категорій з рівнями знижки 0%, 25%, 40% та 50% відповідно. Правило, за яким застрахований переходить між категоріями, таке:

- якщо в поточному році не було позову, то застрахований переходить на наступний вищий рівень чи залишається із максимальною знижкою 50%;
- якщо в поточному році був принаймні один позов, то застрахований переходить на нижчий рівень дисконту чи залишається без знижки.

Припускають, що для кожного застрахованого річна кількість позовів має розподіл Пуассона з інтенсивністю λ та досягнуто стаціонарного стану.

1) Нехай премія, яку сплачує власник поліса на 0-му рівні дисконту, становить 500. Знайти формулу для розрахунку середньої премії.
2) Обчислити середню премію, яку сплачує застрахований із такими значеннями річної інтенсивності позовів λ: (a) 0,12; (b) 0,24; (c) 0,36.

Розв'язок

1)Позначимо середню премію через Q, тоді

$$Q = 500(\pi_0 + 0,75\pi_1 + 0,6\pi_2 + 0,5\pi_3),$$

де $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ – невідомий стаціонарний розподіл. Нехай N – кількість позовів, що надійшли від одного клієнта протягом року. Тоді N має розподіл Пуассона, та, відповідно, ймовірність відсутності позовів дорівнює $\mathrm{P}(N = 0) = e^{-\lambda}$, а ймовірність того, що надійде хоча б один позов, дорівнює

$$\mathrm{P}(N \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}.$$

Таким чином, матриця перехідних імовірностей має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} & 0 \\ 0 & 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи рівняння $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P$, знаходимо стаціонарний розподіл $\boldsymbol{\pi} =$

$$\left(\frac{1}{1+k+k^2+k^3}, \frac{k}{1+k+k^2+k^3}, \frac{k^2}{1+k+k^2+k^3}, \frac{k^3}{1+k+k^2+k^3}\right)$$

де

$$k = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}.$$

Отже, середня премія $A = A(k)$ дорівнює

$$A(k) = 500 \cdot \frac{1 + 0,75k + 0,6k^2 + 0,5k^3}{1 + k + k^2 + k^3}.$$

2) По черзі підставимо конкретні значення λ в отримані формули для k, $\boldsymbol{\pi}$ та A:

(a) для $\lambda = 0,12$ маємо $k = 7,843$, та, відповідно, $A = A(7,843) = 257,789$.

(b) для $\lambda = 0,24$ значення k та A такі: $k = 3,687$, середня премія $A = A(3,687) = 270,332$.

(c) для $\lambda = 0,36$ $k = 2,308$, тоді середня премія $A = A(2,308) = 288,462$.

Вправа

Нехай система бонус-малус має два рівні дисконту: 0% та $100d$%. Якщо застрахований не звертається з позовом протягом року, то він переходить на вищий рівень дисконту 1. Навпаки, якщо від нього надходить позов, то опиниться на рівні 0. Імовірність того, що від застрахованого протягом року надійде вимога на виплату, дорівнює q, $0 < q < 1$. Припустимо, що величина премії на 0-му рівні дорівнює П.

i) Записати матрицю перехідних імовірностей та стаціонарний розподіл.

ii) Знайти таке значення d, яке для $q = 0,2$ призводить до середньої очікуваної премії в 1,5 рази більшої ніж для $q = 0,1$.

Вправа

Страхова компанія використовує систему бонус-малус з п'ятьма рівнями знижок: -20%, 0%, 20%, 30% та 40%. Правило переходу клієнтів між рівнями таке:

- початкова знижка для нового клієнта становить 0%;
- якщо протягом року не було жодного позову, застрахований переходить на наступний рівень дисконту або залишається на максимальному;
- якщо протягом року був принаймні один позов, застрахований із 30% та 40% рівнів знижки опускається на рівень 0%, а з рівнів -20%, 0% та 20% – на рівень 0%.

Щорічна повна премія дорівнює $\$600$. У разі настання страхової події величина збитків розподілена за показниковим законом із середнім $\$1\,750$.

Застрахований звертається з позовом, якщо збитки від страхової події більші за додаткову премію за наступні 4 роки, за умови, що страхових подій більше не буде.

i) Для кожного рівня дисконту обчисліть найменшу величину збитків, за якої клієнт звернеться з позовом.
ii) Для кожного рівня дисконту знайдіть імовірність подання позову у разі настання страхової події.
iii) Нехай у поточному році кількість клієнтів на кожному рівні дисконту однакова, а ймовірність того, що застрахований протягом року не матиме страхових подій дорівнює 0,9. Обчисліть очікувану кількість клієнтів на кожному рівні дисконту в наступному році.

Вправа

Система бонус-малус для певного класу полісів річного страхування має три рівні дисконту: 0%, 30% та 50%. Якщо протягом року не було подано жодного позову, то власник полісу отримує знижку вищого дисконтного рівня чи залишається зі знижкою 50%. Якщо протягом року було подано принаймні один позов, то власник полісу переходить на нижчий рівень знижки чи залишається на рівні 0%.

Ймовірність того, що протягом року власник полісу подасть хоча б один позов, дорівнює:

- p для 0% дисконтної категорії;
- $0,8p$ для 30% дисконтної категорії;
- $0,6p$ для 50% дисконтної категорії.

Величина премії на 0%-му дисконтному рівні становить c.

i) Запишіть матрицю ймовірностей переходу у термінах p.

ii) Знайдіть стаціонарний розподіл власників полісів по дисконтним рівням у термінах p.

iii) Чому в середньому дорівнює сплачувана премія $A(p; c)$ після досягнення стаціонарного стану системи?

iv) Припустимо, що страхова компанія обчислює премії для цього класу страхування, розділяючи власників полісів на два типи. Відомо, що перший тип має $p = 0,1$, а другий – $p = 0,15$. Премія, встановлена для першого типу власників полісів на 0%-му дисконтному рівні дорівнює 1 000. Ігноруючи витрати та прибуткове навантаження, а також припускаючи, що всі інші характеристики цих ризиків однакові, обчисліть таке значення c премії на 0%-му дисконтному рівні для другого типу власників, щоб $A(0,15; c) = 1,5A(0,1; 1000)$.

Вправа

Страхова компанія використовує трирівневу систему бонус-малус: 0%, 30% та 60% знижки. Правила переходу між категоріями такі:

- якщо власник страхового полісу протягом року не подав жодного позову, то наступного року він переходить до вищого (чи залишається найвищому) дисконтного рівня.
- якщо протягом року було подано принаймні один позов, то наступного року власник полісу переходить (чи залишається) на 0% рівень.

Припустимо, що ймовірність подання позову власником поліса не залежить від дисконтного рівня та дорівнює p, а величина премії за відсутності знижки становить c.

i) Запишіть матрицю ймовірностей переходу.

ii) Знайдіть стаціонарний розподіл власників полісів на кожному дисконтному рівні (у термінах p).

iii) (a) Обчисліть величину середньої премії A у термінах p та c.

(b) Розглядаючи значення A для $p = 0,9$ ($A_{0,9}$) та $p = 0,8$ ($A_{0,8}$), зробіть висновок про ефективність даної системи бонус-малус.

(c) Компанія хоче змінити бонус-малус систему так, щоб дисконтні рівні були 0%, $100d$% та $200d$% (у поточній системі знижок $d = 0,3$). Визначте таке d, щоб $A_{0,8} = 1,5A_{0,9}$, та прокоментуйте отриманий результат.

Витяг із Закону України “Про обов’язкове страхування цивільно-правової відповідальності власників наземних транспортних засобів”

Стаття 8. Бонус-малус

8.1. Для заохочення безаварійної експлуатації транспортних засобів, при укладанні договорів обов’язкового страхування цивільно-правової відповідальності більше ніж на півроку, страховики мають право застосовувати коефіцієнт страхових тарифів залежно від наявності чи відсутності страхових випадків з вини осіб, відповідальність яких застрахована, в період дії попередніх договорів обов’язкового страхування цивільно-правової відповідальності (бонус-малус), який розраховується кожним із страховиків з урахуванням положень пункту 7.1 статті 7 цього Закону.

Клас на початок строку страхування	Коефіцієнт	Клас по закінченню строку страхування з урахуванням наявності страхових випадків з вини страхувальника			
		0 страхових виплат	1 страхова виплата	2 страхові виплати	3 страхові виплати
M	2.45	0	M	M	M
0	2.3	1	M	M	M
1	1.55	2	M	M	M
2	1.4	3	1	M	M
3	1	4	1	M	M
4	0.95	5	2	M	M
5	0.9	6	3	1	M
6	0.85	7	4	1	M
7	0.8	8	4	1	M
8	0.75	9	5	2	M
9	0.7	10	5	2	1
10	0.65	11	6	2	1
11	0.6	12	6	2	1
12	0.55	13	6	2	1
13	0.5	13	7	2	1

(Пункт 8.1 статті 8 в редакції Закону N 2902-IV від 22.09.2005)

8.2. При укладанні договору обов'язкового страхування цивільно-правової відповідальності страхувальнику присвоюється клас залежно від частоти страхових випадків, які виникли з вини особи, відповідальність якої застрахована.
8.3. При укладанні договору обов'язкового страхування цивільно-правової відповідальності вперше страхувальнику присвоюється клас 3.
8.4. Залежно від кількості страхових випадків, які виникли у період дії попередніх договорів обов'язкового страхування цивільно-правової відповідальності при укладанні з ним такого договору на новий строк, застосовується підвищуючий коефіцієнт страхового тарифу з присвоєнням більш низького класу до найнижчого - М чи з урахуванням безаварійної експлуатації транспортного засобу та при відсутності страхових випадків, які виникли з вини страхувальника, - понижуючий коефіцієнт з присвоєнням більш високого класу.