Статистичні методи теорії ризику

© Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

I семестр 2012

Зміст

Випадкові процеси

Теорія випадкових процесів має справу з вивченням випадкових величин, які залежать від параметру t з деякої множини T.

Визначення

Нехай кожному $t \in T$ поставлено у відповідність в.в. $X(t)$, тоді кажуть, що на T задано випадковий процес $\{X(t), t \in T\}$.

Визначення

Реалізацією або вибірковою функцією випадкового процесу $\{X(t), t \in T\}$ є функція $X(T)\colon\ T \to S$, яка ставить у відповідність кожному $t \in T$ одне з можливих значень $X(t) \in S$ (S – множина можливих значень $X(t)$).

Визначення

$X(t)$ називають процесом із незалежними приростами, якщо в.в. $X(t) - X(s)$ та $X(u) - X(v)$ є незалежними для будь-яких $s < t \leq u < v$

Пуассонів процес

Зробимо такі природні припущення про характер надходження позовів:

(I) події, пов'язані з появою позовів на інтервалах часу, які не перетинаються, є незалежними випадковими подіями;

(II) розподіл кількості позовів, що надійшли протягом інтервалу часу $[t, t+h)$, не залежить від t, а залежить лише від h;

(III) ймовірність того, що протягом інтервалу $[t, t+h)$ буде подано принаймні один позов, дорівнює $\alpha h + o(h)$, де α – стала, а $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$;

(IV) ймовірність того, що протягом інтервалу $[t, t+h)$ виникне більш ніж один позов, є $o(h)$.

Нехай $N(t)$ – кількість позовів, які надійшли протягом часу $[0, t)$. Позначимо

$$p_N(k; t) = \mathrm{P}(N(t) = k).$$

Має місце таке твердження.

Теорема

В.в. $N(T)$ має розподіл Пуассона з параметром αt, тобто

$$p_N(k; t) = \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Доведення

Випадкова подія $A =${протягом часу $[0, t + h)$ не надійшло жодного позову} є перетином двох випадкових подій:
$B =${протягом часу $[0, t)$ не надійшло жодного позову} та
$C =${протягом часу $[t, t + h)$ не надійшло жодного позову}.

З припущення (II) випливає, що $\mathrm{P}(A) = p_N(0; t + h)$,
$\mathrm{P}(B) = p_N(0; t)$, $\mathrm{P}(C) = p_N(0; h)$.

Тому в силу (I)

$$p_N(0; t + h) = p_N(0; t)p_N(0; h). \qquad (2)$$

Згідно з припущенням (III)

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_N(k; h) = \alpha h + o(h),$$

і тому

$$p_N(0; h) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k; h) = 1 - \alpha h + o(h), \qquad (3)$$

Об'єднуючи (2) та (3), маємо

$$p_N(0; t + h) = p_N(0; t)(1 - \alpha h + o(h)),$$

звідки

$$\frac{p_N(0; t + h) - p_N(0; t)}{h} = -\alpha p_N(0; t) + p_N(0; t)\frac{o(h)}{h}.$$

Переходячи до границі при $h \to 0$ в останній рівності, одержимо таке диференціальне рівняння для функції $p_N(0; t)$:

$$\frac{\mathrm{d}p_N(0; t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha p_N(0; t).$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $p_N(0; t) = c \exp\{-\alpha t\}$, але оскільки відомо, що в момент часу $t = 0$ позовів не було, то $p_N(0; 0) = 1$, звідки $c = 1$. Отже,

$$p_N(0; t) = e^{-\alpha t}.$$

Запишемо рекурентне рівняння для $k \geq 2$.

$$p_N(k;t) =$$

$$p_N(k;t)p_N(0;h) + p_N(k-1;t)p_N(1;h) + \sum_{j=2}^{k} p_N(k-j;t)p_N(k;h). \tag{4}$$

Згідно з припущенням (IV)

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_N(k;h) = o(h)$$

і тому

$$p_N(1;h) = \sum_{j=1}^{\infty} p_N(j;h) - \sum_{j=2}^{\infty} p_N(j;h) = \alpha h + o(h), \tag{5}$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} p_N(k-j;t)p_N(j;h) \leq \sum_{j=2}^{\infty} p_N(j;h) = o(h), \tag{6}$$

бо $p_N(j;t) \leq 1$

Враховуючи (3) та (5)–(6), з (4) випливає

$$p_N(k;t+h) = p_N(k;t)(1-\alpha h + o(h)) + p_N(k-1;t)\alpha h + o(h),$$

звідки

$$\frac{p_N(k;t+h) - p_N(k;t)}{h} = -\alpha p_N(k;t) + \alpha p_N(k-1;t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Переходячи до границі при $h \to 0$ в останній рівності, отримаємо рекурентну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}p_N(k;t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha p_N(k;t) + \alpha p_N(k-1;t) \tag{7}$$

з початковими умовами $p_N(k,0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$.

Для її розв'язання введемо функції

$$Q_k(t) = e^{\alpha t} p_N(k; t), \quad k \geq 0.$$

Підставляючи $p_N(k; t) = Q_k(t) e^{-\alpha t}$ в (7), одержимо

$$\frac{\mathrm{d} Q_k(t)}{\mathrm{d} t} = \alpha Q_{k-1}(t). \tag{8}$$

Відзначимо, що $Q_0(t) = 1$ та $Q_k(0) = 0$, $k \geq 1$. Послідовно розв'язуючи (8), отримаємо

$$Q_k(t = \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

що й доводить (1).

Експоненційність приростів

Важливою властивістю процесу Пуассона є те, що проміжки часу між подіями є незалежними та однаково розподіленими за експоненціальним законом в.в. із середнім $\frac{1}{\lambda}$.

Щоб переконатися в цьому, позначимо через W_j час між подіями $j-1$ та j, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Тоді

$$\mathrm{P}(W_1 > t) = \mathrm{P}(N_t = 0) = e^{\lambda t}, \tag{9}$$

і тому W_1 має експоненційний розподіл з середнім $\frac{1}{\lambda}$.

Крім того,

$$P(W_2 > t | W_1 = s) = P(W_1 + W_2 > s + t | W_1 = s)$$

$$= P(N_{t+s} = 1 | N_s = 1)$$

$$= P(N_{t+s} - N_s = 0 | N_s = 1) = P(N_{t+s} - N_s = 0)$$

внаслідок умови (II).

З незалежності приростів та (9) маємо

$$P(W_2 > t | W_1 = s) = e^{\lambda t}.$$

Остання рівність виконується для всіх s, отже,

$$P(W_2 > t) = e^{-\lambda t}$$

та W_2 не залежить від W_1.

Аналогічно, незалежні й експоненційно розподілені з середнім $1/\lambda$ в.в. $W_3, W_4, W_5, \ldots$.

Відзначимо також, що час від фіксованого моменту $t_0 \geq 0$ деякої події до наступної події також розподілений експоненційно з середнім $1/\lambda$, що випливає з властивості відсутності пам'яті експоненційного розподілу:

$$\mathsf{P}(W_{n+1} > t+s | W_{n+1} = s) = e^{-\lambda t} \quad \text{для всіх} \;\; s \geq 0, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Вправа

i) Події, що можуть призвести до позову, виникають згідно процесу Пуассона з інтенсивністю 0,8 на рік. У полісі зазначено, що страхова компанія покриває лише перші три позови протягом одного року.

ii) Величини сплачених позовів (у $\$100$) відповідають гамма-розподілу з параметрами $\alpha = 2$ та $\lambda = 1$. Обчисліть математичне сподівання сумарних виплат, зроблених протягом деякого року.

iii) Обчисліть математичне сподівання сумарних виплат, зроблених протягом деякого року, якщо відомо про покриття принаймні одного позову в цьому році.

Вправа

Припускають, що надходження позовів, які виникають за полісом страхування промислового об'єкта, можна змоделювати за допомогою процесу Пуассона з інтенсивністю 0,5 на рік.

i) Визначте ймовірність того, що протягом року не надійде жодного позову.
ii) Визначте ймовірність того, що протягом трьох послідовних років виникне принаймні один позов в одному з років та жодного у двох інших.
iii) Припустимо, що тільки-но надійшов позов. Визначте ймовірність, що пройде більше двох років до моменту подання наступного позову.

Вправа

Пасажир, щоранку ловить автобус протягом 100 днів. Автобус прибуває на зупинку згідно процесу Пуассона з середньою інтенсивністю раз на 15 хвилин, тобто якщо X_i – час очікування протягом i-го дня, то X_i має експоненційний розподіл із параметром $\frac{1}{15}$.

i) Обчисліть (наближено) ймовірність того, що загальний час, який пасажир провів, очікуючи автобуси протягом 100 днів, перевищить 27 годин.

ii) Наприкінці стоденного періоду частота прибуття автобусів збільшилась і тепер у середньому становить один на 10 хвилин (досі згідно процесу Пуассона). Пасажир ловить щоранку автобус ще протягом 99 днів. Обчисліть (наближено) ймовірність того, що загальний час, який пасажир провів в очікуванні протягом 199 днів, перевищить 40 годин.

Вправа

Страхова компанія уклала угоду страхування працівників від нещасних випадків. Загалом 650 полісів було видано двом категоріям працівників. Перша категорія складається з 400 полісів, позови за кожним полісом надходять відповідно до процесу Пуассона з середньою інтенсивністю один на 20 років. У цій категорії величина всіх позовів дорівнює $\$3000$. У другій категорії позови за кожним полісом здійснюються згідно із процесом Пуассона з середньою інтенсивністю один позов на 10 років. У цій категорії величина позову дорівнює $\$2000$ чи $\$3000$ з імовірностями 0,4 та 0,6 відповідно. Вважають, що всі поліси є незалежними.

Нехай S – сумарні річні виплати за портфелем.

a) Обчисліть математичне сподівання, дисперсію та коефіцієнт асиметрії в.в. S.

b) Використовуючи нормальний розподіл як апроксимацію розподілу S, знайдіть y, для якого ймовірність $\mathrm{P}(S > y) = 0,1$.

c) Страхова компанія вирішила залучити перестрахове покриття зі сумарним рівнем утримання $\$100\,000$, тобто страхова компанія не сплачуватиме щороку за позовами більше ніж ця величина. Протягом наступного року після прийняття перестрахової угоди внаслідок змін виробничих умов, про які компанію не було поінформовано, ймовірність позову в другій групі впала до нуля. Використовуючи нормальний розподіл як апроксимацію розподілу S, обчисліть імовірність того, що до зробленого позову буде залучено перестраховика.

Вправа

Процес сумарних позовів для певного ризику є складним процесом Пуассона з параметром $\lambda = 20$. Індивідуальні величини позовів становлять $\$100$ з імовірністю $\frac{1}{4}$, $\$200$ з імовірністю $\frac{1}{2}$ та $\$250$ з імовірністю $\frac{1}{4}$. Початковий профіцит $\$1000$. Використовуючи нормальну апроксимацію, наближено обчисліть найменший коефіцієнт навантаження θ такий, щоб імовірність банкрутства в момент часу 3 не перевищувала 0,05.

Вправа

Позови з портфелю 100 полісів загального страхування надходять згідно процесу Пуассона. Очікуване кількість позовів на рік від кожного поліса дорівнює λ, а щільність розподілу індивідуальних величин позовів має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{10000} x e^{-\frac{x}{100}}, \quad x > 0.$$

Параметр λ не однаковий для всіх полісів, але його моделюють як в.в. (незалежну від величин позовів) зі щільністю

$$g(\lambda) = 100\lambda e^{-10\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

i) Обчисліть середнє та дисперсію сумарних річних позовів.

ii) Для даного початкового резерву завбільшки 2000, використовуючи нормальну апроксимацію до розподілу сумарних виплат, знайдіть відносний коефіцієнт навантаження на премію, яке має бути використане, так щоб з 95%-ою впевненістю в кінці першого року резерв був додатним.

iii) Опишіть вплив на відносний коефіцієнт навантаження на премію, який би спричинило фіксування λ на своєму середньому рівні (без додаткових обчислень).

Вправа

Страхова компанія має два портфелі незалежних полісів, з кожного портфелю позови надходять згідно процесу Пуассона. У першому всі позови однакової величини $\$5000$ та в середньому очікують 10 позовів на рік. У другому портфелі величина позовів розподілена експоненційно з середнім $\$4000$ та очікують 30 позовів на рік.
Нехай в.в. S відображає сумарні виплати за обома портфелями. Перевірку на банкрутство здійснюють лише в кінці року. Страховик до всіх полісів додає 10% навантаження на премію.

i) Обчисліть середнє та дисперсію S.
ii) Використовуючи нормальну апроксимацію до розподілу сумарних виплат, обчисліть початковий капітал u, необхідний, щоб імовірність банкрутства в кінці першого року дорівнювала 0,01.

Страхова компанія розглядає можливість придбання пропорційного перестрахування у перестраховика, який використовує навантаження ξ на свої премії. Частка кожного позову, утримана прямим страховиком, дорівнює $\alpha \in [0, 1]$. Нехай в.в. S_I відображає сумарні виплати за обома портфелями, зробленими прямим страховиком.

iii) Обчисліть середнє та дисперсію S.

iv) Використовуючи нормальну апроксимацію до розподілу S_I, покажіть, що початковий капітал u', необхідний, щоб імовірність банкрутства в кінці першого року дорівнювала 0,01, можна записати так:

$$u' = \alpha u + (1 - \alpha)(\xi - 0,1)\mathrm{E}S.$$

v) Покажіть, що $u > u'$, коли $\xi < 0,476$.

vi) Покажіть, що $u - u'$ спадає, коли ξ зростає, та поясніть, яке практичне значення має цей результат.