

Статистичні методи теорії ризику

© Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

I семестр 2012

1 Лекція 2

- Випадкові вектори
- Незалежні в.в.
- Умовні розподіли та щільності
- Умовне математичне сподівання
- Ймовірнісні нерівності
- Закон великих чисел
- Суміші розподілів

Випадкові вектори

Розглянемо ймовірнісний простір (Ω, \mathcal{F}, P) , на якому визначені n в.в. X_1, \dots, X_n . Вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ називають *випадковим вектором* або *n -вимірною в.в.*

Сумісні розподіли дискретних в.в.

Нехай X_1, \dots, X_n – дискретні в.в. Функцію

$$p(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

для всіх значень (x_1, \dots, x_n) наз. *сумісним* або *n -вимірним p -лом дискретного вип. вектора (X_1, \dots, X_n) .*

Вона має такі властивості:

- $p(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ для всіх значень x_1, \dots, x_n ;
- $\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} p(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Маргінальний (тобто одновимірний) розподіл в.в. X_k за відомим сумісним розподілом визначають так:

$$p_k = P(X_k = x_k) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{k-1}} \sum_{x_{k+1}} \cdots \sum_{x_n} p(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Сумісні функції розподілу

Нехай тепер X_1, \dots, X_n – довільні в.в. Сумісною функцією розподілу випадкового вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ називають функцію $F_{\mathbf{X}}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, яка в точці $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ дорівнює

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &\equiv F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \end{aligned}$$

Як і в одновимірному випадку, багатовимірна функція розподілу має подібні властивості:

- (1) $F_X(x_1, \dots, x_n)$ – неспадна функція за будь-яким аргументом;
- (2) – неперервна зліва за будь-яким аргументом;
- (3) – задовольняє співвідношення

$$F_X(+\infty, \dots, +\infty) = 1,$$

$$\lim_{x_k \rightarrow -\infty} F_X(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

для довільних значень інших аргументів.

На відміну від функції розподілу одновимірної в.в., сумісна функція розподілу має ще одну характеристичну властивість. Позначимо через $\Pi_{\mathbf{x}}$ кут

$$\Pi_{\mathbf{x}} = (-\infty, \mathbf{x}) = (-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_n), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Для початку припустимо, що розмірність $n = 2$. Зауважимо, що паралелепіпед $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ можна зобразити у вигляді вкладеної різниці вкладених різниць кутів:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\Pi_{\mathbf{b}} \setminus \Pi_{\mathbf{b}'}) \setminus (\Pi_{\mathbf{a}} \setminus \Pi_{\mathbf{a}'}),$$

де точки $\mathbf{b}' = (a_1, b_2)$, $\mathbf{a}' = (a_2, b_1)$. Тоді

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{X} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}} \setminus \Pi_{\mathbf{b}'}) - P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}} \setminus \Pi_{\mathbf{a}'}) \\ &= P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}}) - P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}'}) - P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}}) + P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}'}). \end{aligned}$$

Позначимо через $\Delta_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}F_{\mathbf{X}}$ приріст сумісної функції розподілу $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ на паралелепіпеді $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Тоді при $n = 2$ приріст $F_{\mathbf{X}}$ на прямокутнику $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ дорівнює

$$\Delta_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}) - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}') - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}') + F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}).$$

У загальному випадку $n > 2$ правило чергування знаків при значеннях функції у вершинах паралелепіпеда $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ визначається аналогічно.

Нехай $\Delta_{[a_k, b_k]}^k F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ позначає k -ий частковий приріст на $[a_k, b_k]$. Використовуючи метод математичної індукції, легко показати, що приріст сумісної функції розподілу на паралелограмі $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ є результатом послідовних часткових приростів:

$$P(\mathbf{X} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \Delta_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}F_{\mathbf{X}} = \Delta_{[a_1, b_1]}^1 \cdots \Delta_{[a_k, b_k]}^{n-1} \Delta_{[a_k, b_k]}^n F_{\mathbf{X}}. \quad (1)$$

В одновимірному випадку перераховані властивості (1) – (3) є необхідними й достатніми для того, щоб функція $F_X(x)$ була функцією розподілу деякої в.в. X .

У багатовимірному випадку цих властивостей вже недостатньо. Для того, щоб функція $F_X(\mathbf{x})$ була функцією розподілу деякого випадкового вектора \mathbf{X} , треба додати ще одну:

(4) для довільних \mathbf{a}, \mathbf{b} вираз (1) невід'ємний.

Приклад

Нехай

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \geq 0, \text{ або } x + y \leq 1, \text{ або } y \leq 0; \\ 1, & \text{в іншій частині площини.} \end{cases}$$

Ця функція задовольняє умови (1) – (3), але для неї $F(1, 1) - (F(1, \frac{1}{2})) - F(\frac{1}{2}, 1) + F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -1$, і, відповідно, четверта умова не виконується.

Отже, функція $F(x, y)$ не може бути сумісною функцією розподілу, оскільки інакше ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в прямокутник $\frac{1}{2} \leq X < 1, \frac{1}{2} \leq Y < 1$ буде від'ємним числом.

Нехай випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ має сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$. Маргінальну функцію розподілу в.в. X_k визначають так:

$$F_{X_k}(x_k) = P(X_k < x_k) = F_{\mathbf{X}}(\infty, \dots, \infty, x_k, \infty, \dots, \infty),$$

де x_k – k -ий аргумент функції $F_{\mathbf{X}}$.

Сумісні щільності

Випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ та його сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$ називають абсолютно неперервними, якщо існує невід'ємна вимірна функція $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \equiv f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$ така, що

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \int_{(-\infty, \mathbf{x})} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \end{aligned}$$

для будь-якого

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Функцію $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ називають *сумісною щільністю* випадкового вектора та сумісної функції розподілу $F_{\mathbf{X}}$.

Якщо випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}$, то його координати мають маргінальні щільності

$$f_{X_k}(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, y_n) dy_1 \dots dy_{k-1} dy_{k+1} \dots dy_n.$$

Властивості сумісної щільності

- $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$;

Якщо випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}$, то його координати мають маргінальні щільності

$$f_{X_k}(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, y_n) dy_1 \dots dy_{k-1} dy_{k+1} \dots dy_n.$$

Властивості сумісної щільності

- $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$;
- $P(x_{11} < X_1 < x_{12}, \dots, x_{n1} < X_n < x_{n2}) = \int_{x_{11}}^{x_{12}} \dots \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$;

Якщо випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}$, то його координати мають маргінальні щільності

$$f_{X_k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, y_n) dy_1 \dots dy_{k-1} dy_{k+1} \dots dy_n.$$

Властивості сумісної щільності

- $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$;
- $P(x_{11} < X_1 < x_{12}, \dots, x_{n1} < X_n < x_{n2}) = \int_{x_{11}}^{x_{12}} \dots \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$;
- якщо сумісна $f_{\mathbf{X}}$ -я розподілу диференційовна, то сумісна щільність (м. всюди) збігається з похідною $f_{\mathbf{X}}$ -ї р-лу:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n).$$

Розглянемо пару в.в. (X, Y) з сумісною щільністю $f_{X,Y}(x, y)$ та перетворення (U, V) цієї пари, де

$$U = g_1(X), \quad V = g_2(Y),$$

g_1, g_2 – деякі борелівські функції.

Якщо заміна змінних $(x, y) \mapsto (u, v)$, $u = g_1(x, y)$, $v = g_2(x, y)$, взаємно однозначна на області значень в.в. X та Y , то сумісна щільність $f_{U,V}(u, v)$ на основі $f_{X,Y}(x, y)$ обчислюють так:

$$f_{U,V}(u, v) = \mathbb{I}_{\{(u,v) \in \text{Range}(g_1, g_2)\}} f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|,$$

де

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \det \begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{pmatrix}$$

– якобіан оберненого перетворення $(u, v) \mapsto (x, y)$:

$$\det \begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{pmatrix}^{-1}.$$

Наявність модуля $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ гарантує, що $f_{u, v}(u, v) \geq 0$.

Числові характеристики випадкових векторів

Обчислення математичного сподівання вимірної функції $g(X_1, \dots, X_n)$ від випадкового вектора $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ проводять так:

- для дискретних в.в.:

$$\begin{aligned} E g(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} g(x_1, \dots, x_n) p_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} g(x_1, \dots, x_n) P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n), \end{aligned}$$

де суму обчислюють по всіх можливим значенням x_1, \dots, x_n , яких набувають в.в. X_1, \dots, X_n ;

- для абсолютно неперервних в.в.:

$$E g(X_1, \dots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Нехай X та Y – дві в.в. зі скінченними другими моментами.
Величину

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EXEY$$

називають *коваріацією* в.в. X та Y . Вона є скінченною за нерівністю Коші:

$$\text{cov}(X, Y) \leq \sqrt{E(X - EX)^2(Y - EY)^2} = \sqrt{DXDY} = \sigma_X\sigma_Y.$$

Коефіцієнтом кореляції в.в. X та Y називають безрозмірну в.в.

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y},$$

яка внаслідок нерівності Коші набуває значень з $[-1, 1]$.

Коефіцієнт кореляції вказує на те, наскільки лінійно залежні між собою в.в. X та Y , зокрема, коли $|\rho(X, Y)| = 1$, то існують числа $a \neq 0$ та b такі, що $P(X = aY + b) = 1$, причому $\text{sign } a = \text{sign } \rho(X, Y)$.

Коефіцієнт кореляції вказує на те, наскільки лінійно залежні між собою в.в. X та Y , зокрема, коли $|\rho(X, Y)| = 1$, то існують числа $a \neq 0$ та b такі, що $P(X = aY + b) = 1$, причому $\text{sign } a = \text{sign } \rho(X, Y)$.

В.в. X та Y називають *некорельованими*, якщо $\text{cov}(X, Y) = 0$. Якщо в.в. X та Y незалежні, то вони некорельовані. Обернене твердження неправильне.

$$D(X \pm Y) = DX + DY \pm \text{cov}(X, Y).$$

Зокрема, коли в.в. X та Y незалежні, то

$$D(X \pm Y) = DX + DY.$$

Задача

Розглянемо три в.в. X , Y та Z , які мають однакову дисперсію $\sigma^2 = 4$. Припустимо, що X не залежить від Y та Z , але в.в. Y й Z – корельовані, зокрема, з коефіцієнтом кореляції $\rho_{YZ} = 0,5$.

- i) Обчисліть коваріацію між X та U , де $U = Y + Z$.
- ii) Обчисліть коваріацію між Z та V , де $V = 3X - 2Y$.
- iii) Обчисліть дисперсію в.в. $W = 3X - 2Y + Z$.

Незалежні в.в.

В.в. X_1, \dots, X_n незалежні в сукупності, якщо всі породжені ними випадкові події незалежні в сукупності, тобто для довільних $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k).$$

Зокрема, в.в. X_1, \dots, X_n незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли відповідна сумісна функція розподілу для всіх $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ розкладається у добуток

$$\begin{aligned} F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k < x_k) = \prod_{k=1}^n F_{X_k}(x_k). \end{aligned}$$

Дискретні в.в. X_1, \dots, X_n будуть незалежними в сукупності тоді й лише тоді, коли

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^n P(X_k = x_k)$$

для всіх можливих значень (x_1, \dots, x_n) .

Коли випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$, то абсолютно неперервні в.в.

X_1, \dots, X_n незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(x_k).$$

Має місце наступна теорема про перетворення незалежних в.в.

Теорема

Нехай в.в. X_1, \dots, X_n незалежні в сукупності, а $g_1(x), \dots, g_n(x)$ – борелівські. Тоді в.в. $g(X_1), \dots, g(X_n)$ незалежні в сукупності.

Доведення.

Для довільних множин $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq n$ розглянемо

$$\begin{aligned} & P(g_1(X_1) \in B_1, \dots, g_n(X_n) \in B_n) \\ &= P(X_1 \in g_1^{-1}(B_1), \dots, X_n \in g_n^{-1}(B_n)) \prod_{k=1}^n P(X_k \in g_k^{-1}(B_k)) \\ &= \prod_{k=1}^n P(g(X_k) \in B_k). \end{aligned}$$

Розподіл суми незалежних в.в.

Невід'ємні цілочисельні в.в.

Якщо X та Y – незалежні невід'ємні цілочисельні в.в. з розподілами

$$p_k = P(X = k), \quad q_k = P(Y = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

та генератрисами $G_X(t)$ і $G_Y(t)$ відповідно, то сума $X + Y$ має розподіл

$$P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^k p_j q_{k-j},$$

та генератрису

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t).$$

Абсолютно неперервні в.в.

Теорема

Якщо X та Y – незалежні в.в. із ϕ -ми розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$, щільностями $f_X(x)$ і $f_Y(x)$ та генератрисами моментів $M_X(t)$ і $M_Y(t)$ відповідно, то сума $X + Y$ має ϕ -ю розподілу

$$F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y) dF_X(y),$$

яку називають згорткою функцій розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$ і позначають $F_X * F_Y(x) = F_{X+Y}(x)$;

Абсолютно неперервні в.в.

Теорема

Якщо X та Y – незалежні в.в. із ϕ -ми розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$, щільностями $f_X(x)$ і $f_Y(x)$ та генератрисами моментів $M_X(t)$ і $M_Y(t)$ відповідно, то сума $X + Y$ має ϕ -ю розподілу

$$F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y) dF_X(y),$$

яку називають згорткою функцій розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$ і позначають $F_X * F_Y(x) = F_{X+Y}(x)$; щільність, яка дорівнює згортці щільностей $f_X(x)$ і $f_Y(x)$, тобто

$$f_X * f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x-y) f_X(y) dy,$$

та генератрису моментів

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t).$$

Доведення.

Оскільки в.в. X та Y незалежні, то $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.

$$\begin{aligned} P(X + Y < a) &= \iint_{\{(x,y): x+y < a\}} dF_{X,Y}(x,y) \\ &= \iint_{\{(x,y): x+y < a\}} dF_X(x)dF_Y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{(x,y): x+y < a\}} dF_X(x)dF_Y(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{x: x < a-y\}} dF_X(x) dF_Y(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \mathbb{I}_{X \in \{x: x < a-y\}} dF_Y(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) dF_Y(y) = F_X * F_Y(a).
\end{aligned}$$

Далі, використовуючи заміну $x = u - y$, маємо

$$\begin{aligned}
F_X * F_Y(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) dF_Y(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) f_Y(y) dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{(x,y): x+y < a\}} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{u: u < a\}} f_X(u-y) f_Y(y) du dy \\
&= \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-y) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^a f_X * f_Y(u) du.
\end{aligned}$$

Нарешті,

$$\begin{aligned}
M_{X+Y}(t) &= Ee^{t(X+Y)} \\
&= Ee^{tX} e^{tY} = Ee^{tX} Ee^{tY} \\
&= M_X(t) M_Y(t).
\end{aligned}$$

Умовні розподіли та щільності

Розподіл X для певного значення Y називають *умовним розподілом X при заданому $Y = y$* .

Дискретні в.в.

Умовний розподіл X при заданому $Y = y$ для дискретних в.в. X та Y дорівнює

$$\begin{aligned} p_{X|Y=y}(x|y) &= P(X = x | Y = y) \\ &= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}, \end{aligned}$$

$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$ – сумісний розподіл в.в. X та Y .

Умовний розподіл $p_{X|Y=y}(x|y)$ визначають лише для тих значень y , для яких розподіл $p_Y(y) = P(Y = y) > 0$.

Абсолютно неперервні в.в.

Припустимо, що пара (X, Y) має сумісну щільність $f_{X,Y}$. Розглянемо умовну ймовірність події $X \leq x$ за умови $y < Y \leq y + h, h > 0$:

$$P(X < x | y < Y \leq y + h) = \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+h} f_{X,Y}(u, v) dv du}{\int_y^{y+h} f_Y(v) dv}.$$

Абсолютно неперервні в.в.

Припустимо, що пара (X, Y) має сумісну щільність $f_{X,Y}$. Розглянемо умовну ймовірність події $X \leq x$ за умови $y < Y \leq y + h$, $h > 0$:

$$P(X < x | y < Y \leq y + h) = \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+h} f_{X,Y}(u, v) dv du}{\int_y^{y+h} f_Y(v) dv}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на h . Тоді при $h \rightarrow 0$ отримуємо умовну функцію розподілу в.в. X при заданому $Y = y$

$$F_{X|Y=y}(x|y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, y) du.$$

Відповідна умовна щільність в.в. X при заданому $Y = y$ дорівнює

$$f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}. \quad (2)$$

Ці умовні функції розподілу визначають лише для тих значень y , для яких $f_Y(y) > 0$.

Умовне математичне сподівання

Умовне математичне сподівання в.в. X за умови, що $Y = y$ визначають, як

$$\begin{aligned} E(X|Y = y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X|Y=y}(x|y)dx \\ &= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X,Y}(x,y)dx, \end{aligned}$$

за припущення, що інтеграл у правій частині абс. збіжний.

Умовне математичне сподівання

Умовне математичне сподівання в.в. X за умови, що $Y = y$ визначають, як

$$\begin{aligned} E(X|Y = y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X|Y=y}(x|y)dx \\ &= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X,Y}(x, y)dx, \end{aligned}$$

за припущення, що інтеграл у правій частині абс. збіжний.

Якщо розглядати y як змінну величину, то права частина є функцією від y . Зокрема, ототожнюючи y із в.в. Y , отримаємо в.в., яку називають *регресією X на Y* та позначають

$$E(X|Y).$$

Ця в.в. є функцією лише однієї змінної Y (не X)!

Для довільної борелівської функції $h(x, y)$ можна отримати більш загальне визначення, замінивши в.в. X на $h(X, Y)$:

$$E(h(X, Y)|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)f_{X|Y=y}(x|y)dx.$$

Аналогічно, умовне математичне сподівання $E(h(X, Y)|Y)$ можна розглядати як в.в., яка є функцією від Y .

Для довільної борелівської функції $h(x, y)$ можна отримати більш загальне визначення, замінивши в.в. X на $h(X, Y)$:

$$E(h(X, Y)|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)f_{X|Y=y}(x|y)dx.$$

Аналогічно, умовне математичне сподівання $E(h(X, Y)|Y)$ можна розглядати як в.в., яка є функцією від Y .

Якщо вибрати $h(X, Y) = (X - E(X|Y))^2$, тоді математичне сподівання цієї функції за умовного розподілу X при заданому Y є дисперсією відповідного умовного розподілу:

$$D(X|Y) = E((X - E(X|Y))^2|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2.$$

Очевидно, що вона також є функцією від Y .

Теорема (Формула повного математичного сподівання)

$$EX = E(E(X|Y)), \quad (3)$$

тобто математичне сподівання від умовного математичного сподівання X при даному Y дорівнює математичному сподіванню X .

Теорема (Формула повного математичного сподівання)

$$EX = E(E(X|Y)), \quad (3)$$

тобто математичне сподівання від умовного математичного сподівання X при даному Y дорівнює математичному сподіванню X .

Доведення.

І) Нехай X та Y – дискретні в.в. Тоді

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \sum_y E(X|Y = y)P(Y = y) \\ &= \sum_y \left(\sum_x xP(X = x|Y = y) \right) P(Y = y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_y \sum_x xP(X = x, Y = y) = \sum_y \sum_x xP(X = x|Y = y)P(Y = y) \\ &= \sum_x x \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_x xP(X = x) = E(X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_y \sum_x xP(X = x, Y = y) = \sum_y \sum_x xP(X = x|Y = y)P(Y = y) \\
 &= \sum_x x \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_x xP(X = x) = E(X).
 \end{aligned}$$

II) Нехай X та Y – абсолютно неперервні в.в. Оскільки

$$E(X|Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X,Y}(x, y)dx,$$

то $E(E(X|Y)) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|Y = y)f_Y(y)dy$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y) dx f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = E(X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y) dx f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = E(X). \end{aligned}$$

Теорема (Формула повної дисперсії)

$$DX = E(D(X|Y)) + D(E(X|Y)). \quad (4)$$

Доведення.

$$\begin{aligned}DX &= EX^2 - (EX)^2 = E(E(X^2|Y)) - (E(E(X|Y)))^2 \\ &= E(D(X|Y) + (E(X|Y))^2) - (E(E(X|Y)))^2 \\ &= E(D(X|Y)) + (E(E(X|Y))^2 - (E(E(X|Y)))^2) \\ &= E(D(X|Y)) + D(E(X|Y)).\end{aligned}$$



Ймовірнісні нерівності

Лема (Загальна нерівність Чебишова)

Нехай g – додатна неспадна функція, а в.в. $X \geq 0$. Тоді для довільної сталої $c > 0$

$$P(X \geq c) \leq \frac{Eg(X)}{g(c)}.$$

Ймовірнісні нерівності

Лема (Загальна нерівність Чебишова)

Нехай g – додатна неспадна функція, а в.в. $X \geq 0$. Тоді для довільної сталої $c > 0$

$$P(X \geq c) \leq \frac{Eg(X)}{g(c)}.$$

Доведення.

З невід'ємності та монотонності g випливає нерівність $g(X) \geq g(c)\mathbb{I}_{X \geq c}$. Тоді за монотонністю математичного сподівання

$$Eg(X) \geq Eg(c)\mathbb{I}_{X \geq c} = g(c)P(X \geq c).$$

Наслідок (Нерівність Чебишова для дисперсій)

Якщо існує DX , то для довільного $\varepsilon > 0$

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \quad (5)$$

Наслідок (Нерівність Чебишова для дисперсій)

Якщо існує DX , то для довільного $\varepsilon > 0$

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \quad (5)$$

Доведення.

Із загальної нерівності Чебишова для невід'ємної в.в. $(X - EX)^2$ та функції $g(X) = X$ отримуємо

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = P((X - EX)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(X - EX)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$



Лема (Нерівність Дженсена)

Нехай функція $g(x)$ опукла донизу, а в.в. X та $g(X)$ інтегровні.

$$g(EX) \leq Eg(X). \quad (6)$$

Лема (Нерівність Дженсена)

Нехай функція $g(x)$ опукла донизу, а в.в. X та $g(X)$ інтегровні.

$$g(EX) \leq Eg(X). \quad (6)$$

Доведення.

Для довільної опуклої донизу ф-ї g у кожній точці x існує опорна пряма, графік якої повністю лежить під графіком g :

$$g(x) \geq g(x_0) + k(x_0)(x - x_0), \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}.$$

Підставимо у цю нерівність $x = X$, $x_0 = EX$:

$$\begin{aligned} Eg(X) &\geq E(g(EX)) + k(EX)(X - EX) \\ &= g(EX) + k(EX)E(X - EX) = g(EX). \end{aligned}$$

Наслідок (Нерівність Ляпунова)

Якщо $1 \leq a \leq b$ та $E|X|^b < \infty$, то

$$(E|X|^a)^{\frac{1}{a}} \leq (E|X|^b)^{\frac{1}{b}}. \quad (7)$$

Наслідок (Нерівність Ляпунова)

Якщо $1 \leq a \leq b$ та $E|X|^b < \infty$, то

$$(E|X|^a)^{\frac{1}{a}} \leq (E|X|^b)^{\frac{1}{b}}. \quad (7)$$

Доведення.

Оскільки функція $g(x) = x^{\frac{b}{a}}$, $x \geq 0$, опукла донизу, то (7) випливає з нерівності Дженсена (6):

$$(E|X|^a)^{\frac{b}{a}} = g(E|X|^a) \leq Eg(|X|^a) = E|X|^b.$$



Лема (Нерівність Гельдера)

Якщо числа $p, q > 0$ спряжені, тобто $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} (E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Лема (Нерівність Гельдера)

Якщо числа $p, q > 0$ спряжені, тобто $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} (E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Доведення.

Підставимо в елементарну нерівність

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

вирази $x = \frac{|X|}{(E|X|^p)^{\frac{1}{p}}}$ та $y = \frac{|Y|}{(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}}$:

$$\frac{|XY|}{(E|X|^p)^{\frac{1}{p}} (E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{E|X|^p}{pE|X|^p} + \frac{E|Y|^q}{qE|Y|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Наслідок (Нерівність Коші)

$$(EXY)^2 \leq EX^2EY^2.$$

Доведення.

Випливає з нерівності Гельдера при $p = q = 2$. □

Закон великих чисел

Теорема (Закон великих чисел)

Нехай X_1, \dots, X_n – н.о.р.в.в. зі скінченними математичним сподіванням $EX_j = m_1$ та дисперсією $DX = \sigma^2$. Покладемо

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ має місце границя

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m_1\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty.$$

Інакше кажучи, усереднена сума $\frac{S_n}{n}$ н.о.р.в.в. X_1, \dots, X_n із середнім $EX_j = m_1$ та дисперсією $DX = \sigma^2$ збігається за ймовірністю до m_1 .

Доведення.

Скористаємося нерівністю Чебишова (5):

$$\begin{aligned} & P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m_1\right| \geq \varepsilon\right) \\ &= P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - m_1)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n DX_j \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

а цей вираз прямує до нуля, коли $n \rightarrow \infty$.



Доведення також можна провести за умови, що

$$D\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = o(n^2).$$

Для н.о.р. в.в. X_j , що мають розподіл Бернуллі з ймовірністю успіху θ , тобто $EX_j = \theta$, закон великих чисел стверджує, що після великої кількості випробувань середнє число успіхів буде наближатися до θ .

Задача

У таблиці наведено сумісний розподіл імовірностей для двох дискретних в.в. X та Y :

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 1$	0,15	0,20	0,25
$Y = 2$	0,05	0,15	0,20

Обчисліть $E(X|Y = 2)$.

Задача

- i) Нехай $Y = X_1 + X_2$ є сумою двох незалежних в.в. X_1 та X_2 . Доведіть, що генератриса моментів Y є добутком генератрис моментів X_1 та X_2 .
- ii) Нехай X_1 та X_2 мають гамма-розподіл із параметрами (α_1, λ) та (α_2, λ) відповідно. За допомогою генератиси моментів покажіть, що $Y = X_1 + X_2$ також є гамма-розподіленою в.в., та вкажіть параметри розподілу.

Задача

- i) Доведіть, що для неперервних в.в. X та Y справедливе співвідношення $EY = E(E(Y|X))$.
- ii) Припустимо, що в.в. X має стандартний нормальний розподіл, а умовний розподіл пуассонівської в.в. Y для заданого значення $X = x$ має математичне сподівання $g(x) = x^2 + 1$. Обчисліть EY та DY .

Задача

Число позовів X , які виникають за кожним полісом із деякого класу, моделюють як пуассонівську в.в. з середнім λ . Нехай $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ є повторною випадковою вибіркою з розподілу X , та нехай $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

- i) За допомогою генератрис моментів покажіть, що $\sum_{i=1}^n X_i$ має розподіл Пуассона з середнім $n\lambda$.
- ii) Скажіть, коротко аргументувавши, буде чи ні в.в. $2X_1 + 5$ мати розподіл Пуассона.
- iii) Скажіть, коротко аргументувавши, буде чи ні в.в. \bar{X} мати розподіл Пуассона у разі, коли $n = 2$.
- iv) Яким буде асимптотичний розподіл \bar{X} , коли n велике?

Суміші розподілів

Нехай заданий умовний розподіл в.в. X при заданому значенні в.в. $Y = y$. Функцію розподілу

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|Y=y}(x|y) dF_Y(y) \quad (8)$$

будемо називати *сумішшю функції розподілу $F_{X|Y=y}(x|y)$ по y відносно розподілу $F_Y(y)$* .

У разі, коли існують відповідні щільності в.в. X та Y , функцію

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x|y) f_Y(y) dy \quad (9)$$

будемо називати *сумішшю щільності розподілу $f_{X|Y=y}(x|y)$ по y відносно щільності $f_Y(y)$* .

Суміші пуассонівських розподілів

Якщо $F_{X|Y=y}(x|y)$ – розподіл Пуассона з параметром y , то розподіл $F_X(x)$ називають *змішаним пуассонівським*. Якщо $F_Y(y)$ – розподіл Пуассона, то розподіл $F_X(x)$ називають *пуассонівськи-змішаним*.

Суміші пуассонівських розподілів

Якщо $F_{X|Y=y}(x|y)$ – розподіл Пуассона з параметром y , то розподіл $F_X(x)$ називають *змішаним пуассонівським*. Якщо $F_Y(y)$ – розподіл Пуассона, то розподіл $F_X(x)$ називають *пуассонівськи-змішаним*.

Задача

Припустимо, що в (8) $F_{X|Y=y}(x|y)$ – розподіл Пуассона з параметром λy , $\lambda > 0$ – деяка стала, а $F_Y(y)$ – функція розподілу Пуассона з параметром μ . Знайти розподіл в.в. X .

Розв'язок

Очевидно, для $k = 0, 1, 2, \dots$ розподіл X має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda j} \frac{\lambda^k j^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^j}{j!} = e^{-\mu} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} (\mu e^{-\lambda})^j \frac{j^k}{j!} \\ &= e^{-\mu + \mu e^{-\lambda}} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} j^k e^{-\mu e^{-\lambda}} \frac{(\mu e^{-\lambda})^j}{j!} \\ &= e^{-\mu + \mu e^{-\lambda}} \frac{\lambda^k m_k(\mu e^{-\lambda})}{k!}, \end{aligned}$$

де $m_k(\lambda)$ – k -ий момент розподілу Пуассона з параметром $\lambda > 0$. Отриманий закон відомий, як розподіл Неймана типу А.

Задача

Припустимо, що в (8) $F_{X|Y=y}(x|y)$ – гамма-розподіл з параметрами y та $\alpha > 0$, тобто зі щільністю

$$f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{y^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-yx}, \quad x > 0.$$

Знайти пуассонівськи-змішаний розподіл в.в. X .

Розв'язок

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{y^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-yx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} y^\alpha e^{-yx} \frac{\lambda^y}{y!} \\&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda + \lambda e^{-x}} \sum_{y=0}^{\infty} y^\alpha e^{-\lambda e^{-x}} \frac{(\lambda e^{-x})^y}{y!} \\&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\{-\lambda + \lambda e^{-x}\} m_\alpha(\lambda e^{-x}),\end{aligned}$$

де $m_\alpha(\lambda)$ – α -ий момент р-лу Пуассона з параметром $\lambda > 0$.

При $\alpha = 1$ $f_{X|Y=y}(x|y)$ є щільністю експоненційного розподілу з параметром y , а отримана функція є щільністю розподілу Гумбеля (розподілу екстремальних значень типу III):

$$f_X(x) = \lambda \exp\{\lambda - x + e^{-x}\}, \quad x > 0.$$

При $\alpha = 1$ $f_{X|Y=y}(x|y)$ є щільністю експоненційного розподілу з параметром y , а отримана функція є щільністю розподілу Гумбеля (розподілу екстремальних значень типу III):

$$f_X(x) = \lambda \exp\{\lambda - x + e^{-x}\}, \quad x > 0.$$

Нехай

$$F_{X|Y=y}(x|y) = G^{*y}(x)$$

для деякої функції розподілу $G(x)$, де $G^{*k}(x)$ – k -кратна згортка функції $G(x)$ з собою:

$$G^{*k}(x) = G * G^{k-1}(x), \quad k \geq 0,$$

$G^{*0}(x)$ – функція розподілу з одиничним стрибком в нулі. Тоді співвідношення (8) набуває вигляду

$$F_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} G^{*k}(x). \quad (10)$$

Розподіли вигляду (10) називають *узагальненими пуассонівськими*. Прикладом узагальненого пуассонівського розподілу є складний пуассонівський розподіл.

Розподіл Парето як суміш експоненційних розподілів

Припустимо, що кожен окремий поліс із великого страхового портфеля призводить до збитків, які розподілені за експоненційним законом, який є одним із найпростіших для моделювання збитків. Зрозуміло, що у більшості страхових портфелів середнє значення збитків є різним для різних застрахованих осіб. Тобто модель портфелю передбачає, що для кожного окремого поліса збитки розподілені за експоненційним законом зі своїм значенням параметра λ .

Розподіл Парето як суміш експоненційних розподілів

Припустимо, що кожен окремий поліс із великого страхового портфеля призводить до збитків, які розподілені за експоненційним законом, який є одним із найпростіших для моделювання збитків. Зрозуміло, що у більшості страхових портфелів середнє значення збитків є різним для різних застрахованих осіб. Тобто модель портфелю передбачає, що для кожного окремого поліса збитки розподілені за експоненційним законом зі своїм значенням параметра λ .

Як адекватний підхід до відображення мінливості у середніх значеннях збитків виступає припущення, що значення параметра λ експоненційних розподілів у межах портфелю самі є реалізацією деякої в.в.

Припустимо, що мінливість параметра λ можна зобразити за допомогою гамма-розподілу з параметрами α та δ і, відповідно, щільністю

$$f_{\lambda}(\nu) = \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \nu^{\alpha-1} e^{-\delta\nu}, \quad \nu > 0.$$

У такій задачі моделювання величини збитків X для всього портфелю гамма-розподіл використовують для усереднення експоненційних розподілів, трактуючи його як “змішувальний”, а одержаний розподіл збитків як суміш розподілів.

Маргінальну щільність розподілу X можна отримати через сумісну та умовну щільності в.в. X та λ :

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_0^{\infty} f_{X,\lambda}(x, \nu) d\nu = \int_0^{\infty} f_{\lambda}(\nu) f_{X|\lambda=\nu}(x|\nu) d\nu \\&= \int_0^{\infty} \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \nu^{\alpha-1} e^{-\delta\nu} \nu e^{-\nu x} d\nu = \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \nu^{\alpha} e^{-(\delta+x)\nu} d\nu \\&= \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\delta+x)^{\alpha+1}} = \frac{\alpha\delta^{\alpha}}{(\delta+x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0,\end{aligned}$$

у якій можна впізнати щільність розподілу Парето з параметрами α та δ .

Узагальнений розподіл Парето як суміш розподілів Ерланґа

Коли збитки мають експоненційний розподіл з параметром λ , який, у свою чергу, є гамма-розподіленою в.в. з параметрами α , δ , маргінальний розподіл величини збитків є розподілом Парето.

Цей результат можна узагальнити, припустивши, що збитки мають розподіл Ерланґа (гамма-розподіл з параметрами k та λ , коли k – ціле), а λ має гамма-розподіл з параметрами α та δ . Випадок $k = 1$ зводиться до розглянутого вище.

Для довільного k маргінальна щільність величини збитків X дорівнює

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f_{X,\lambda}(x, \nu) d\nu = \int_0^{\infty} f_{\lambda}(\nu) f_{X|\lambda=\nu}(x|\nu) d\nu$$

Для довільного k маргінальна щільність величини збитків X дорівнює

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_0^{\infty} f_{X,\lambda}(x, \nu) d\nu = \int_0^{\infty} f_{\lambda}(\nu) f_{X|\lambda=\nu}(x|\nu) d\nu \\&= \int_0^{\infty} \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \nu^{\alpha-1} e^{-\delta\nu} \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\nu x} d\nu \\&= \frac{\delta^{\alpha} x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)} \int_0^{\infty} \nu^{\alpha+k-1} e^{-(\delta+x)\nu} e^{-\nu x} d\nu \\&= \frac{\delta^{\alpha}\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)} \frac{x^{k-1}}{(\delta+x)^{\alpha+k}}, \quad x > 0.\end{aligned}$$

Отримана функція є щільністю узагальненого розподілу Парето.

Задача

Розглянемо дві в.в. X та Y із сумісною щільністю розподілу $f_{X,Y}(x,y) = \frac{4}{3}(1 - xy)$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

- i) Визначити маргінальні щільності розподілів X та Y .
- ii) Показати, що умовна щільність Y за умови $X = x$ дорівнює $f_{Y|X=x}(y|x) = 2\frac{1-xy}{2-x}$, $0 < y < 1$.
- iii) (a) Обчисліть умовне математичне сподівання $E(Y|X = x)$ як функцію від x та звідси отримайте EY .
(b) Перевірте відповідь в (a), обчисливши EY безпосередньо через маргінальну щільність розподілу Y .

Задача

Кількість позовів X , які виникають за кожним полісом із деякого портфелю, залежить від іншої в.в. Y . Припускають, що X має розподіл Пуассона з середнім Y . Також вважають, що сама в.в. Y має гамма-розподіл із параметрами (a, b) . Знайдіть вирази для безумовних моментів EX та EX^2 , використовуючи відповідні умовні моменти.

Задача

В.в. X має розподіл Пуассона з середнім Y , де Y сама є в.в. Розподіл Y є логнормальним з параметрами μ та σ^2 . Отримайте вирази для безумовного математичного сподівання EX та дисперсії DX , використовуючи відповідні умовні моменти.

Задача

В.в. X та Y пов'язані таким чином: в.в. X за умови $Y = y$ має нормальний розподіл $N(2y, y^2)$. Y є нормально розподіленою $N(200, 100)$ в.в. Обчисліть безумовну дисперсію DX .