Статистичні методи теорії ризику

© Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

2 семестр 2012

Зміст

1 Лекція 12

Зміст

1. Лекція 12
2. Збитки, які виникли, але не заявлені
   - Вступ
   - Метод ланцюгових сходів

Вступ

Розрахунок резервів для покриття майбутніх позовів і забезпечення платоспроможності страхової компанії, зокрема для розрахунку резервів у випадку збитків, що виникли, але не заявлені потрібен у тому випадку, коли між виникненням страхової події і остаточним визначенням величини позову та розміру відшкодування проходить деякий час.

Існує багато причин затримки точної інформації щодо остаточної суми відшкодування збитків. Запізнення може виникати у період від моменту настання страхової події до подачі позову, а також у період від подання позову і остаточним відшкодуванням збитків за позовами.

Очевидно, що страховій компанії необхідно знати скільки треба буде заплатити за позовами, щоб дати змогу розрахувати відповідний резерв та забезпечити її платоспроможність. Існують різні методи розрахунку резервів у цьому випадку, кожен з яких має специфічні обмеження, різні припущення щодо математичної моделі і, відповідно, дає різні прогнозні оцінки.

Один з цих методів – це метод ланцюгових сходів, який дуже популярний у актуаріїв – практиків. Про важливість розробки методів для розрахунку резервів у випадку збитків, які виникли, але не заявлені, свідчить той факт, що державна комісія з регулювання ринку фінансових послуг, яка 17.02.2004 р. прийняла розпорядження №3104 «Правила формування, обліку та розміщення страхових резервів за видами страхування іншими, ніж страхування життя», включила туди спеціальний розділ «Методи розрахунку збитків, які виникли, але не заявлені».

I.1. Трикутники розвитку

Збитки, які виникли, але не заявлені, зустрічаються у різних типах страхування, коли може пройти певний час між виникненням страхової події та остаточним визначенням розміру відшкодування. Існують різні методи розрахунку резервів у цьому випадку. Одним з цих методів є метод ланцюгових сходів.

При використанні методу ланцюгових сходів зручно зображати дані щодо позовів у формі трикутників. Такі трикутники називають трикутниками розвитку або «run-off» трикутниками.

Будемо називати:

- рік настання збитків (рік події) – це той рік, у якому відбулася страхова
подія і у страховика виник ризик;.

- період розвитку або запізнення – це кількість років до виплати.

Введемо позначення. Нехай S_{ij}, $1 \le i \le n$ – це сумарна виплата в j-ому році розвитку за збитками, які відбулися в i-ому році настання збитків. Тоді за n років стають відомими значення S_{ij}, для яких $i + j \le n + 1$. Ці значення і утворюють «run-off» трикутник.

Загальну форму «run-off» трикутника можна зобразити наступним чином.

Рік настання	Рік розвитку							
збитків	1	$\dots$	j	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$n-1$	n
1	S_{11}	$\dots$	S_{1j}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
i	S_{i1}	$\dots$	S_{ij}	$\dots$	$\dots$	$S_{i,n-i+1}$		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$				
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$					
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$S_{n-j+1,j}$					
$n-1$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,1}$							

Величина $S_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}$ є сумарним збитком i-го року події. На даний момент є відомою лише частина сумарного збитку $\sum_{j=1}^{n-i+1} S_{ij}$.

Наше завдання – оцінити невідому частину $R_i = \sum_{j=n-i+1}^{n} S_{ij}$, де R_i – розмір необхідного резерву i-го року настання збитків, тобто доповнити трикутник до прямокутника.

Інколи трикутники будують в іншій формі.

Позначимо C_{ij}, $1 \leq i \leq n$ – це збитки сплачені на кінець j-го року розвитку за збитками, які відбулися в i-ому році події. Аналогічно до попереднього будується трикутник.

Рік настання	Рік розвитку							
збитків	1	...	j	...	...	...	$n-1$	n
1	C_{11}	...	C_{1j}	...	...	...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...		
i	C_{i1}	...	C_{ij}	...	...	$C_{i,n-i+1}$		
...	...	...	...	...				
...	...	...	...					
...	...	...	$C_{n-j+1,j}$					
$n-1$	$C_{n-1,1}$							
n	$C_{n,1}$							

Зрозуміло, що

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{j} S_{ik},$$

а

$$S_{ij} = C_{ij} - C_{i,j-1}.$$

Тоді

$$R_i = \sum_{j=n-i+2}^{n} S_{ij} = \sum_{j=n-i+1}^{n} \left(C_{ij} - C_{i,j-1}\right) = C_{in} - C_{i,n-i+1}$$

Існують два основних типи трикутників:

1. трикутник сплачених збитків – трикутник, зіставлений з даних, які позначають суму сплачених збитків за k років. Тут значення завжди невід'ємні.
2. трикутник заявлених збитків - трикутник, зіставлений з даних, які позначають суму сплачених збитків за k років та сформованих до цього моменту резервів заявлених збитків. В цьому випадку значення в трикутнику можуть бути від'ємними.

Трикутник сплачених збитків, порівняно з трикутником заявлених збитків, є більш надійним для розрахунків, але для оцінки кінцевих збитків необхідна більша кількість років. Різниця трикутника заявлених збитків і трикутника сплачених збитків представляє собою трикутник розвитку.

I.2.Опис методу

Метод ланцюгових сходів базується на ряді припущень. Сформулюємо перше з них:

1. Розподіл кінцевого збитку для всіх років настання події однаковий.

Представимо сумарний збиток для i-го року

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} = C_{in}$$

у вигляді:

$$C_{in} = C_{i1} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} F_{ij}$$

, де

$$F_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$$

– коефіцієнт зростання сумарних виплат від j-го року до $(j+1)$.

Таке представлення можливе тільки якщо $C_{ij} > 0$ для $\forall i, j$. В іншому випадку добуток треба починати з першого додатного C_{ij}.

Тоді перше припущення, що розподіл кінцевого збитку для всіх років настання події однаковий, можна трактувати як незалежність математичного сподівання F_{ij} від року настання збитків i. Тобто,

$$E\left(F_{ij}\right) = f_j,$$

для $\forall 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$,
де f_j – це середній приріст збитків при переході від j-го до $(j+1)$ року (множники розвитку).
У методі ланцюгових сходів оцінки параметрів f_j визначають так:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} F_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}},$$

для $\forall 1 \leq j \leq n-1$.

Сумарний збиток оцінюється наступним чином:

$$\hat{C}_{in} = C_{i,n-i+1}\hat{f}_{n-i+1} \cdot ... \cdot \hat{f}_{n-1}$$

для $\forall 2 \leq i \leq n$.
А резерв:

$$\hat{R}_i = C_{i,n-i+1}\left(\hat{f}_{n-i+1} \cdot ... \cdot \hat{f}_{n-1} - 1\right).$$

Таким чином, прогноз ґрунтується лише на поточному рівні збитку $C_{i,n-i+1}$ року події i. При цьому всі попередні збитки ігноруються.

Отже, метод ланцюгових сходів припускає відсутність корисної інформації у всіх станах збитків, крім поточного.

Розглянемо інші припущення.

2. Роки настання збитків $\{C_{i1}, ..., C_{in}\}$ - незалежні.

3. Існують множники розвитку f_j, $1 \leq j \leq n-1$ такі, що

$$E\left(\left. \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \right| C_{i1}, ..., C_{ij} \right) = f_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1,$$

при $C_{ij} > 0$, або, що те саме,

$$E\left(C_{i,j+1} | \, C_{i1}, ..., C_{ij} \right) = C_{ij} f_j.$$

Тобто, умовне математичне сподівання $C_{i,j+1}$ залежить лише від $C_{i,j}$ і не залежить від попередніх станів.

Позначимо накопиченні до поточного часу дані
$G = \{\, C_{ij} |\, i + j \le n + 1 \}$

Теорема

Якщо виконуються припущення 2 і 3, тобто роки настання збитків $\{C_{i1}, ..., C_{in}\}$ *незалежні та* $\exists\ f_j,\ 1 \le j \le n-1$*:*

$$E\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \middle| \, C_{i1}, ..., C_{ij} \right) = f_j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n-1,$$

при $C_{ij} > 0$*, то*
1) $E\left(C_{in} |\, G \right) = C_{i,n-i+1} f_{n-i+1} \cdot ... \cdot f_{n-1}, 1 \le i \le n.$
2) Оцінки

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}$$

є незміщеними і некорельованими, причому:

$$E\left(\hat{f}_{n-i+1} \cdot ... \cdot \hat{f}_{n-1} \right) = f_{n-i+1} \cdot ... \cdot f_{n-1}.$$

Доведення.
Позначимо $G_i = \{ C_{ij} | 1 \le j \le n - i + 1\}$.

Тоді

$$E (C_{in} | G) = E (C_{in} | G_i)$$

$$= E (E (C_{in} | C_{i1}, ..., C_{i,n-1}) | G_i)$$

$$= E (C_{i,n-1} f_{n-1} | G_i)$$

$$= f_{n-1} \cdot E (C_{i,n-1} | G_i) .$$

Далі проробимо аналогічні дії для $E\left(C_{i,n-1}\middle|G_i\right)$. Отримаємо:

$$E\left(C_{i,n-1}\middle|G_i\right) = f_{n-1}\cdot f_{n-2}\cdot E\left(C_{i,n-2}\middle|G_i\right).$$

Продовжуючи далі, за методом математичної індукції отримаємо:

$$E\left(C_{in}\middle|G\right) = E\left(C_{i,n-i+1}\middle|G_i\right)f_{n-i+1}\cdot\ldots\cdot f_{n-1} = C_{i,n-i+1}f_{n-i+1}\cdot\ldots\cdot f_{n-1}.$$

Отже, умову 1) теореми доведено.

2) Спочатку доведемо незміщеністьf_j.
Позначимо $B_j = \{ C_{ik} | \, k \le j, \; i + k \le n + 1\}$, $1 \le j \le n$.
Оскільки виконуються припущення 2 і 3, то маємо, що

$$E\left(C_{i,j+1} \middle| B_j \right) = C_{i,j} f_j, 1 \le i \le n - j + 1.$$

Тоді

$$E\left(\hat{f}_j \middle| B_j \right) = E\left(\frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{ij}} \middle| B_j \right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} E\left(C_{i,j+1} \middle| B_j \right)}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}} =$$

$$= \frac{f_j \cdot \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}} = f_j.$$

Значить,

$$E\left(\hat{f}_j\right) = E\left(E\left(\hat{f}_j \middle| B_j\right)\right) = f_j.$$

Отже, оцінка є незміщеною.
Тепер доведемо некорельованість.
Візьмемо $k \leq j$. Отримаємо:

$$E\left(\hat{f}_j\hat{f}_k\right) = E\left(E\left(\hat{f}_j\hat{f}_k \middle| B_j\right)\right) = E\left(\hat{f}_k E\left(\hat{f}_j \middle| B_j\right)\right) = f_j \cdot E\left(\hat{f}_k\right) = f_j f_k,$$

що і доводить некорельованість оцінки $\hat{f}_k$.

Доведемо рівність:

$$E\left(\hat{f}_{n-i+1}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-1}\right)=f_{n-i+1}\cdot\ldots\cdot f_{n-1}.$$

Вона отримується методом математичної індукції з попереднього:

$$E\left(\hat{f}_{n-i+1}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-1}\right)=E\left(E\left(\hat{f}_{n-i+1}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-1}\middle| B_{n-1}\right)\right)$$

$$=E\left(\hat{f}_{n-i+1}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-2}E\left(\hat{f}_{n-1}\middle| B_{n-1}\right)\right)=$$

$$=f_{n-1}\cdot E\left(\hat{f}_{n-i+1}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-2}\right)=\ldots=f_{n-i+1}\cdot\ldots\cdot f_{n-1}.$$

Отже, умову 2) теореми доведено.
Зауваження. Аналогічно доводиться некорельованістьF_{ij} для кожного фіксованого року збитків i, $1\leq j\leq n$.

І.3. Точність методу

Резерв збитку R_i має бути оцінений величиною $\hat{R}_i$, яка буде мінімізувати середнє квадратичне відхилення прогнозу від дійсного значення – середню квадратичну помилку. Ми будемо розглядати умовну середньо квадратичну помилку при заданому G:

$$E\left(\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2 \middle| G\right),$$

бо нас цікавлять тільки майбутні відхилення, а безумовна середньо квадратична помилка усереднила б відхилення по всім можливим наборам D:

$$E\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2 = E\left(E\left(\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2 \middle| D\right)\right).$$

Позначимо:

$$mse(\hat{R}_i) = E\left(\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2 \middle| G \right)$$

– середньо квадратичну помилку $\hat{R}_i$.

Теорема

Середньо квадратичні помилки $mse(\hat{R}_i)$ та $mse(\hat{C}_{in})$ однакові.

Доведення.
Оскільки

$$R_i = C_{in} - C_{i,n-i+1}$$

і

$$\hat{R}_i = C_{i,n-i+1}\left(\hat{f}_{n-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{n-1} - 1\right) = \hat{C}_{in} - C_{i,n-i+1},$$

то маємо, що

$$mse(\hat{R}_i) = E\left(\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2 \middle| G\right)$$

$$= \mathsf{E}\left(\left(C_{in} - C_{i,n-i} - \hat{C}_{in} + C_{i,n-i}\right)^2 \middle| G\right) =$$

$$= \mathsf{E}\left(\left(C_{in} - \hat{C}_{in}\right)^2 \middle| G\right) = mse(\hat{C}_{in}).$$

Тобто,

$$mse(\hat{R}_i) = mse(\hat{C}_{in}),$$

що і треба було довести.

Для будь-якого скаляра a має місце рівність

$$E\left(\left.(X-g(Y))^2\right| Y\right)=D\left(X\right|Y)+\left(E\left(X\right|Y)-g(Y)\right)^2,$$

де

$$D\left(X\right|Y)=Cov\left(X,X\right|Y)==E\left(\left.(X-E\left(X\right|Y))^2\right| Y\right).$$

Використавши попереднє, маємо:

$$mse\left(\hat{C}_{in}\right)=E\left(\left.\left(C_{in}-\hat{C}_{in}\right)^2\right| G\right)=D\left(\left.C_{in}\right| G\right)+\left(E\left(\left.C_{in}\right| G\right)-\hat{C}_{in}\right)^2.$$

Тепер сформулюємо четверте припущення методу ланцюгових сходів. Це припущення зумовлено тим, що мінімальне значення дисперсії оцінки

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} \omega_{ij} C_{i,j+1}}{C_{ij}}$$

з вагами

$$\omega_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}, 1 \leq i \leq n-j+1$$

досягається, коли ваги обернено пропорційні дисперсіям

$$D\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \middle| \, C_{ij} \right)$$

при фіксованому j (тобто дисперсія $D\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \middle| \, C_{ij} \right)$ прямо пропорційна $\frac{1}{C_{ij}}$). Це випливає з наступної теореми.

Теорема

Нехай $T_1, \ldots, T_n$ *– незалежні незміщені оцінки величини* t*, тобто*

$$E\left(T_k\right) = t$$

для $\forall 1 \leq k \leq n$*, і нехай*

$$T = \omega_1 T_1 + \ldots + \omega_n T_n$$

– лінійна комбінація оцінок, причому $\omega_1 + \ldots + \omega_n = 1$*, тобто* $E\left(T\right) = t$*. Тоді серед всіх можливих лінійних комбінацій виду* T *мінімальну дисперсію має комбінація з вагами* ω_k *обернено пропорційними до* $D\left(T_k\right)$*, тобто*

$$\omega_k = \frac{\omega}{D\left(T_k\right)}$$

для $\forall 1 \leq k \leq n$*.*

На основі сказаного вище, отримаємо таке припущення:

Існують постійні коефіцієнти пропорційності $\sigma_1^2, ..., \sigma_{n-1}^2$ такі, що при $C_{ij} > 0$:

$$D\left(\left. \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \right| C_{i1}, ..., C_{ij} \right) = \frac{\sigma_j^2}{C_{ij}},$$

для $\forall 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$, або

$$D\left(C_{i,j+1} \middle| C_{i1}, ..., C_{ij} \right) = C_{ij} \cdot \sigma_j^2.$$

Оцінка невідомого параметра σ_j^2 має такий вигляд:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2, 0 \le j \le n-1.$$

Виведемо звідси наведену раніше формулу для оцінки $\hat{f}_j$. Вона випливає з умови мінімальності $\hat{\sigma}_j^2$:

$$\frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2 \to \min .$$

Очевидно, що це рівносильно наступному:

$$\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2 \to \min .$$

Розглянемо цю суму:

$$\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}-\hat{f}_j\right)^2=\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}\left(\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}\right)^2-2\hat{f}_j\cdot\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}+\left(\hat{f}_j\right)^2\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n-j+1}\frac{\left(C_{i,j+1}\right)^2}{C_{ij}}-\sum_{i=1}^{n-j+1}2\hat{f}_j C_{i,j+1}+\sum_{i=0}^{n-j}C_{ij}\left(\hat{f}_j\right)^2=$$

$$\left(\hat{f}_j\right)^2\sum_{i=1}^{n-j+1}C_{ij}-2\hat{f}_j\sum_{i=1}^{n-j+1}C_{i,j+1}+\sum_{i=1}^{n-j+1}\frac{\left(C_{i,j+1}\right)^2}{C_{ij}}.$$

Найменше значення досягається, коли

$$\hat{f}_j=\frac{\sum_{i=1}^{n-j+1}C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1}C_{ij}}.$$

Отже, отримали формулу, яку наводили раніше.

Теорема

Нехай виконуються припущення 2, 3 і 4. Тоді середньо квадратична помилка оцінки резерву $\hat{R}_i$ за методом ланцюгових сходів оцінюється величиною

$$mse\left(\hat{R}_i\right) = \left(s.e\left(\hat{R}_i\right)\right)^2 = \hat{C}_{in}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ij}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{kj}}\right),$$

де

$$\hat{C}_{ij} = C_{i,n-i+1}\hat{f}_{n-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{j-1}, j > n-i+1.$$

Для спрощення запису приймемо, що $\hat{C}_{i,n-i} = C_{i,n-i}$.

Доведення.
Має місце формула

$$mse(\hat{R}_i) = mse(\hat{C}_{in}) = D(\, C_{in}|\, G) + (E(\, C_{in}|\, D) - \hat{C}_{in})^2.$$

Позначимо $G_{ij} = \{\, C_{ik}|\, 1 \leq k \leq j\}$.
Тоді, за другим припущенням, перший доданок дорівнює

$$D\left(\, C_{in}|\, G\right) = D\left(\, C_{in}|\, G_{i,n+1-i}\right).$$

Застосуємо рекурсивну формулу, яка виконується при $j \geq n+1-i$

$$D\left(C_{i,j+1} \middle| G_{i,n+1-i}\right)$$

$$= E\left(D\left(C_{i,j+1} \middle| G_{ij}\right) \middle| G_{i,n+1-i}\right) + D\left(E\left(C_{i,j+1} \middle| G_{ij}\right) \middle| G_{i,n+1-i}\right) =$$

$$= E\left(C_{ij} \middle| G_{i,n+1-i}\right) \sigma_j^2 + D\left(C_{ij} \middle| G_{i,n+1-i}\right) f_j^2$$

та рівність

$$E\left(C_{i,j+1} \middle| G_{i,n+1-i}\right) = E\left(C_{ij} \middle| G_{i,n+1-i}\right) f_j.$$

Враховуючи, що

$$E\left(\left. C_{i,n+1-i} \right| G_{i,n+1-i}\right) = C_{i,n+1-i}$$

і

$$D\left(\left. C_{i,n+1-i} \right| G_{i,n+1-i}\right) = 0,$$

отримаємо

$$D\left(\left. C_{in} \right| G_{i,n+1-i}\right) = \sum_{j=n+1-i}^{n-1} E\left(\left. C_{ij} \right| G_{i,n+1-i}\right) \sigma_j^2 f_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}^2 =$$

$$= C_{i,n+1-i} \sum_{j=n+1-i}^{n-1} f_{n+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{j-1} \sigma_j^2 f_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}^2.$$

Якщо замінити невідомі параметри f_j, σ_j^2 незміщеними оцінками$\hat{f}_j$ і $\hat{\sigma}_j^2$, то знайдемо оцінку для дисперсії $D\left(\, C_{in} \middle|\, G\right)$:

$$C_{i,n+1-i} \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{f}_{n+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{j-1} \sigma_j^2 f_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{n-1}^2$$

$$= \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{C}_{ij} \hat{\sigma}_j^2 \hat{f}_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{n-1}^2$$

$$= \hat{C}_{in}^2 \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \hat{C}_{ij}}.$$

У другому доданку виразу для $mse\left(\hat{R}_i\right)$

$$\left(E\left(\left.C_{in}\right|G\right)-\hat{C}_{in}\right)^2=C_{i,n+1-i}^2\left(f_{n+1-i}\cdot\ldots\cdot f_{n-1}-\hat{f}_{n+1-i}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_{n-1}\right)^2$$

не можемо замінити параметри f_j оцінками, бо отримаємо нуль, хоча значення цього доданку майже завжди відмінні від нуля.

Для оцінки другого доданку ми не будемо вважати спостереження заданими, а тому незмінними. Але варіювати будемо не весь трикутник G, а тільки необхідну для цього частину, щоб базис $C_{i,n+1-i}$ помилки

$$\left(E\left(\left.C_{in}\right|G\right)-\hat{C}_{in}\right)^2$$

не використовувався у наступній побудові математичного сподівання.

Позначимо $B_j = \{ C_{ik} | \, i + k \leq n + 1, k \leq j \}, 1 \leq j \leq n$.
Використовуючи рівності, отримані в попередньому параграфі,

$$E\left(C_{in} | \, G \right) = C_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \cdot ... \cdot f_{n-1} =$$

$$= C_{i,n+1-1} E\left(\hat{f}_{n+1-i} \cdot ... \cdot \hat{f}_{n-1} \middle| B_{n+1-i} \right) = E\left(\hat{C}_{in} \middle| B_{n+1-i} \right)$$

отримаємо

$$\left(E\left(C_{in} | \, G \right) - \hat{C}_{in} \right)^2 = \left(\hat{C}_{in} - \left(\hat{C}_{in} \middle| B_{n+1-i} \right) \right)^2 .$$

Останній вираз, так же як і раніше $D\left(C_{in} | \, G_{i,n+1-i} \right)$, можна обчислити рекурсивно.

Спочатку розглянемо перетворення

$$
\begin{aligned}
&E\left(\left(\hat{C}_{i,j+1}-E\left(\hat{C}_{i,j+1}\middle| B_{n+1-i}\right)\right)^2\middle| B_{n+1-i}\right)=D\left(\hat{C}_{i,j+1}\middle| B_{n+1-i}\right)=\\
&=E\left(D\left(\hat{C}_{ij}\hat{f}_j\middle| B_j\right)\middle| B_{n+1-i}\right)+D\left(E\left(\hat{C}_{ij}\hat{f}_j\middle| B_j\right)\middle| B_{n+1-i}\right)=\\
&=E\left(\hat{C}_{ij}^2 D\left(\hat{f}_j\middle| B_j\right)\middle| B_{n+1-i}\right)+D\left(\hat{C}_{ij}\middle| B_{n+1-i}\right)f_j^2=\\
&=E\left(\hat{C}_{ij}^2 D\left(\hat{f}_j\middle| B_j\right)\middle| B_{n+1-i}\right)\\
&+E\left(\left(\hat{C}_{ij}-E\left(\hat{C}_{ij}\middle| B_{n+1-i}\right)\right)^2 f_j^2\middle| B_{n+1-i}\right).
\end{aligned}
$$

Відкинувши оператор умовного математичного сподівання при заданному B_{n+1-i} в першому і останньому виразах, отримаємо наближену рекурсивну формулу

$$\left(\hat{C}_{i,j+1} - E\left(\hat{C}_{i,j+1}\middle| B_{n+1-i}\right)\right)^2$$

$$\approx \hat{C}_{ij}^2 D\left(\hat{f}_j\middle| B_j\right) + \left(\hat{C}_{ij} - E\left(\hat{C}_{ij}\middle| B_{n+1-i}\right)\right)^2 f_j^2.$$

Використовуючи цю формулу та враховуючи рівності

$$\hat{C}_{i,j+1}^2 = \hat{C}_{ij}^2 f_j^2,$$

$$\hat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}$$

та $\left(\hat{C}_{i,n+1-i} - E\left(\hat{C}_{i,n+1-i}\middle| B_{i,n+1-i}\right)\right)^2 = 0$,
отримаємо

$$\left(\hat{C}_{in} - E\left(\left. C_{in}\right| G\right)\right)^2$$

$$= \left(\hat{C}_{in} - E\left(\left.\hat{C}_{in}\right| B_{n+1-i}\right)\right)^2$$

$$\approx \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{C}_{ij}^2 D\left(\left.\hat{f}_j\right| B_j\right) f_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}^2,$$

де

$$D\left(\left.\hat{f}_j\right| B_j\right) = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=n}^{n-j} C_{ij}}.$$

Звідси, після заміни f_j на $\hat{f}_j$ і σ_j^2 на $\hat{\sigma}_j^2$ та враховуючи рівність $\hat{C}_{ij}\hat{f}_{j+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{n-1} = \hat{C}_{in}/\hat{f}_j$, і випливає справедливість твердження.

Позначимо через

$$R = R_2 + ... + R_n$$

– сукупний резерв. Очевидно, що він оцінюється як:

$$\hat{R} = \hat{R}_2 + ... + \hat{R}_n.$$

Стандартну помилку величини $\hat{R}$ не можна розраховувати як суму квадратів стандартних помилок резервів $\hat{R}_i$ окремих років настання збитків, бо самі величини $\hat{R}_i$не є незалежними.

Теорема

Нехай виконуються припущення 2, 3 і 4. Тоді середньо квадратична помилка сукупного резерву оцінюється величиною

$$mse\left(\hat{R}\right) = \left(s.e.\left(\hat{R}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(s.e.\left(\hat{R}_i\right)\right)^2 + \hat{C}_{in} \left(\sum_{k=i+1}^{n} \hat{C}_{kn} \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\sum_{m=1}^{n-j} C_{mj}} \right).$$

Доведення.

Враховуючи отримані раніше формули для $mse\left(\hat{R}_i\right)$, маємо

$$mse\left(\sum_{i=2}^{n}\hat{R}_i\right)$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=2}^{n}\hat{R}_i - \sum_{i=2}^{n}R_i\right)^2 \middle| G\right) = E\left(\left(\sum_{i=2}^{n}\hat{C}_{in} - \sum_{i=1}^{2}C_{in}\right)^2 \middle| G\right) =$$

$$= D\left(\sum_{i=2}^{n}C_{in}\middle| G\right) + \left(E\left(\sum_{i=2}^{n}C_{in}\middle| G\right) - \sum_{i=2}^{n}\hat{C}_{in}\right)^2.$$

Позначимо$G_i = \{C_{in}, ..., C_{i,n+1-i}\}$.

Враховуючи друге припущення про незалежність років події, величиниC_{in} і C_{kn} при $i \neq k$умовно некорельовані:

$$E\left(C_{in}C_{kn}\middle|\,G\right) = E\left(C_{in}C_{kn}\middle|\,G_i, G_k\right) = E\left(E\left(C_{in}C_{kn}\middle|\,G_i, G_k, C_{in}\right)\middle|\,G_i, G_k\right)$$
$$= E\left(C_{in}E\left(C_{kn}\middle|\,G_i, G_k, C_{in}\right)\middle|\,G_i, G_k\right) = E\left(C_{in}E\left(C_{kn}\middle|\,G_k\right)\middle|\,G_i, G_k\right) =$$
$$= E\left(C_{in}\middle|G_i, G_k\right) \cdot E\left(C_{kn}\middle|\,G_k\right) = E\left(C_{in}\middle|\,G\right) \cdot E\left(C_{kn}\middle|\,G\right)$$

Звідси випливає, що$D\left(\sum_{i=2}^{n} C_{in}\middle|\,G\right) = \sum_{i=2}^{n} D\left(C_{in}\middle|\,G\right)$.

Доданки $D\left(C_{in}\middle| G\right)$ були обчислені при доведені попередньої теореми. Тому зразу будемо розглядати другий доданок у виразі для $mse\left(\hat{R}\right)$.

$$\left(E\left(\sum_{i=2}^{n} C_{in}\middle| G\right) - \sum_{i=2}^{n} \hat{C}_{in}\right)^2 = \left(\sum_{i=2}^{n} \left(E\left(C_{in}\middle| G\right) - \hat{C}_{in}\right)\right)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(E\left(C_{in}|G\right) - \hat{C}_{in}\right)^2$$
$$+ \sum_{2\le i<k\le n} 2\left(\hat{C}_{in} - E\left(C_{in}\middle| G\right)\right)\left(\hat{C}_{kn} - E\left(C_{kn}\middle| G\right)\right).$$

В результаті отримаємо, що

$$mse\left(\sum_{i=2}^{n} \hat{R}_i\right)$$
$$= \sum_{i=2}^{n} mse\left(\hat{R}_i\right) + \sum_{i<k} 2\left(\hat{C}_{in} - E\left(C_{in}\middle| G\right)\right)\left(\hat{C}_{kn} - E\left(C_{kn}\middle| G\right)\right).$$

Як і в попередньому доведенні, для підрахунку подвоєної суми скористаємося рівністю

$$E\left(C_{in} \middle| G \right) = E\left(\hat{C}_{in} \middle| B_{n+1-i} \right),$$

де $B_j = \{ C_{ik} \,| i + k \leq n + 1, k \leq j \}, 1 \leq j \leq n$. Розглянемо спочатку умовне мат. сподівання при заданому B_{n+1-i}

$$\begin{aligned}
&E\left(\left(\hat{C}_{in} - E\left(\hat{C}_{in} \middle| B_{n+1-i} \right) \right) \cdot \left(\hat{C}_{kn} - E\left(C_{kn} \middle| G \right) \right) \middle| B_{n+1-i} \right) = \\
&= E\left(\left(\hat{C}_{in} - E\left(\hat{C}_{in} \middle| B_{n+1-i} \right) \right) \cdot \left(\hat{C}_{kn} \middle| B_{n+1-i} \right) \middle| B_{n+1-i} \right) \\
&= Cov\left(\hat{C}_{in}, \hat{C}_{kn} \middle| B_{n+1-i} \right),
\end{aligned}$$

де врахована рівність $E(\left(\hat{C}_{in} - E\left(\hat{C}_{in} \middle| B_{n+1-i} \right) \right) \times$

$$\times \left(E\left(\hat{C}_{kn} \middle| B_{n+1-i} \right) - E\left(C_{kn} \middle| G \right) \right) \Big| B_{n+1-i}) = 0,$$

яка справедлива внаслідок скалярності другого множника при заданомуB_{n+1-i}.

Застосовуючи послідовно рекурсію при $j \geq n+1-i$ з початковим значенням $Cov\left(\hat{C}_{i,n+1-i}, \hat{C}_{k,n+1-i}\middle| B_{n+1-i}\right) = 0$:

$$
\begin{aligned}
&Cov\left(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1}\middle| B_{n+1-i}\right) = \\
&= E\left(Cov\left(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1}\middle| B_j\right)\middle| B_{n+1-i}\right) + \\
&+Cov\left(E\left(\hat{C}_{i,j+1}\middle| B_j\right), E\left(\hat{C}_{k,j+1}\middle| B_j\right)\middle| B_{n+1-i}\right) = \\
&= E\left(Cov\left(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1}\middle| B_j\right)\middle| B_{n+1-i}\right) + Cov\left(\hat{C}_{ij}, \hat{C}_{kj}\middle| B_{n+1-i}\right) f_j^2,
\end{aligned}
$$

отримаємо: Звідси випливає,
що$D\left(\sum_{i=2}^{n} C_{in}\middle| G\right) = \sum_{i=2}^{n} D\left(C_{in}\middle| G\right)$.

$$Cov\left(\hat{C}_{in}, \hat{C}_{kn}\middle| B_{n+1-i}\right)$$

$$= \sum_{j=n+1-i}^{n-1} E\left(Cov\left(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1}\middle| B_j\right)\middle| B_{n+1-i}\right) f_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}^2.$$

Отже,

$$E\left(\hat{C}_{in} - E\left(\left.C_{in}\right| G\right)\right) \cdot \left(\hat{C}_{kn} - E\left(\left.C_{kn}\right| G\right)\right) =$$
$$= E\left(\sum_{j=n+1-i}^{n-1} Cov\left(\left.\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1}\right| B_j\right) f_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}^2 \right| \left. B_{n+1-i}\right).$$

Відкинувши додатково введений оператор умовного математичного сподівання при заданомуB_{n+1-i}, отримаємо наближену рівність

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{C}_{in} - E\left(\left.C_{in}\right| G\right)\right) \cdot \left(\hat{C}_{kn} - E\left(\left.C_{kn}\right| G\right)\right) \\
&\approx \sum_{j=n+1-i}^{n-1} Cov\left(\left.\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1}\right| B_j\right) f_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}^2 = \\
&= \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{C}_{ij} \cdot \hat{C}_{kj} \cdot D\left(\left.\hat{f}_j\right| B_j\right) \cdot f_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}^2 \\
&= \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{C}_{ij} \cdot \hat{C}_{kj} \cdot \sigma_j^2 \cdot f_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}^2 / \sum_{n=1}^{n-j} C_{nj}.
\end{aligned}$$

Тут була використана формула для $D\left(\left.\hat{f}_j\right| B_j\right)$, доведена в попередній теоремі.

Зробивши заміну параметрів їх оцінками і враховуючи рівність

$$\hat{C}_{in} = \hat{C}_{ij}\hat{f}_j \cdot ... \cdot \hat{f}_{n-1},$$

отримаємо оцінку для $mse\left(\hat{R}\right)$, вказану у теоремі.