Статистичні методи теорії ризику

© Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

І семестр 2012

Зміст

Проста модель Бюллмана та однорідна довірча оцінка

Досі ми розглядали лише один зазначений ризик, для якого отримали довірчу оцінку, що ґрунтується лише на спостереженнях за цим ризиком. Однак на практиці зазвичай наявні спостереження за всім портфелем подібних ризиків, занумерованих $i = 1, 2, \dots, I$.

Позначимо через $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$ вектор спостережень ризику i та через W_i його профіль. Припустимо, що для кожного ризику в портфелі $\mathbf{X}_i$ та W_i задовольняють припущенням 1 та 2 минулої лекції. Таким чином, ми приходимо до простої моделі Бюллмана.

Проста модель Бюлмана

(Б1) В.в. X_{ij} умовно при $W_i = \nu$ незалежні однаково розподілені з функцією розподілу F_ν й умовними моментами

$$\mu(\nu) = \mathsf{E}(X_{ij}|W_i = \nu), \quad \sigma^2(\nu) = \mathsf{D}(X_{ij}|W_i = \nu).$$

(Б2) Пари в.в. $(W_1, \mathbf{X}_1), \ldots, (W_I, \mathbf{X}_I)$ є н.о.р.

Перше запитання: довірчу оцінку чого ми хочемо знайти? Зрозуміло, що нам потрібно оцінити індивідуальну премію $\mu(W_i)$ для кожного ризику i. За визначенням, довірчі оцінки $\widehat{\widehat{\mu(W_i)}}$ мають бути лінійними функціями від спостережень.

Друге запитанням: лінійними за чим? Чи повинна довірча оцінка $\mu(W_i)$ бути лінійної функцією лише за спостережнням за ризиком i, чи за спостереженнями з усього портфелю?

Загалом довірчу оцінку визначають як найкращу лінійну функцію за всіма спостереженнями з портфелю, тобто $\widehat{\widehat{\mu(W_i)}}$ є найкращою оцінкою у класі

$$\left\{\widehat{\mu(W_i)}\colon \widehat{\mu(W_i)} = a + \sum_{k=1}^{I}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}X_{kj};\ a, b_{kj} \in \mathbb{R}\right\}$$

Легко перевірити, що вона співпадає з оцінкою з теореми...

$$\widehat{\widehat{\mu(W_i)}} = \alpha\bar{X}_i + (1-\alpha)\mu_0,$$

де

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{kj}.$$

Маючи повний портфель ризиків, ми можемо визначити довірчу оцінку іншого типу, яку називають *однорідною довірчою оцінкою.* Це найкраща оцінка у класі колективно незміщених оцінок

$$\left\{ \widehat{\mu(W_i)} \colon \widehat{\mu(W_i)} = \sum_{k=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} X_{kj}, \quad \mathsf{E}\widehat{\mu(W_i)} = \mathsf{E}\mu(W_i);\ b_{kj} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Будемо її позначати

$$\widehat{\widehat{\mu(W_i)}}^{\text{одн}}$$

Теорема

(Неоднорідна) довірча оцінка $\widehat{\widehat{\mu(W_i)}}$ *та однорідна довірча оцінка* $\widehat{\widehat{\mu(W_i)}}^{\,одн}$ *у простій моделі Бюллмана мають вигляд*

$$\widehat{\widehat{\mu(W_i)}} = \alpha \bar{X}_i + (1-\alpha)\mu_0$$

$$\widehat{\widehat{\mu(W_i)}}^{\,одн} = \alpha \bar{X}_i + (1-\alpha)\bar{X},$$

де

$$\alpha = \frac{n}{n+\sigma^2/\tau^2}, \quad \bar{X}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{kj}, \quad \bar{X} = \frac{1}{nI}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$$

Модель Бюлмана-Штрауба

Розглянемо ситуацію, коли актуарій має оцінити ризики для автомобільного страхування відповідальності перед третіми сторонами.

На основі певних характеристик ризику, ризики групують у різні класи (тарифні позиції), і тепер треба обчислити ризикову премію для кожного з цих класів.

Для кожного i-го класу ризику доступна така інформація:

- S_{ij} – сукупна величина позовів у році j;
- V_j – кількість років перебування під ризиком у році j (контракти, що були чинними протягом усього року, рахують як 1, всі інші – пропорційно часу);
- $X_{ij} = S_{ij}/V_j$ – середня величина позову за рік перебування під ризиком у році j;
- N_{ij} – кількість позовів у році j;
- $F_{ij} = N_{ij}/V_j$ – частота позовів у році j;
- $Y_{ij} = S_{ij}/N_{ij}$ – середня величина позову у році j.

Припустимо, що у простій моделі Бюллмана кожен ризик характеризується власним специфічним параметром W_i. Спостережимо, однак, що умова

$$\mathrm{D}(X_{ij}|W_i) = \sigma^2(W_i)$$

більше не є доречною. Дисперсія має залежати від об'ємної міри V_{ij}.

Розглянемо спеціальний випадок, коли кожен ризик діє протягом повного року, тоді об'ємна міра, тобто кількість років під ризиком, є цілим числом. Зауважимо також, що у цьому разі

$$X_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{v=1}^{V_{ij}} S_{ij}^{(v)},$$

де $S_{ij}^{(v)}$ – сумарна величина позовів від v-го ризику в класі i. Оскільки X_{ij} є середнім V_{ij} ризиків, які можна вважати умовно незалежними один від одного, то

$$\mathrm{D}(X_{ij}|W_i) = \sigma^2(W_i)/V_{ij}.$$

Раціонально моделювати умовну дисперсію обернено пропорційно до відомої об'ємної міри (тут – кількості років під ризиком) й у випадку, коли V_{ij} є сумою частин року під ризиком (деякі контракти можуть діяти лише частину j-го року).

Якщо нас цікавить середня величина позову чи частота позовів, виникає такий самий тип поведінки.

Припущення моделі Бюллмана-Штрауба

Ризик i характеризується індивідуальним профілем ν_i, який є реалізацією в.в. W_i, а також:

(БШ1) умовно за W_i в.в. X_{ij} є незалежні з

$$\mathrm{E}(X_{ij}|W_i) = \mu(W_i), \quad \mathrm{D}(X_{ij}|W_i) = \frac{\sigma^2(W_i)}{w_{ij}}.$$

(БШ2) Пари в.в. $(W_1, \mathbf{X}_1), \ldots, (W_I, \mathbf{X}_I)$ є незалежними, а $W_1, W_2, \ldots$ є н.о.р. в.в.

Тут вжито вагові коефіцієнти w_{ij} замість об'ємної міри V_{ij}, щоб підкреслити можливість іншої інтерпретації.

Теорема

(Неоднорідна) довірча оцінка у моделі Бюллмана-Штрауба має вигляд

$$\widehat{\widehat{\mu(W_i)}} = \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i)\mu_0 = \mu_0 + \alpha_i(X_i - \mu_0),$$

де

$$\alpha_i = \frac{w_{i\cdot}}{wi\cdot + \sigma^2/\tau^2}, \quad \bar{X}_i = \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\cdot}} X_{ij}, \quad w_{i\cdot} = \sum_j w_{ij}.$$

Теорема

За припущень (БШ1)-(БШ2) квадратичні втрати довірчої оцінки $\widehat{\widehat{\mu(W)}}$ дорівнюють

$$E\left(\widehat{\widehat{\mu(W_i)}} - \mu(W_i)\right)^2 = (1-\alpha_i)\tau^2$$

$$= \alpha_i \frac{\sigma^2}{w_{i\cdot}}.$$

Теорема

Однорідна довірча оцінка у моделі Бюллмана-Штрауба має вигляд

$$\widehat{\widehat{\mu(W_i)}}^{\,одн} = \alpha_i X_i + (1-\alpha_i)\widehat{\widehat{\mu_0}} = \widehat{\widehat{\mu_0}} + \alpha_i(X_i - \widehat{\widehat{\mu_0}}),$$

де

$$\widehat{\widehat{\mu_0}} = \sum_{i=1}^{I} \frac{\alpha_i}{\alpha.} X_i, \quad \alpha. = \sum_{i=1}^{I} \frac{\alpha_i}{,} \quad \alpha_i = \frac{w_{i\cdot}}{wi\cdot + \sigma^2/\tau^2}.$$

Теорема (Властивість балансу)

За припущень (БШ1)-(БШ2) для однорідної довірчої оцінки у моделі Бюллмана-Штрауба справедлива рівність

$$\sum_{i,j} w_{ij} \widehat{\widehat{\mu(W_i)}}^{\,одн} = \sum_{i,j} w_{ij} X_{ij}.$$

Теорема

За припущень (БШ1)-(БШ2) квадратичні втрати однорідної довірчої оцінки $\widehat{\widehat{\mu(W)}}^{\,одн}$ *дорівнюють*

$$E\left(\widehat{\widehat{\mu(W_i)}}^{\,одн} - \mu(W_i)\right)^2 = (1-\alpha_i)\tau^2\left(1 + \frac{1-\alpha_i}{\alpha.}\right).$$