МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 23 № 2

Ужгород 2012

ББК 22.1+72.4 (4УКР)
У-33
УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В.В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2012. – Вип. 23, № 2. – 178 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою Ужгородського національного університету, протокол № 9 від 06.12.2012 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88016 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): (0312) 642725.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 517.9

С. І. Балога (Ужгородський нац. ун-т)

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОЖИНИ ОДНОГО КЛАСУ РОЗШИРЕНЬ НЕАВТОНОМНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

Using the concept of the Green-Samoilenko function of the problem of invariant tori, the integral sets of a one class of extensions of non-autonomous system on Torus are built. The problem regarding asymptotic stability of such sets was investigated.

Використовуючи поняття функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори, побудовано інтегральні множини одного класу розширень неавтономної системи на торі. Досліджено питання асимптотичної стійкості цих множин.

Тематика даної роботи пов'язана з теорією багаточастотних коливань, фундаментальні дослідження якої проведені в [1,2]. Основним результатом є достатні умови існування та асимптотичної стійкості інтегральних множин одного класу лінійних та слабконелінійних розширень неавтономної системи диференціальних рівнянь на торі.

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(t,\varphi),\ \dot{x} = A(t,\varphi)x + f(t,\varphi), \tag{1}$$

в якій $t \in R,\ x \in R^n,\ \varphi \in T^m$, T^m — $m-$вимірний тор; $a(t,\varphi), f(t,\varphi)$ і $A(t,\varphi)-$ неперервні по t векторні та матрична функції відповідно, неперервні і 2π-періодичні по $\varphi_j,\ j = 1, 2, ..., m$, обмежені при всіх $t \in R,\ \varphi \in T^m$. Крім того, $a(t,\varphi)$ — ліпшицева по φ_j функція рівномірно відносно $t \in R$. В [3] встановлено достатні умови існування інтегральних множин лінійних розширень неавтономної системи диференціальних рівнянь на торі. Виокремимо клас лінійних та слабконелінійних рівнянь, для яких ці умови виконуються. Позначимо через $\varphi_t(\tau,\varphi)$ розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi$. З компактності фазового простору першого з рівнянь системи (1) та припущень відносно функції $a(t,\varphi)$ випливає, що кожен розв'язок $\varphi_t(\tau,\varphi),\ \varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi$ існує при будь-яких $\tau \in R,\ \varphi \in T^m$ і може бути продовжений по t на всю дійсну вісь R. Позначимо через $\Omega^t_s(\tau,\varphi)$ матрицант однорідної системи

$$\dot{x} = A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x, \tag{2}$$

залежної від $\varphi \in T^m,\ \tau \in R$ як від параметрів. Покладемо

$$G(t,\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega^t_\tau(t,\varphi)C(\tau,\varphi_\tau(t,\varphi)),\ \tau \le t, \\ \Omega^t_\tau(t,\varphi)[C(\tau,\varphi_\tau(t,\varphi)) - E],\ \tau > t, \end{cases}$$

де $C(t,\varphi)$ — неперервна по $t \in R$, 2π-періодична по $\varphi_j, j = 1, 2, ..., m$, матрична функція, і назвемо $G(t,\tau,\varphi)$ функцією Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(t,\varphi),\ \dot{x} = A(t,\varphi)x,$$

якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \parallel G(t,\tau,\varphi) \parallel d\tau \le k < \infty \tag{3}$$

для всіх $\varphi \in T^m$, $t, \tau \in R$. Матриця $G(t,\tau,\varphi)$ неперервна для всіх $t,\tau \in R$, $\varphi \in T^m$, 2π-періодична по $\varphi_j, j = 1,2,...,m$, при $t \neq \tau$, а при $t = \tau$ вона має розрив першого роду зі стрибком

$$G(\tau + 0, \tau, \varphi) - G(\tau - 0, \tau, \varphi) = E.$$

Крім того, матриця $G(t, \tau, \varphi_t(\tau, \varphi))$ складається з розв'язків однорідної системи рівнянь (2), що розглядається при $\tau \leq t$ і $\tau > t$.

Припускаємо, що для всіх $\varphi \in T^m, \tau \in R$ існує границя

$$\lim_{|t| \to +\infty} A(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) = A. \tag{4}$$

Будемо розглядати випадок, коли матриця $A(t,\varphi)$ має блочно-діагональний вигляд:

$$A(t,\varphi) = \begin{pmatrix} A_-(t,\varphi) & 0 \\ 0 & A_+(t,\varphi) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці* A *відмінні від нуля:* $Re(\lambda_j(A)) \neq 0$, $(j = 1,2,...,n)$, *причому* $Re(\lambda_j(A)) < 0$, $j = 1,2,...,k$ *і* $Re(\lambda_j(A)) > 0$, $j = k+1,...,n$, *то для довільної неперервної і обмеженої по* $t \in R, \varphi \in T^m$, 2π*-періодичної по* φ_j, $j = 1,2,...,m$ *функції* $f(t,\varphi)$ *система (1) має інтегральну множину*

$$x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi) f(s, \varphi_s(t,\varphi)) ds. \tag{6}$$

Доведення. Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь, залежну від $\tau \in R, \varphi \in T^m$ як від параметрів:

$$\dot{x} = A(t, \varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t, \varphi_t(\tau,\varphi)). \tag{7}$$

Позначимо через $\Omega_s^t(\tau,\varphi,A_-)$ і $\Omega_s^t(\tau,\varphi,A_+)$ матриціанти однорідних систем

$$\dot{x_1} = A_-(t, \varphi_t(\tau,\varphi))x_1$$

і

$$\dot{x_2} = A_+(t, \varphi_t(\tau,\varphi))x_2$$

відповідно, залежних від $\tau \in R$, $\varphi \in T^m$ як від параметрів, для яких справедливі оцінки [4]

$$\begin{gathered} \|\Omega_s^t(\tau,\varphi,A_-)\| \leq Ke^{-\gamma(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \|\Omega_s^t(\tau,\varphi,A_+)\| \leq Ke^{\gamma(t-s)}, \quad t \leq s \end{gathered} \tag{8}$$

для деяких $K > 0$ і $\gamma > 0$ та для будь-яких $t,s \in R$, $\varphi \in T^m$.

Позначимо

$$G(t,s,\varphi) = \begin{cases} diag(\Omega_s^t(\tau,\varphi,A_-), 0), & t \geq s, \\ -diag(0, \Omega_s^t(\tau,\varphi,A_+)), & t < s. \end{cases}$$

Із нерівностей (8) випливає, що $G(t,s,\varphi)$ задовольняє оцінку

$$\|G(t,s,\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-s|} \tag{9}$$

при деяких додатних K, γ та при будь-яких $t, s \in R$, $\varphi \in T^m$. Враховуючи це, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(t,s,\varphi)\| \, ds \leq \frac{2K}{\gamma} < \infty.$$

Покажемо, що множина $x = u(t,\varphi)$ є інтегральною множиною системи (1). Для цього розглянемо функцію

$$x^*(t,\varphi) = u(t, \varphi_t(\tau,\varphi)),$$

де $\varphi_t(\tau,\varphi)$, $\varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi$ — розв'язок першого із рівнянь системи (1). Подамо $x^*(t,\varphi)$ у вигляді

$$x^*(t,\varphi) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(s, \varphi_s(t, \varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \int\limits_{t}^{+\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(s, \varphi_s(t, \varphi_t(\tau,\varphi)))ds.$$

Диференціюючи останнє співвідношення по t отримуємо:

$$\frac{dx^*(t,\varphi)}{dt} = \frac{d}{dt} u(t, \varphi_t(\tau,\varphi)) = A(t, \varphi_t(\tau,\varphi)) \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_s^t(\tau,\varphi) C(s, \varphi_s(\tau,\varphi)) f(s, \varphi_s(\tau,\varphi))ds +$$

$$+ C(t, \varphi_t(\tau,\varphi)) f(t, \varphi_t(\tau,\varphi)) - A(t, \varphi_t(\tau,\varphi)) \int\limits_{t}^{+\infty} \Omega_s^t(\tau,\varphi) [E - C(s, \varphi_s(\tau,\varphi))] \cdot$$

$$\cdot f(s, \varphi_s(\tau,\varphi))ds + [E - C(t, \varphi_t(\tau,\varphi))] f(t, \varphi_t(\tau,\varphi)) = A(t, \varphi_t(\tau,\varphi)) u(t, \varphi_t(\tau,\varphi)) +$$

$$+ f(t, \varphi_t(\tau,\varphi)) = A(t, \varphi_t(\tau,\varphi)) x^*(t,\varphi) + f(t, \varphi_t(\tau,\varphi))$$

для будь-яких $\tau \in R$, $\varphi \in T^m$. Отже, $x^*(t,\varphi) = u(t, \varphi_t(\tau,\varphi))$ є обмеженим для всіх $t \in R$ розв'язком системи рівнянь

$$\dot{x} = A(t, \varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t, \varphi_t(\tau,\varphi))$$

залежної від $\varphi \in T^m$, $\tau \in R$ як від параметрів. Це означає, що $x = u(t,\varphi)$ є інтегральною множиною системи (1). Крім того, враховуючи оцінку (9), має місце нерівність

$$\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in T^m} \|u(t,\varphi)\| \leq \frac{2K}{\gamma} \sup_{t \in R} \max_{\varphi \in T^m} \|f(t,\varphi)\|.$$

Теорема доведена.

Розглянемо слабконелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(t,\varphi),\ \dot{x} = F(t,\varphi,x) + A(t,\varphi)x, \tag{10}$$

в якій $a(t,\varphi)$ і $A(t,\varphi)$ такі як і в (1), $F(t,\varphi,x)$ визначена і обмежена для всіх $t \in R, \varphi \in T^m, x \in R^n$, неперервна, 2π-періодична по φ і рівномірно по $\varphi \in T^m$ задовольняє умову Ліпшиця по x

$$\left\| F(t,\varphi,x^{'}) - F(t,\varphi,x^{''}) \right\| \leq L \left\| x^{'} - x^{''} \right\| \tag{11}$$

для всіх $x^{'}, x^{''} \in R^n$. Наведемо достатні умови існування інтегральних множин системи (10).

Теорема 2. *Нехай для всіх* $\varphi \in T^m, \tau \in R$ *існує границя (4) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці* A *відмінні від нуля:* $Re\lambda_j(A) \neq 0$, $(j = 1,2,...,n)$, *причому* $Re\lambda_j(A) < 0$ *при* $j = 1,2,...,k$ *і* $Re\lambda_j(A) > 0$ *при* $j = k+1,...,n$. *Тоді для достатньо малої сталої Ліпшиця* L *система (10) має інтегральну множину*

$$x = u(t,\varphi),\ t \in R,\ \varphi \in T^m.$$

Доведення. Інтегральну множину шукатимемо методом послідовних наближень як границю послідовності множин

$$M_k:\ x = u^{(k)}(t,\varphi),\ t \in R, \varphi \in T^m,\ k = 1,2,...,\ u^{(0)}(t,\varphi) = 0,$$

кожна з яких є інтегральною множиною системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(t,\varphi),\ \dot{x} = A(t,\varphi)x + F(t,\varphi,u^{(k-1)}(t,\varphi)). \tag{12}$$

Згідно з теоремою 1, система рівнянь (12) має інтегральну множину

$$x = u^{(k)}(t,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi) F(s,\varphi_s(t,\varphi), u^{(k-1)}(s,\varphi_s(t,\varphi)))ds \tag{13}$$

для кожного $k = 1,2,...$. Покажемо, що таким методом можна побудувати інтегральну множину системи (10). Для цього треба переконатись в тому, що можна побудувати функцію $u^{(k)}(t,\varphi)$ для будь-якого $k = 1,2,...$, довести рівномірну збіжність

$$u^{(k)}(t,\varphi) \rightrightarrows u(t,\varphi),\ \varphi \in T^m,$$

і показати, що $x = u(t,\varphi)$ задає інтегральну множину системи (10). Оскільки

$$\left\| u^{(1)}(t,\varphi) \right\| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| G(t,s,\varphi) \| \, \| F(t,\varphi_s(t,\varphi),0) \| \, ds,$$

то, враховуючи оцінку (9),

$$\sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in\ T^m} \left\| u^{(1)}(t,\varphi) \right\| \leq \frac{2K}{\gamma} \sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in\ T^m} \| F(t,\varphi,0) \| .$$

Беручи до уваги умову (11) маємо:

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in T^m}\left\|u^{(k)}(t,\varphi)\right\| \le \sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in T^m}\left\|u^{(k)}(t,\varphi)-u^{(1)}(t,\varphi)\right\| + \sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in T^m}\left\|u^{(1)}(t,\varphi)\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{1-\frac{2K}{\gamma}L}\sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in\ T^m}\left\|u^{(1)}(t,\varphi)\right\| \le \frac{\frac{2K}{\gamma}}{1-\frac{2K}{\gamma}L}\sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in\ T^m}\left\|F(t,\varphi,0)\right\|.$$

Отже, можна побудувати множину M_k, яка є інтегральною множиною системи (12). Встановимо умови збіжності послідовності $u^{(k)}(t,\varphi)$.

Оцінимо різницю $u^{(k+1)}(t,\varphi)-u^{(k)}(t,\varphi)$:

$$\sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in\ T^m}\left\|u^{(k+1)}(t,\varphi)-u^{(k)}(t,\varphi)\right\| \le \frac{2K}{\gamma}\ L\sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in\ T^m}\left\|u^{(k)}(t,\varphi)-u^{(k-1)}(t,\varphi)\right\|.$$

Таким чином, вважаючи, що константа Ліпшиця L настільки мала, що

$$\frac{2K}{\gamma}\ L<1,$$

робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій $\{u^{(k)}(t,\varphi)\}$. Покладемо

$$\lim_{k\to\infty}u^{(k)}(t,\varphi)=u(t,\varphi).$$

Переконаємося, що множина $x=u(t,\varphi)$ є інтегральною множиною вихідної системи. Перейшовши до границі, коли $k\to\infty$ в рівності (13) бачимо, що функція $u(t,\varphi)$ задовольняє рівність

$$x=u(t,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t,s,\varphi)F(s,\varphi_s(t,\varphi),u(s,\varphi_s(t,\varphi)))ds.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція $u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$ є розв'язком системи рівнянь

$$\dot{x}=A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))+F(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x),$$

яка залежить від $\tau\in R,\varphi\in T^m$ як від параметрів. Тому множина $x=u(t,\varphi)$, $t\in R$, $\varphi\in T^m$ є інтегральною множиною системи рівнянь (10). Теорема доведена.

Теорема 3. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці* A *від'ємні* $Re(\lambda_j(A))<0$, $j=1,2,...,n$, *то система (1) має інтегральну множину*

$$x=u(t,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{t}G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds$$

і ця множина є асимптотично стійкою.

Доведення. З умови теореми слідує, що існує функція Гріна-Самойленка вигляду

$$G(t,\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega_\tau^t(t,\varphi), & t\ge\tau,\\ 0, & t<\tau,\end{cases}$$

яка отримується із означення, якщо покласти $C(\tau,\varphi_\tau(t,\varphi))\equiv E$. В системі рівнянь (2) зробимо заміну $x=u(t,\varphi)+z$. Тоді

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{dz}{dt}=A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))+A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z+f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot a(t,\varphi)+\frac{dz}{dt}=A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))+A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z+f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)).$$

Звідси

$$\frac{dz}{dt}=A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z.$$

Позначимо через $z=z(t,\varphi,z_0)=\Omega_0^t(\tau,\varphi)z_0$ загальний розв'язок останньої системи рівнянь. Використовуючи властивості матриціанта $\Omega_0^t(\tau,\varphi)$, для цього розв'язку отримаємо оцінку

$$\|z(t,\varphi,z_0)\|=\left\|\Omega_0^t(\tau,\varphi)z_0\right\|=\left\|\Omega_\tau^t(\tau,\varphi)\Omega_0^\tau(\tau,\varphi)z_0\right\|=\left\|\Omega_\tau^{t-\tau+\tau}(\tau,\varphi)z(\tau,\varphi,z_0)\right\|\le$$

$$\le\left\|\Omega_\tau^{t-\tau}(\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\|\|z(\tau,\varphi,z_0)\|\le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|z(\tau,\varphi,z_0)\|,$$

справедливу для всіх $t\in R,\varphi\in T^m$. Отже, маємо

$$\|x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0)-u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\|=\|z(t,\varphi,z_0)\|\le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|z(\tau,\varphi,z_0)\|,$$

а це показує, що

$$\|x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0)-u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\|\to 0,t\to+\infty.$$

Теорема доведена.

Зауваження 1. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A від'ємні, то інтегральна множина системи (10) є асимптотично стійкою.*

Таким чином, в роботі виділено клас рівнянь, для яких встановлено достатні умови існування інтегральних множин, а також досліджено питання асимптотичної стійкості таких множин.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.– К.: Наук. думка, 1990. — 272 с.
3. *Асроров Ф. А., Перестюк М. О.* Функция Грина-Самойленко и существование интегральных множеств линейных расширений неавтономных систем // Укр. мат. журн. — 1994. — т.46, № 8.— С.1067 — 1071.
4. *Балога С. І., Король І. І., Питьовка О. Ю.* Інваріантні многовиди одного класу систем диференціальних рівнянь // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2012.— Вип.23, № 1. — С.4 — 12.

Одержано 12.09.2012

УДК 519.642

В. М. Білецький (Львівський нац. ун-т ім. І. Франка)

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДУ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ ТА МЕТОДУ КВАДРАТУР ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БАГАТОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

In this paper, we compare an iterative method of generalized separation of variables and a quadrature method for solving multidimensional integral equations. The computational complexity of methods algorithms and numerical results for multidimensional integral Fredholm equations of the second kind are given.

У роботі подано порівняння ітераційного методу узагальненого розділення змінних та методу квадратур для розв'язування багатовимірних інтегральних рівнянь. Розглянуто обчислювальну складність алгоритмів, що реалізують дані методи. Наведено числові результати для багатовимірних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Вступ. Розділення змінних дозволяє зменшити розмірність та досягнути компактності представлення розв'язку багатовимірної задачі. Ідею наближеного розділення змінних використовують для апроксимації операторів, функцій багатьох змінних та багатовимірних тензорів, а також при розв'язувані багатовимірних інтегральних рівнянь та крайових задач.

Ідея методу узагальненого розділення змінних [1,2] полягає в представленні розв'язку багатовимірної задачі у вигляді суми доданків з розділеними змінними, які обчислюють послідовно з умови мінімуму відповідних функціоналів. У результаті вихідну задачу зводять до послідовності одновимірних задач. У [3] розвинуто метод узагальненого розділення змінних та запропоновано його модифікацію, що мінімізує на кожному кроці норму відхилення наближеного та точного розв'язків.

Схема методу для двовимірних інтергальних рівнянь подана у роботі [4]. У [5] доведено збіжність ітераційного процесу методу узагальненого розділення змінних для загального випадку лінійного операторного рівняння. Збіжність модифікації методу показана у [6].

У цій статті описано алгоритм методу узагальненого розділення змінних та наведено його порівняння з методом квадратур, який широко застосовують на практиці для розв'язування інтегральних рівнянь.

1. Метод узагальненого розділення змінних. Метод узагальненого розділення змінних запропоновано у [1, 2] для розв'язання багатовимірних інтегральних і матричних рівнянь та їх варіаційних аналогів. Метод дозволяє зменшити розмірність багатовимірної задачі, а також досягнути компактності представлення розв'язку. Опишемо алгоритм методу на прикладі d-вимірного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$Au \equiv \int\limits_D K(x,y)\,u(y)\,dy - \lambda u(x) = f(x)\,, \tag{1}$$

де $x=(x_1,\ldots,x_d)$, $y=(y_1,\ldots,y_d)$, $u,f\in\mathcal{L}_2(D)$, $K\in\mathcal{L}_2(D\times D)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0$ та D обмежена прямокутна область у $\mathbb{R}^d$

$$D=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d].$$

Якщо λ не є власним значенням відповідного оператора Фредгольма

$$Fu \equiv \int\limits_{D} K(x,y)\, u(y)\, dy,$$

то згідно альтернативи Фредгольма [7] рівняння (1) має розв'язок для всіх $f(x)$.

Простір $\mathcal{L}_2(D)$ можна представити як тензорних добуток d просторів

$$\mathcal{L}_2(D) = \mathcal{L}_2([a_1, b_1]) \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_2([a_d, b_d]).$$

Ідея методу полягає у представленні розв'язку задачі (1) у вигляді суми доданків з розділеними змінними

$$u(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{d} \phi_l^{(j)}(x_l), \tag{2}$$

де $\phi_l^{(j)}(x_l) \in \mathcal{L}_2([a_l, b_l])$. k-им наближенням розв'язку рівняння вважають суму перших k доданків ряду (2)

$$u_k(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{j=1}^{k} \prod_{l=1}^{d} \phi_l^{(j)}(x_l), \quad u_0 \equiv 0,$$

а $(k+1)$-ий доданок знаходять згідно умови мінімуму функціонала

$$J_{f_k}(\phi_1, \ldots, \phi_d) = \|f_k - A(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_d)\|^2 \to \min, \tag{3}$$

де $f_k = f - Au_k$. Доданки ряду (2) знаходять послідовно згідно (3), формуючи послідовність наближених розв'язків. Після k кроків методу ми розв'язуємо таке ж вихідне рівняння (1), проте з іншою правою частиною f_k. У [5] доведено збіжність послідовності наближених розв'язків $\{u_k\}$ до точно розв'язку рівняння (1).

Дамо формальне визначення *алгоритму методу узагальненого розділення змінних* таким чином:

Крок 1 Приймаємо $k = 0$ та $u_0 \equiv 0$ — початкове наближення розв'язку рівняння (1).

Крок 2 Збільшуємо k на одиницю та знаходимо k-ий доданок ряду (2) згідно умови (3).

Крок 3 Обчислюємо k-те наближення розв'язку рівняння (1).

Крок 4 Якщо виконується критерій зупинки алгоритму, то переходимо до кроку 5, інакше переходимо до кроку 2.

Крок 5 Приймаємо за наближений розв'язок рівняння (1) k-те наближення його розв'язку u_k та закінчуємо роботу алгоритму.

Як приклад критерію зупинки можна розглянути

$$\frac{\|f_k\|}{\|f\|} = \frac{\|f - Au_k\|}{\|f\|} < \epsilon \quad \text{або} \quad \frac{\|u_k - u_{k-1}\|}{\|u_{k-1}\|} < \epsilon,$$

де ϵ — параметр зупинки.

З необхідних умов мінімуму функціонала (3) отримаємо систему d одновимірних рівнянь Ейлера для функцій $\phi_l(x_l)$. Кожне з рівнянь такої системи є лінійним відносно однієї з функцій $\phi_l(x_l)$, а отже, його можна розглядати окремо як умову мінімуму функціонала (3) за цією функцією при фіксованих інших співмножниках. Таким чином циклічно-послідовне розв'язування рівнянь системи відносно $\phi_l(x_l)$, $j = 1, \ldots, d$ еквівалентне покомпонентній мінімізації функціонала (3). Такий спосіб мінімізації функціонала називають методом послідовних найменших квадратів, що також відомий як ALS метод (Alternating Least Squares), який є найпопулярнішим серед лінійних методів розв'язування подібних задач. Для мінімізації (3) можна також використати нелінійні підходи, наприклад, PMF3 метод [8] чи dGN метод (damped Gauss-Newton) [9].

2. Метод квадратур. Зведення задачі розв'язування інтегрального рівняння до системи лінійних алгебричних рівнянь, яку отримують шляхом заміни інтегралів скінченими сумами, є одним з найпопулярніших методів. Метод квадратур є апроксимаційним методом. Його широко застосовують на практиці, оскільки він є достатньо простим та застосовним як до лінійних та і до нелінійних інтегральних рівнянь.

Основна ідея методу полягає у заміні інтеграла деякою квадратурною формулою

$$\int\limits_D f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(x_j),$$

де $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $x_j \in D$, $j = 1, \ldots, n$. Тут $\{x_j\}$ — вузли квадратурної формули, а $\{\alpha_j\}$ — коефіцієнти, що не залежать від функції f. Для кратних інтегралів можна використати кубатурні формули [10], або повторно застосовувати квадратурні формули для одновимірних інтегралів. Існує багато квадратурних формул [11], що застосовують на практиці. Наприклад, можна використати формули прямокутників, трапецій, парабол, Сімпсона, трьох восьмих та ін.

Після застосування до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (1) квадратурної формули отримаємо

$$\lambda u(x) \approx \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K(x, x_j)\, u(x_j) - f(x)\,.$$

Прийнявши за наближення розв'язку рівняння функцію

$$\widehat{u}(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j K(x, x_j)\, \widehat{u}(x_j) - f(x)\right),$$
$$\widehat{u}(x_j) = u(x_j)\,, \quad j = 1, \ldots, n,$$

та послідовно підставивши $x = x_j$, $j = 1, \ldots, n$, отримаємо систему n лінійних алгебричних рівнянь з n невідомими для знаходження значень наближеного розв'язку у вузлах квадратурної формули $\{\widehat{u}\left(x_j\right)\}$

$$\widehat{A}\widehat{X} = \widehat{B}. \tag{4}$$

Тут $\widehat{X}$ — вектор невідомих системи

$$\widehat{X}_j = \widehat{u}\left(x_j\right),$$

$\widehat{B}$ — вектор правої частини системи, що містить значення функції f у вузлах квадратурної формули

$$\widehat{B}_j = f\left(x_j\right),$$

$\widehat{A}$ — матриця розміру $n \times n$, елементи якої обчислюються згідно формули

$$\widehat{A}_{jk} = \delta_{jk} - \frac{1}{\lambda}\left(\alpha_k K\left(x_j, x_k\right)\right),$$

де δ_{jk} — символ Кронекера.

За наближений розв'язок інтегрального рівняння приймають функцію $\widehat{u}$, яку знаходять шляхом інтерполяції по її значеннях у вузлах квадратурної формули $\{x_j\}$.

3. Порівняння методів. Проведемо порівняння обчислювальних складностей та компактності представлення наближеного розв'язку для методу узагальненого розділення змінних та методу квадратур. У подальших міркуваннях, що стосуються обчислювальної складності методів, елементарними операціями вважатимемо обчислення значення функції у деякій точці та елементарні арифметичні операції.

На практиці для використання алгоритму методу узагальненого розділення змінних рівняння (1) необхідно дискретизувати. Нехай внаслідок дискретизації задачі нескінченновимірний простір $\mathcal{L}_2\left(\left[a_j, b_j\right]\right)$, $j = 1, \dots d$ ми замінили n_j-вимірним простором H_j. Тоді простір $\mathcal{L}_2\left(D\right)$ можна наблизити n-вимірним простором $H = H_1 \otimes \ldots \otimes H_d$, де

$$n = \prod_{j=1}^{d} n_j.$$

Чисельне представлення елемента простору H вимагає збереження інформації розміру

$$\mathcal{O}\left(\prod_{j=1}^{d} n_j\right). \tag{5}$$

Поряд з цим для представлення одного доданку наближеного розв'язку методу узагальненого розділення змінних достатнім є збереження інформації розміру

$$\mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^{d} n_j\right). \tag{6}$$

Легко бачити, що з одночасним збільшенням розмірностей всіх просторів H_j, $j = 1, \dots, d$ величина (5) зростає експоненціально, а величина (6) — лінійно.

Отже, за умови відносно невеликої кількості доданків наближеного розв'язку, метод узагальненого розділення змінних дає компактне представлення наближеного розв'язку рівняння (1) та дозволяє суттєво зменшити затрати обчислювальних ресурсів.

На відміну від методу квадратур, метод узагальненого розділення змінних враховує те, що простір $\mathcal{L}_2(D)$ можна представити як тензорний добуток просторів $\mathcal{L}_2([a_j, b_j])$, $j = 1, \ldots, d$, і завдяки цьому є більш ефективним. Оцінимо обчислювальну складність методу узагальненого розділення змінних у випадку, якщо для знаходження доданків наближеного розв'язку використовують метод послідовних найменших квадратів.

На кожному кроці методу послідовних найменших квадратів для всіх $j = 1, \ldots, d$ задача мінімізації функціонала зводиться до системи n_j лінійних алгебричних рівнянь з n_j невідомими. Оскільки ми вважаємо обчислення значень ядра K та правої частини f у деяких точках елементарними операціями, то для побудови такої системи алгебричних рівнянь необхідно виконати $\mathcal{O}(n^2)$ операцій, а для її розв'язання, наприклад методом Гауса, — $\mathcal{O}\left(n_j^3\right)$ операцій. Отже, сумарна обчислювальна складність одного кроку методу послідовних найменших квадратів рівна

$$\mathcal{O}\left(dn^2 + \sum_{j=1}^{d} n_j^3\right).$$

Розглянемо питання обчислювальної складності методу квадратур. Для побудови системи лінійних алгебричних рівнянь (4) знадобиться порядку $\mathcal{O}(n^2)$ операції, а для її розв'язання — $\mathcal{O}(n^3)$ операцій. Для представлення наближеного розв'язку знадобиться $\mathcal{O}(n)$ пам'яті.

Порівняння методу узагальненого розділення змінних та методу квадратур наведено у таблиці 1. Для методу узагальненого розділення змінних вказані обчислювальна складність одного кроку методу послідовних найменших квадратів та обсяг пам'яті, необхідний для збереження одного доданку наближеного розв'язку. Нагадаємо, що $n = \prod_{j=1}^{d} n_j$.

Таблиця 1.

Порівняння обчислювальної складності та компактності представлення наближених розв'язків

	Обчислювальна складність	Компактність представлення наближеного розв'язку
Метод квадратур	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n)$
Метод узагальненого розділення змінних	$\mathcal{O}\left(dn^2 + \sum_{j=1}^{d} n_j^3\right)$	$\mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^{d} n_j\right)$

При $d > 1$ та за умови відносно невеликої кількості кроків алгоритму методу узагальненого розділення змінних, він є значно ефективнішим ніж метод квадратур як у плані швидкодії так і у плані компактності представлення розв'язку. Причому різниця стає більш відчутною із зростанням параметра d.

4. Числові результати. Для проведення практичних дослідів створено комплекс комп'ютерних програм, що реалізують алгоритми методу узагальненого розділення змінних та методу квадратур. Для емпіричної оцінки ефективності методу узагальненого розділення змінних проведено ряд числових експериментів. Тут наведено числові результати деяких з них. Всі експерименти проведено на обчислювальній машині з процесором Intel Core i3 (тактова частота 2.5GHz) та оперативною пам'яттю об'ємом 4GB.

Оскільки при заданій точності наближеного розв'язку важко оцінити кількість ітерацій методу узагальненого розділення змінних, то порівняння методів зручно проводити шляхом оцінки часу виконання програм, що реалізують алгоритми цих методів.

За критерій зупинки методу узагальненого розділення змінних приймемо достатньо мале відносне значення нев'язки рівняння (1)

$$\frac{\|f - A\widehat{u}\|}{\|f\|} < \epsilon,$$

де $\widehat{u}$ — деяке наближення розв'язку рівняння.

Приклад 1.

$$\int_0^1 \int_0^1 \cos\left(\widehat{x}\widehat{y} + x^2 - y^2\right) u(\widehat{x}, \widehat{y}) d\widehat{x} d\widehat{y} - 4u(x, y) = \sin\left(x^2 + y^2\right). \tag{7}$$

Це рівняння є двовимірним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду. У таблиці 2 наведено порівняння часу виконання алгоритмів методу узагальненого розділення змінних та методу квадратур при заданій точності $\epsilon = 10^{-7}$ *та різних розмірностях дискретизованої задачі.*

Таблиця 2.

Порівняння часу виконання реалізацій алгоритмів методів для задачі (7)

n	n_1	n_2	Метод квадратур	Метод узагальненого розділення змінних
900	30	30	4,12 сек.	1,98 сек.
2500	50	50	85,03 сек.	13,68 сек.
4500	60	75	489,81 сек.	44,47 сек.
9801	99	99	5109,12 сек.	197,54 сек.

Приклад 2.

$$\int_1^{\pi/2} \int_1^{\pi/2} \int_1^{\pi/2} \ln\left(1 + x\widehat{x} + y\widehat{y} + z\widehat{z}\right) u\left(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}\right) d\widehat{x} d\widehat{y} d\widehat{z} + 7u(x, y, z) =$$

$$= \cos\left(x + y\right) \sin\left(y + z\right). \tag{8}$$

У цьому прикладі ми маємо тривимірне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду. У таблиці 3 наведено порівняння часу виконання алгоритмів методу узагальненого розділення змінних та методу квадратур при заданій точності $\epsilon = 10^{-5}$ *та різних розмірностях дискретизованої задачі.*

Таблиця 3.

Порівняння часу виконання реалізацій алгоритмів методів для задачі (8)

n	n_1	n_2	n_3	Метод квадратур	Метод узагальненого розділення змінних
1000	10	10	10	7,33 сек.	6,59 сек.
3240	15	12	18	235,87 сек.	67,42 сек.
8000	20	20	20	3502,18 сек.	404,74 сек.

Легко бачити, що зі зростанням розмірності дискретизованої задачі час роботи методу квадратур зростає швидше ніж час роботи методу узагальненого розділення змінних. Можна помітити кубічну залежність часу виконання від розмірності дискретизованої задачі для методу квадратур та квадратичну — для методу узагальненого розділення змінних.

Числові результати свідчать про ефективність застосування методу узагальненого розділення змінних у порівнянні з методом квадратур при розв'язуванні багатовимірних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

1. *Баляш Ю. Г., Войтович Н. Н.* Приближенное вариационно-итерационное разделение переменных в многомерных задачах // Волны и дифракция-85: IX Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн.– 1985.– С. 122-124.
2. Баляш Ю. Г., Войтович Н. Н. Вариационно-итерационный метод решения многомерных интегральных уравнений // Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез. докл. XX республ. конф. - Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1986.– Ч. 2.– С. 23.
3. *Войтович М. М., Ярошко С. А.* Варіаційно-ітераційний метод узагальненого розділення змінних для розв'язання багатовимірних інтегральних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997.– 40, № 4.– С. 122-126.
4. *Білецький В.* Ітераційний метод узагальненого розділення змінних для розв'язання двовимірних інтегральних рівнянь // Вісник Львівського національного університету імені Івана Франка. Серія прикладна математика та інформатика.– 2009.– 15 – С. 33-42.
5. *Biletskyy V.* An iterative method of generalized separation of variables for solving linear operator equations // Journal of Numerical and Applied Mathematics.– 2010.– 1(100)– P. 2-9.
6. *Білецький В.* Модифікація методу узагальненого відокремлення змінних для розв'язування багатовимірних інтегральних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2010.– 53, № 4.– С. 44-50.
7. *Треногин В. А.* Функциональный анализ: Учебник.– М.: Физматгиз, 2002. – 488 с.
8. *Paatero P.* A weighted non-negative least squares algorithm for three-way PARAFAC factor analysis // Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems.– 1997.– 2(38)– P. 223-242.
9. *Tomasi G., Bro R.* A comparison of algorithms for fitting the PARAFAC model // Computational Statistics & Data Analysis.– 2006.– 6(50)– P. 1700–1734.
10. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул.– М.: Наука, 1974.– 810 с.
11. *Цегелик Г. Г.* Чисельні методи.– Львів: Вид. ЛНУ ім. І. Франка, 2004.– 408 с.

Одержано 19.10.2012

УДК 512.5+512.6

В. М. Бондаренко (Ін-т математики НАН України),
Т. В. Манжос, О. М. Тертична (Київський нац. економ. ун-т ім. Вадима Гетьмана)

ПРО ОДИН КОНТРПРИКЛАД ДЛЯ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ НЕСКІНЧЕННИХ НАПІВГРУП $\mathbf{S(I,J)}$

In this article we construct a counterexample for matrix representations of a natural class of semigroups generated by idempotents that is associated with almost nondegenerate matrices.

У цій статті побудовано контрприклад для матричних зображень природного класу напівгруп, породжених ідемпотентами, що пов'язаний з майже невиродженими матрицями.

Напівгрупа $S(I,J)$, де I — довільна скінченна множина (без елементу 0) і J — підмножина в $I\times I$ без діагональних елементів, — це напівгрупа з твірними елементами e_i, де $i\in I\cup 0$, і наступними визначальними співвідношеннями:

1) $e_0=0$ ($e_0e_i=e_ie_0=0$ для $i\in I\cup 0$);
2) $e_i^2=e_i$ для довільного $i\in I$;
3) $e_ie_j=0$ для довільної пари $(i,j)\in J$.

Вона називається *напівгрупою, породженою ідемпотентами з частковим нульовим множенням* [1]. Множину всіх напівгруп вигляду $S(I,J)$ позначимо через $\mathcal{I}$, а множину всіх скінченних (відповідно нескінченних) напівгруп $S(I,J)$ — через $\mathcal{I}_{<\infty}$ (відповідно $\mathcal{I}_{\infty}=\mathcal{I}\setminus\mathcal{I}_{<\infty}$).

Матричне зображення розмірності n напівгрупи $S=S(I,J)\in\mathcal{I}$ над полем k — це (згідно загального означення матричного зображення напівгрупи) набір $M=\{M(e_i)\mid i\in I\cup 0\}$ матриць розміру $n\times n$ з елементами із k, такий, що виконуються наступні умови:

1) $M(e_0)=0$;
2) $[M(e_i)]^2=M(e_i)$ для довільного $i\in I$;
3) $M(e_i)M(e_j)=0$ для довільної пари $(i,j)\in J$.

Коли ми будемо говорити про матричне зображення M напівгрупи $S(I,J)$, то будемо вказувати лише матриці $M(e_i)$ для $i\neq 0$.

Еквівалентність матричних зображень $M=\{M(e_i)\mid i\in I\}$ і $N=\{N(e_i)\mid i\in I\}$ напівгрупи $S(I,J)$ означає існування оборотної матриці C, такої, що $M(e_i)=C^{-1}N(e_i)C$ для всіх $i\in I$.

Прямою сумою матричних зображень $M=\{M(e_i)\mid i\in I\}$ і $N=\{N(e_i)\mid i\in I\}$ напівгрупи $S(I,J)$ називається зображення $M\oplus N=\{M(e_i)\oplus N(e_i)\mid i\in I\}$, де

$$M(e_i)\oplus N(e_i)=\left(\begin{array}{c|c} M(e_i) & 0 \\ \hline 0 & N(e_i)\end{array}\right).$$

Зображення M називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень, і *нерозкладним* в іншому разі (нульове матричне зображення — це зображення розмірності 0).

Матричні зображення напівгруп $S(I,J)$ та їх деякі властивості досліджувалися в ряді робіт (див., зокрема, [1], [2] і [3]). У цій роботі ми продовжуємо вивчати властивості матричних зображень таких напівгруп над полем k.

Квадратну матрицю P над полем k назвемо *майже невиродженою*, якщо x^2 не ділить її мінімальний многочлен $m_P(x)$. У роботі [3] доведено, що це еквівалентно такій умові: матриця P подібна прямій сумі невиродженої матриці A та нульової матриці B (матриця A або B може бути нульової розмірності).

Зокрема, доведено, що для довільної напівгрупи $S(I, J)$ з класу $\mathcal{I}_{<\infty}$ матриця

$$P = \sum_{i \in I} M(e_i),$$

де $M = \{M(e_i) \mid i \in I\}$ — довільне фіксоване матричне зображення $S(I, J)$ над довільним полем k, є майже невиродженою. Позначимо надалі цю властивість через $(*)$.

У цій статті ми доведемо, що в класі $\mathcal{I}_\infty$ властивість $(*)$, взагалі кажучи, не виконується.

1. Напівгрупа $\mathbf{S_2}$ та її властивості. Позначимо через S_2 напівгрупу $S(I, J)$ із $\mathcal{I}$, для якої $I = \{1, 2\}$, $J = \varnothing$, тобто

$$S_2 = \langle 0, e_1, e_2 \mid e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2 \rangle.$$

Доведемо, що напівгрупа S_2 нескінченна, тобто належить класу $\mathcal{I}_\infty$. Ми доведемо це за допомогою матричних зображень.

Розглянемо наступне матричне зображення $M = \{M(e_i) \mid i \in I\}$ напівгрупи S_2 над довільним фіксованим полем k характеристики 0 (наприклад, над полем дійсних чисел):

$$M(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

де $c \neq 0$ — фіксований елемент поля k, який не є коренем з одиниці (тоді степені c, c^2, $c^3, \ldots$ елемента c попарно різні). Оскільки, як легко бачити, $[M(e_i)]^2 = M(e_i)$ для $i = 1, 2$, то вказане відображення

$$\{e_i \mid i \in I \cup 0\} \to Mat_{2\times 2}(k)$$

дійсно задає зображення напівгрупи S_2.

Покладемо $x = e_1 e_2$. Оскільки

$$M(x) = M(e_1 e_2) = M(e_1) M(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$[M(x)]^2 = \begin{pmatrix} c^2 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ [M(x)]^3 = \begin{pmatrix} c^3 & c^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ [M(x)]^s = \begin{pmatrix} c^s & c^{s-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

В силу вибору елемента $c \in k$ матриці $M(x), [M(x)]^2, [M(x)]^3, \ldots$ попарно різні. Таким чином, елементи $x, x^2, x^3, \ldots$ напівгрупи S_2 попарно різні і, отже, S_2 — нескінченна напівгрупа.

2. Основний результат. Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

Теорема 1. *В класі* $\mathcal{J}_\infty$ *властивість* $(*)$ *не виконується.*

Доведення. Для доведення теореми 1 слід знайти контрприклад, тобто вказати напівгрупу $S(I,J)$ з класу $\mathcal{J}_\infty$ і деяке її фіксоване матричне зображення $M = \{M(e_i) \mid i \in I\}$ над деяким полем k, для яких матриця $P = \sum_{i \in I} M(e_i)$ не є майже невиродженою.

Розглянемо наступне матричне зображення $M = \{M(e_i) \mid i = 1,2\}$ напівгрупи S_2 над довільним полем k характеристики 2:

$$M(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $[M(e_i)]^2 = M(e_i)$ для $i = 1,2$, то $M = \{M(e_i) \mid i = 1,2\}$ дійсно є зображенням напівгрупи S_2.

Тоді

$$P = M(e_1) + M(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що мінімальним многочленом матриці P є $m_B(x) = x^2$. Оскільки $x^2 \mid m_P(x)$, то P не є майже невиродженою матрицею. Теорема 1 доведена.

3. Деяке узагальнення теореми 1. Матричне зображення M, вказане в доведенні теореми 1, розкладне, оскільки є прямою сумою таких зображень:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}; \ M_2 = \{(1),(1)\}; \ M_3 = \{(0),(0)\}.$$

Однак існує і нерозкладне зображення, що задовольняє тій же властивості. Більш того, таке зображення існує в будь-якій парній розмірності. Доведемо це.

Для довільного натурального числа m розглянемо наступне зображення $T = \{T(e_i) \mid i = 1,2\}$ розмірності $2m$ напівгрупи S_2 над довільним полем k характеристики 2:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} E_m & J_m(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де E_m — одинична матриця розміру m, а $J_m(0)$ — клітина Жордана розміру m з власним числом 0. Оскільки $[T(e_i)]^2 = T(e_i)$ для $i = 1,2$, то T справді є зображенням напівгрупи S_2.

Тоді

$$P = T(e_1) + T(e_2) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_m & J_m(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & J_m(0) \\ E_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Щоб довести, що матриця P не є майже невиродженою, знайдемо її мінімальний многочлен $m_P(x)$. Для цього слід спочатку знайти власні числа матриці P, які (як відомо) є коренями характеристичного рівняння $\chi_P(\lambda) = 0$.

Загальновідомими є такі факти: 1) коренями мінімального многочлену є власні числа матриці P і лише вони; 2) для власного числа λ матриці P кратність λ як кореня $m_P(x)$ дорівнює найбільшому розміру клітини Жордана з власним числом λ, що зустрічається в жордановій нормальній формі матриці P.

Для кращого розуміння загального випадку знайдемо характеристичний многочлен $\chi_P(\lambda)$ спочатку для частинного випадку $m = 3$. Отже, нехай

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J_3(0) \\ \hline E_3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тоді характеристичний многочлен $\chi_P(\lambda)$ матриці P дорівнює:

$$\det(P - \lambda E) = \det\left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_3 & J_3(0) \\ \hline E_3 & -\lambda E_3 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| =$$

(розкладемо визначник за третім рядком)

$$= -\lambda(-1)^{3+3}\cdot \left\|\begin{array}{cc|ccc} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| = -\lambda\cdot \left\|\begin{array}{cc|ccc} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| =$$

(розкладемо визначник за п’ятим рядком)

$$= -\lambda(-\lambda)(-1)^{5+5}\cdot \left\|\begin{array}{cc|cc} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| = \lambda^2\cdot\det\left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_2 & J_2(0) \\ \hline E_2 & -\lambda E_2 \end{array}\right) =$$

(розкладемо визначник за другим рядком)

$$= \lambda^2(-\lambda)(-1)^{2+2}\cdot \left\|\begin{array}{c|cc} -\lambda & 0 & 1 \\ \hline 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| = -\lambda^3\cdot \left\|\begin{array}{c|cc} -\lambda & 0 & 1 \\ \hline 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| =$$

(розкладемо визначник за третім рядком)

$$= -\lambda^3(-\lambda)(-1)^{3+3}\cdot \left\|\begin{array}{c|c} -\lambda & 0 \\ \hline 1 & -\lambda \end{array}\right\| = \lambda^4\cdot\det\left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_1 & J_1(0) \\ \hline E_1 & -\lambda E_1 \end{array}\right) = \lambda^4(\lambda^2 - 0) = \lambda^6.$$

Таким чином, характеристичний многочлен матриці P у випадку $m = 3$ має вигляд $\chi_P(\lambda) = \lambda^6$.

Аналогічним способом доводимо, що характеристичний многочлен P у загальному випадку дорівнює $\chi_P(\lambda) = \lambda^{2m}$, а саме:

$$\chi_P(\lambda) = \det(P - \lambda E) = \det\left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_m & J_m(0) \\ \hline E_m & -\lambda E_m \end{array}\right) =$$

$$= \left\|\begin{array}{ccccc|ccccc}
-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda
\end{array}\right\| =$$

(розкладемо визначник за m-м рядком)

$$= -\lambda(-1)^{m+m} \cdot \left\|\begin{array}{cccc|ccccc}
-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda
\end{array}\right\| =$$

(розкладемо визначник за останнім $(2m-1)$-м рядком)

$$= -\lambda(-\lambda)(-1)^{(2m-1)+(2m-1)} \cdot \left\|\begin{array}{cccc|cccc}
-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda
\end{array}\right\| =$$

$$= \lambda^2 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_{m-1} & J_{m-1}(0) \\ \hline E_{m-1} & -\lambda E_{m-1} \end{array}\right) =$$

(аналогічно далі розкладемо визначник спочатку за $(m-1)$-м рядком, а потім за останнім $(2m-3)$-м рядком)

$$= \lambda^4 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_{m-2} & J_{m-2}(0) \\ \hline E_{m-2} & -\lambda E_{m-2} \end{array}\right) =$$

і т.д., виконуючи всього $(m-1)$ раз аналогічний розклад визначника (спочатку за останнім рядком першої горизонтальної смуги, а потім за останнім рядком другої горизонтальної смуги), остаточно отримаємо

$$= \lambda^{2(m-1)} \cdot \det \left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_1 & J_1(0) \\ \hline E_1 & -\lambda E_1 \end{array} \right) = \lambda^{2m-2} \cdot \left\| \begin{array}{c|c} -\lambda & 0 \\ \hline 1 & -\lambda \end{array} \right\| = \lambda^{2m-2}(\lambda^2 - 0) = \lambda^{2m}.$$

Отже, характеристичне рівняння матриці P: $\lambda^{2m} = 0$. Маємо єдине власне число $\lambda = 0$ кратності $2m$. Для знаходження жорданової нормальної форми матриці P потрібно визначити дефект матриці $P - 0E = P$. Ранг матриці P дорівнює $2m-1$, отже, її дефект дорівнює $2m-(2m-1) = 1$. Маємо одну клітину Жордана з власним числом 0 розміру $2m$. Отже, жорданова нормальна форма матриці P має вигляд $J_{2m}(0)$.

Таким чином, мінімальним многочленом матриці P є $m_P(x) = x^{2m}$. Оскільки m — довільне натуральне число, то x^2 ділить $m_P(x)$, а це й доводить, що матриця P не є майже невиродженою.

Залишилось довести, що вказане зображення T нерозкладне. Для цього досить показати, що алгебра його ендоморфізмів локальна. Алгебра ендоморфізмів — це множина всіх невироджених матриць X, таких, що виконуються матричні рівності $T(e_1)X = XT(e_1)$, $T(e_2)X = XT(e_2)$ або

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & J_m(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & J_m(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Рівність (1) після перемноження матриць набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{11} & X_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} + X_{12} & 0 \\ X_{21} + X_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

що еквівалентно наступній системі рівностей:

$$X_{11} = X_{11} + X_{12},$$

$$X_{11} = X_{21} + X_{22},$$

$$X_{12} = 0,$$

звідки випливає, що $X_{12} = 0$, $X_{22} = X_{11} - X_{21}$.

Тоді матриця X буде мати вигляд

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{11} - X_{21} \end{pmatrix},$$

а рівність (2) при цьому перетвориться на таку:

$$\begin{pmatrix} E_m & J_m(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{11} - X_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{11} - X_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & J_m(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

або (після перемноження матриць)

$$\begin{pmatrix} X_{11}+J_m(0)X_{21} & J_m(0)(X_{11}-X_{21}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{11}J_m(0) \\ X_{21} & X_{21}J_m(0) \end{pmatrix}.$$

Остання матрична рівність еквівалентна наступній системі рівностей:

$$X_{11}+J_m(0)X_{21}=X_{11},$$

$$J_m(0)(X_{11}-X_{21})=X_{11}J_m(0),$$
$$X_{21}J_m(0)=0,$$
$$X_{21}=0.$$

Оскільки $X_{21}=0$, то матриця X буде мати блоково-діагональний вигляд

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{11} \end{pmatrix}.$$

Зокрема, виконується рівність $J_m(0)X_{11}=X_{11}J_m(0)$, яка (в чому не важко переконатися) означає, що блок X_{11} має такий вигляд:

$$X_{11}=\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & \cdots & 1,m-2 & 1,m-1 & 1,m \\ 0 & 11 & 12 & \cdots & 1,m-3 & 1,m-2 & 1,m-1 \\ 0 & 0 & 11 & \cdots & 1,m-4 & 1,m-3 & 1,m-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 11 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

З отриманого вигляду матриці X випливає, що алгебра ендоморфізмів зображення T локальна, що і доводить його нерозкладність.

1. *Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.* О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением // Проблеми топології та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 3. – С. 23–44.
2. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. 2008. – № 4. – P. 15–22.
3. *Тертична О. М.* Про одну властивість матричних зображень скінченних напівгруп $S(I,J)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 148–153.

Одержано 05.11.2012

УДК 512.64+512.56

Бондаренко В. М. (Институт математики НАН Украины),
Степочкина М. В. (Житомирский нац. агроэкол. ун-т),
Червяков И. В. (Институт математики НАН Украины)

ОБ M-ОСОБЫХ P-КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ МУЛЬТИЦЕПНОГО ТИПА

In this paper we study a class of partially ordered sets which are min-equivalent to Kleiner partially ordered sets.

В этой работе мы изучаем некоторый класс частично упорядоченных множеств, min-эквивалентных критическим частично упорядоченным множествам Клейнера.

В работе [1] М. М. Клейнер доказал, что частично упорядоченное (сокращенно ч. у.) множество S имеет конечный представленческий тип тогда и только тогда, когда оно не содержит подмножеств вида $(1,1,1,1), (2,2,2), (1,3,3), (1,2,5)$ и $(\text{И}, 4)$; эти ч. у. множества называются теперь критическими (ч.у.) множествами Клейнера. Из этого результата и результата Ю. А. Дрозда о ч. у. множествах конечного представленческого типа [2] следует, что критические множества Клейнера являются критическими и относительно слабой положительности (положительности на множестве неотрицательных векторов) квадратичной формы Титса ч. у. множеств, причем других таких ч. у. множеств нет.

В работе [3] доказано, что ч. у. множество является P-критическим (критическим относительно положительности формы Титса) тогда и только тогда, когда оно минимаксно эквивалентно критическому множеству Клейнера (такая эквивалентность введена первым из авторов в [4]); это позволило описать все P-критические ч. у. множества (см. ту же работу [3]). Типом P-критического ч. у. множества назовем соответствующее критическое множество Клейнера. Будем говорить, что P-критическое ч. у. множество имеет мультицепной тип, если его типом является примитивное ч. у. множество.

Минимаксная эквивалентность, которая еще называется (min, max)-эквивалентностью, равносильна min-эквивалентности. P-критическое ч. у. множество назовем M-стандартным, если оно min-эквивалентно критическому множеству Клейнера по некоторой последовательности (своих элементов) без повторений, и M-особым в противоположном случае (более подробно см. в пункте 1).

В этой статье мы описываем все M-особые P-критические ч. у. множества мультицепного типа.

1. Предварительные сведения. Все ч. у. множества предполагаются конечными, а под ч. у. подмножествами (которые будем называть просто подмножествами) всегда подразумеваются полные подмножества.

Напомним некоторые определения и утверждения из работы [4].

Пусть S — ч. у. множество и a — его минимальный элемент. Через $S_a^{\uparrow}$ будем обозначать ч. у. множество, которое совпадает с S как обычное множество, с тем же отношением порядка на $S \setminus \{a\}$, но при этом элемент a является уже максимальным, причем a сравнимо с x в $S_a^{\uparrow}$ тогда и только тогда, когда a несравнимо с x в S. Будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xyz}^{\uparrow\uparrow\uparrow}$ вместо $((S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow})_z^{\uparrow}$ и т. д.

Ч. у. множество T называется min-*эквивалентным* ч. у. множеству S, если $T = S^{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ $(p \geq 0)$; здесь естественно подразумевается, что указанное выражение имеет смысл, т. е. для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$, элемент x_i является минимальным элементом в $S^{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_{i-1}}$ (если $p = 0$, то $T = S$). Заметим, что среди $x_1, x_2, \ldots, x_p$ могут быть одинаковые элементы.

Понятие min-эквивалентности можно естественным образом продолжить до понятия min-изоморфизма, считая, что ч. у. множества S и S' min-*изоморфны*, если существует ч. у. множество T, min-эквивалентное S и изоморфное S'.

Конечная последовательность $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ элементов ч. у. множества S называется min-*допустимой*, если выражение $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ имеет смысл ($p = 0$ не исключается). В этом случае будем также писать $\overline{S} = S^{\uparrow}_{\alpha}$.

Множество всех min-допустимых последовательностей обозначается через $\mathcal{P}(S)$, а множество всех min-допустимых последовательностей без повторений — через $\mathcal{P}_1(S)$. Подмножество в S, состоящее из всех элементов x_i последовательности $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathcal{P}_1(S)$, обозначается через $[\alpha]_S$. Отметим, что для min-эквивалентных ч. у. множеств S и T не всегда существует последовательность α без повторений такая, что $T = S^{\uparrow}_{\alpha}$ (см. п. 6 [3]).

В работе [3] введено понятие P-критического ч. у. множества как ч. у. множества, критического относительно положительности квадратичной формы Титса (т. е. само ч. у. множество имеет неположительную форму Титса, а все его собственные подмножества — положительную). Согласно одному из результатов этой же работы ч. у. множество S является P-критическим тогда и только тогда, когда оно min-эквивалентно критическому множеству Клейнера $\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_5$:

$$\mathcal{K}_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \text{где все элементы попарно несравнимы;}$$

$$\mathcal{K}_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \,|\, 1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6\};$$

$$\mathcal{K}_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\};$$

$$\mathcal{K}_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\};$$

$$\mathcal{K}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6, 7 \prec 8, 5 \prec 8\}.$$

При этом два различных ч. у. множества Клейнера не являются min-эквивалентными.

Типом P-критического ч. у. множества S назовем соответствующее критическое множество Клейнера. Мы говорим в этом случае, что S имеет *мультицепной тип*, если его типом является ч. у. множество, являющееся объединением попарно непересекаемых цепей (линейно упорядоченных множеств), т. е. одно из ч. у. множеств $\mathcal{K}_i$ при $i \neq 5$.

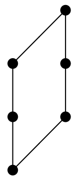
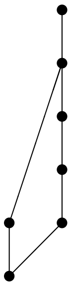
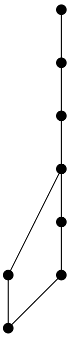
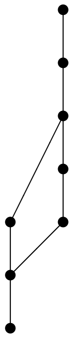
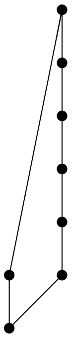
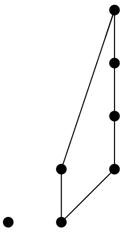
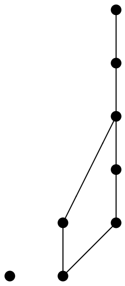
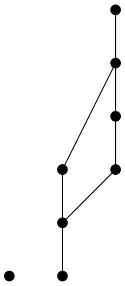
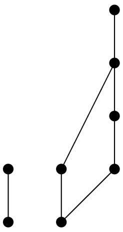
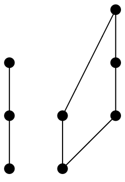
P-критическое ч. у. множество S назовем *M-стандартным*, если оно имеет вид $\mathcal{K}^{\uparrow}_{\alpha}$ для некоторого критического множества Клейнера $\mathcal{K}$ и некоторой последовательности $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$, и *$M$-особым* в противоположном случае.

Напомним, что двойственным к ч. у. множеству S называется ч. у. множество S^{op}, такое что $S^{\mathrm{op}} = S$ как обычные множества и при этом $x < y$ в S^{op} тогда и только тогда, когда $x > y$ в S. Два ч. у. множества называются *антиизорфными*, если одно из этих ч. у. множеств изоморфно ч. у. множеству, которое двойственно к другому.

2. Основной результат.

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *M-особые P-критические ч. у. множества мультицепного типа исчерпываются (с точностью до изоморфизма) ч. у. множествами M_1, $M_2, \ldots, M_{10}$, указанными в нижеследующей таблице под номерами $1m, 2m, \ldots$, $10m$, и двойственными к M_2, M_3, M_4, M_7, M_9 ч. у. множествами (ч. у. множества $M_1, M_5, M_6, M_8, M_{10}$ самодвойственны).*

$1m$ 	$2m$ 	$3m$ 
$4m$ 	$5m$ 	$6m$ 
$7m$ 	$8m$ 	$9m$ 
	$10m$ 	

Прежде, чем перейти к доказательству этой теоремы, напомним еще некоторые определения и утверждения работы [3].

Пусть, как и ранее, S — ч. у. множество. Подмножество $X \subseteq S$ называется *нижним*, если $x \in X$ всякий раз, когда $x < y$ и $y \in X$. Для подмножеств X и Y ч. у. множества S будем писать $X < Y$, если $x < y$ для любых $x \in X, y \in Y$ (очевидно, что $X < \varnothing$ и $\varnothing < Y$). Несравнимые элементы ч. у. множества обозначаются символом $\gtrless$.

Из следствий 5 и 9 [3] имеем, что если $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$ и $[\alpha]_S = [\beta]_S$, то $S^{\uparrow}_{\alpha} = S^{\uparrow}_{\beta}$; кроме того, если X — подмножество S, то $X = [\alpha]_S$ для некоторой последовательности $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ тогда и только тогда, когда подмножество X нижнее. Следовательно для нижнего подмножества X можно определить ч. у. множество $S^{\uparrow}_X$, полагая $S^{\uparrow}_X = S^{\uparrow}_{\alpha}$, где $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ — любая из последовательностей такая, что $[\alpha]_S = X$. В силу предложения 6 [3] $a < b$ в $\overline{S} = S^{\uparrow}_X$ в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

a) $a < b$ в S и либо $a, b \in X$, либо $a, b \notin X$;

b) $a \gtrless b$ в S и $b \in X, a \notin X$.

Из сказанного, в частности, имеем, что если Z — нижнее подмножество в X такое, что $Z < S \setminus X$, то Z является нижним подмножеством и в $S^{\uparrow}_X$.

В [3] указан алгоритм описания всех (с точностью до изоморфизма) ч. у. множеств, min-эквивалентных любому фиксированному ч. у. множеству S. Он состоит из следующих трех шагов.

I. Описать все нижние подмножества $X \neq S$ в S, и для каждого из них построить ч. у. множество $S^{\uparrow}_X$.

II. Описать все пары (Y, X), состоящие из собственного нижнего подмножества Y в S и непустого нижнего подмножества X в Y такого, что $X < S \setminus Y$; для каждой такой пары построить ч. у. множество $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = (S^{\uparrow}_Y)^{\uparrow}_X$.

III. Среди полученных в I и II ч. у. множеств выбрать по одному из каждого класса изоморфных множеств.

Отметим, что в I случай $X = \varnothing$ не исключается, а случай $X = S$ исключается (в обоих случаях $S^{\uparrow}_X = S$).

Перебор случаев в указанном алгоритме можно уменьшить. Два нижних подмножества X и X' называются *сильно изоморфными*, если существует автоморфизм $\varphi : S \to S$, такой, что $\varphi(X) = X'$ (как ч. у. подмножества). Аналогично, две указанные в II пары (Y, X) и (Y', X') назовем *сильно изоморфными*, если существует автоморфизм $\varphi : S \to S$, такой, что $\varphi(Y) = Y'$ и $\varphi(X) = X'$. Очевидно, что подмножества в I и пары подмножеств в II достаточно рассматривать с точностью до сильного изоморфизма.

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.

Нам понадобится следующее утверждение, которое описывает все нижние подмножества критических ч. у. множеств.

Лемма 1. *Все, с точностью до сильного изоморфизма, нижние подмножества в критических множествах Клейнера* $\mathcal{K}_1$–$\mathcal{K}_5$ *исчерпываются* (*кроме самих множеств Клейнера*) *следующими ч. у. подмножествами:*

для $\mathcal{K}_1$ – $A_{1,1} = \varnothing$, $A_{1,2} = \{1\}$, $A_{1,3} = \{1, 2\}$, $A_{1,4} = \{1, 2, 3\}$;

для $\mathcal{K}_2$ – $A_{2,1} = \varnothing$, $A_{2,2} = \{1\}$, $A_{2,3} = \{1, 2\}$, $A_{2,4} = \{1, 3\}$, $A_{2,5} = \{1, 2, 3\}$, $A_{2,6} = \{1, 3, 5\}$, $A_{2,7} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{2,8} = \{1, 2, 3, 5\}$, $A_{2,9} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *для* $\mathcal{K}_3$ *—* $A_{3,1} = \varnothing$, $A_{3,2} = \{1\}$, $A_{3,3} = \{3\}$, $A_{3,4} = \{2,3\}$, $A_{3,5} = \{1,2\}$, $A_{3,6} = \{3,5\}$, $A_{3,7} = \{2,3,4\}$, $A_{3,8} = \{1,2,3\}$, $A_{3,9} = \{2,3,5\}$, $A_{3,10} = \{1,2,5\}$, $A_{3,11} = \{1,2,3,4\}$, $A_{3,12} = \{2,3,4,5\}$, $A_{3,13} = \{2,3,5,6\}$, $A_{3,14} = \{1,2,3,5\}$, $A_{3,15} = \{2,3,4,5,6\}$, $A_{3,16} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{3,17} = \{2,3,5,6\}$, $A_{3,18} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_{3,19} = \{1,2,3,4,5,6\}$*;*

для $\mathcal{K}_4$ *—* $A_{4,1} = \varnothing$, $A_{4,2} = \{1\}$, $A_{4,3} = \{2\}$, $A_{4,4} = \{4\}$, $A_{4,5} = \{2,3\}$, $A_{4,6} = \{4,5\}$, $A_{4,7} = \{1,2\}$, $A_{4,8} = \{1,4\}$, $A_{4,9} = \{2,4\}$, $A_{4,10} = \{4,5,6\}$, $A_{4,11} = \{1,2,3\}$, $A_{4,12} = \{1,4,5\}$, $A_{4,13} = \{2,4,5\}$, $A_{4,14} = \{2,3,4\}$, $A_{4,15} = \{1,2,4\}$, $A_{4,16} = \{4,5,6,7\}$, $A_{4,17} = \{1,4,5,6\}$, $A_{4,18} = \{2,4,5,6\}$, $A_{4,19} = \{2,3,4,5\}$, $A_{4,20} = \{1,2,4,5\}$, $A_{4,21} = \{1,2,3,4\}$, $A_{4,22} = \{4,5,6,7,8\}$, $A_{4,23} = \{1,4,5,6,7\}$, $A_{4,24} = \{2,4,5,6,7\}$, $A_{4,25} = \{2,3,4,5,6\}$, $A_{4,26} = \{1,2,4,5,6\}$, $A_{4,27} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{4,28} = \{1,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,29} = \{2,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,30} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_{4,31} = \{1,2,4,5,6,7\}$, $A_{4,32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{4,33} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,34} = \{1,2,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,35} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$*;*

для $\mathcal{K}_5$ *—* $A_{5,1} = \varnothing$, $A_{5,2} = \{1\}$, $A_{5,3} = \{5\}$, $A_{5,4} = \{7\}$, $A_{5,5} = \{1,2\}$, $A_{5,6} = \{5,6\}$, $A_{5,7} = \{1,5\}$, $A_{5,8} = \{1,7\}$, $A_{5,9} = \{5,7\}$, $A_{5,10} = \{1,2,3\}$, $A_{5,11} = \{1,5,6\}$, $A_{5,12} = \{1,2,5\}$, $A_{5,13} = \{1,2,7\}$, $A_{5,14} = \{5,7,8\}$, $A_{5,15} = \{5,6,7\}$, $A_{5,16} = \{1,5,7\}$, $A_{5,17} = \{1,2,3,4\}$, $A_{5,18} = \{1,2,5,6\}$, $A_{5,19} = \{1,2,3,5\}$, $A_{5,20} = \{1,2,3,7\}$, $A_{5,21} = \{5,6,7,8\}$, $A_{5,22} = \{1,5,6,7\}$, $A_{5,23} = \{1,5,7,8\}$, $A_{5,24} = \{1,2,5,7\}$, $A_{5,25} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{5,26} = \{1,2,3,4,7\}$, $A_{5,27} = \{1,2,3,5,6\}$, $A_{5,28} = \{1,2,3,5,7\}$, $A_{5,29} = \{1,2,5,6,7\}$, $A_{5,30} = \{1,2,5,7,8\}$, $A_{5,31} = \{1,5,6,7,8\}$, $A_{5,32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{5,33} = \{1,2,3,4,5,7\}$, $A_{5,34} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A_{5,35} = \{1,2,3,5,7,8\}$, $A_{5,36} = \{1,2,5,6,7,8\}$, $A_{5,37} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A_{5,38} = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $A_{5,39} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$.

Лемма доказывается перебором всех возможных случаем.

Покажем сначала, что ч. у. множества $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ и двойственные к ним ч. у. множества можно получить из критических множеств Клейнера с помощью операции, указанной в пункте II вышеуказанного алгоритма. Заметим, что (в силу результатов работы [3]) отсюда будем следовать, что $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ и двойственные к ним ч. у. множества являются P-критическими.

Выделим для ч. у. множеств $\mathcal{K}_i$, $1 < i < 5$ пары $Z = (Y, X)$ нижних собственных подножеств такие, что $X \subseteq Y$ и $X < S \setminus Y$:

для $\mathcal{K}_2$ — $B_{2,1} = (A_{2,9}, \{5\})$;

для $\mathcal{K}_3$ — $B_{3,1} = (A_{3,16}, \{5\})$, $B_{3,2} = (A_{3,19}, \{5\})$, $B_{3,3} = (A_{3,19}, \{5,6\})$;

для $\mathcal{K}_4$ — $B_{4,1} = (A_{4,21}, \{4\})$, $B_{4,2} = (A_{4,27}, \{4\})$, $B_{4,3} = (A_{4,27}, \{4,5\})$, $B_{4,4} = (A_{4,32}, \{4\})$, $B_{4,5} = (A_{4,32}, \{4,5\})$, $B_{4,6} = (A_{4,32}, \{4,5,6\})$, $B_{4,7} = (A_{4,34}, \{2\})$, $B_{4,8} = (A_{4,35}, \{4\})$, $B_{4,9} = (A_{4,35}, \{4,5\})$, $B_{4,10} = (A_{4,35}, \{4,5,6\})$, $B_{4,11} = (A_{4,35}, \{4,5,6,7\})$.

Обозначим через $K'_{i,j}$ ч. у. множество $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$ при $S = \mathcal{K}_i$ и $(Y, X) = B_{i,j}$. Тогда легко убедиться в том, что $K'_{2,1} \cong M_1$, $K'_{3,1} \cong M_2^{\mathrm{op}}$, $K'_{3,2} \cong M_6$, $K'_{3,3} \cong M_2$, $K'_{4,1} \cong M_3^{\mathrm{op}}$, $K'_{4,2} \cong M_7^{\mathrm{op}}$, $K'_{4,3} \cong M_4^{\mathrm{op}}$, $K'_{4,4} \cong M_9^{\mathrm{op}}$, $K'_{4,5} \cong M_8$, $K'_{4,6} \cong M_4$, $K'_{4,7} \cong M_5$, $K'_{4,8} \cong M_{10}$, $K'_{4,9} \cong M_9$, $K'_{4,10} \cong M_7$, $K'_{4,11} \cong M_3$.

Отсюда, как видим, следует требуемое утверждение.

Чтоб закончить доказательство нашей теоремы, осталось доказать еще следующее утверждение.

Лемма 2. *P- критические ч. у. множества $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ и M_2^{op}, M_3^{op}, M_4^{op}, M_7^{op}, M_9^{op} не являются M-стандартными.*

Доказательство. Предположим противоположное. Тогда существуют ч. у. множество T из тех, что указаны в условии леммы, критическое множество Клейнера $S = \mathcal{K}_i$ и нижнее подмножество X в S такие, что $T = S_X^{\uparrow}$.

Все (с точностью до сильного изоморфизма) нижние подмножества в критических множествах Клейнера $\mathcal{K}_1$–$\mathcal{K}_5$ указаны в лемме 1.

Если теперь вычислить для каждого из указанных нижних подмножеств $X = A(i, j)$ критического множества Клейнера $S = \mathcal{K}_i$ ч. у. множество $T = S_X^{\uparrow}$ (см. пункт 6 работы [3]), то легко убедиться в том, что среди полученных ч. у. множеств нет ч. у. множеств $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ и двойственные к ним. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Теорема 1 доказана.

1. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.
3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, №3. – С. 18-58.
4. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – №1. – С. 24-25.

Получено 29.10.2012

УДК 517.51

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Л. І. Фундак, Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ПРО ТОЧНІСТЬ ДЕЯКИХ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ, ОДЕРЖАНИХ ВНАСЛІДОК АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ НЕКЛАСИЧНОЮ МАЖОРАНТОЮ НЬЮТОНА

Assessment of the accuracy of approximation of twice continuously differentiable and logarithmically convex function is considered.

Розглянуто оцінку точності апроксимації двічі неперервно диференційованої і логарифмічно опуклої функції.

1.Вступ.В [1] розглянуто точність апроксимації довільної неперервної логарифмічно вгнутої функції $f(x)$, визначеної на проміжку $[a,\, b]$, некласичною мажорантою Ньютона $M_f(x)$ [2], побудованою для функції $f(x)$ за її значеннями у вибраній системі точок $x_0,\, x_1, ...,\, x_n$ проміжку $[a,\, b]$, а також точність апроксимації довільної неперервної функції функцією $g_n(f;\, x)$, яка на кожному проміжку $[x_i,\, x_{i+1}]$, $i = 0,\, 1, ...,\, n-1$, збігається з некласичною мажорантою Ньютона, побудованою за значеннями функції $f(x)$ в двох точках x_i та x_{i+1}. Якщо при цьому функція $f(x)$ є двічі неперервно диференційованою на проміжку $[a,\, b]$, то в [3] показано, що точність апроксимації в цьому випадку є на порядок вищою.

У роботі розглянемо оцінку точності апроксимації двічі неперервно диференційованої і логарифмічно опуклої функції $f(x)$, визначеної на проміжку $[a,\, b]$, функцією $g_n(f;\, x)$, яка на кожному проміжку $[x_i,\, x_{i+1}]$ вибраної системи точок збігається з некласичною мажорантою Ньютона, побудованою за значеннями функції $f(x)$ в двох точках x_i та x_{i+1}. Крім того, встановимо оцінки похибки наближеного обчислення визначених інтегралів і інтерполяційного методу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь у випадку, коли підінтегральна функція, що апроксимується некласичною мажорантою Ньютона, є двічі неперервно диференційованою і логарифмічно опуклою.

2. Формулювання задач.

Задача 1. Припустимо, що $f(x) \in C^2[a,\, b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,\, b]$. Виберемо на проміжку $[a,\, b]$ систему рівновіддалених точок $x_i = x_0 + ih \quad (i = 0,\, 1, ...,\, n)$, де $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$, і побудуємо функцію $g_n(f;\, x)$, визначену на $[a,\, b]$, яка на кожному з проміжків $[x_i,\, x_{i+1}]$, $i = 0,\, 1, ...,\, n-1$, збігається з некласичною мажорантою Ньютона, побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_i,\, f\,(x_i))$, $(x_{i+1},\, f\,(x_{i+1}))$. Знайдемо оцінку похибки апроксимації функції $f(x)$ функцією $g_n(f;\, x)$.

Задача 2. В [4], використовуючи некласичну мажоранту Ньютона, побудована формула для наближеного обчислення визначених інтегралів

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\ln\left(f(x_{k+1})/f(x_k)\right)} + R_n(f).$$

Знайдемо оцінку похибки цієї формули у випадку, коли $f(x)$ – двічі неперервно диференційована і логарифмічно опукла функція.

Задача 3. В [5], використовуючи некласичну мажоранту Ньютона, розроблено чисельний метод інтерполяційного типу

$$y_{i+1} = y_i + h\,\frac{f\,(x_{i+1},\,y_{i+1}) - f\,(x_i,\,y_i)}{\ln\,(f\,(x_{i+1},\,y_{i+1})/f\,(x_i,\,y_i))} \quad (\,i = 0,\,1, ...,\,n-1\,),$$

де $y_0 = y(x_0)$, розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

$$y' = f(x,\,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Знайдемо оцінку похибки методу у випадку, коли $f\,(x,\,y(x))$ – двічі неперервно диференційована і логарифмічно опукла функція, де $y(x)$ – розв'язок задачі.

3. Розв'язування задач.

Задача 1. Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Якщо* $f(x) \in C^2[a,\,b]$ *– логарифмічно опукла функція на проміжку* $[a,\,b]$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$$

рівномірно для всіх $x \in [a,\,b]$ *і справедлива оцінка*

$$g_n(f;x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}h^2,$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a,\,b]} f''(x)$.

Доведення. Нехай

$$\max_{x\in[a,\,b]}\,(g_n(f;x) - f(x)) = \max_{x\in[x_k,\,x_{k+1}]}\,(g_n(f;x) - f(x))\,.$$

Зазначимо, якщо $f(x)$ – логарифмічно опукла функція, то $f(x) \le g_n(f;x)$. Оскільки для $x \in [x_k,\,x_{k+1}]$

$$g_n(f;x) - f(x) \le L_1(x) - f(x) \le -\frac{f''(\xi)}{2}\,(x-x_k)\,(x-x_{k+1})\,,$$

де $L_1(x)$ – інтерполяційний многочлен Лагранжа, побудований для функції $f(x)$ за двома вузлами x_k і x_{k+1}, $\xi \in (x_k,\,x_{k+1})$, то для $x \in [a,\,b]$

$$g_n(f;x) - f(x) \le -\frac{f''(\xi)}{2}\,(x-x_k)\,(x-x_{k+1})\,.$$

Очевидно,

$$\max_{x\in[x_k,\,x_{k+1}]}\,|(x-x_k)\,(x-x_{k+1})| = \frac{h^2}{4}$$

і досягається при $x = \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$. Тому для всіх $x \in [a,\,b]$

$$g_n(f;x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}h^2.$$

Задача 2. Якщо $f(x) \in C^2[a,\, b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,\, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} M_f(x)\,\mathrm{dx},$$

де $M_f(x)$ – мажоранта Ньютона, побудована для функції $f(x)$ за двома точками $(x_k,\, f(x_k))$, $(x_{k+1},\, f(x_{k+1}))$. Тому залишковий член

$$R_n(x) \le \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (M_f(x) - f(x))\,\mathrm{dx} \le \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (L_1(x) - f(x))\,\mathrm{dx} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left(-\frac{f''(\xi)}{2}\,(x - x_k)\,(x - x_{k+1})\right)\mathrm{dx},$$

де $L_1(x)$ – інтерполяційний многочлен Лагранжа, побудований для функції $f(x)$ за двома вузлами x_k і x_{k+1}, $\xi \in (x_k,\, x_{k+1})$.

Функція $f(x) \in C^2[a,\, b]$, а добуток $(x - x_k)\,(x - x_{k+1})$ на проміжку $[x_k,\, x_{k+1}]$ не змінює знака. Тому на основі теореми про середнє значення визначеного інтеграла існує таке $\xi \in (x_k,\, x_{k+1})$, що

$$-\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f''(\xi)}{2}\,(x - x_k)\,(x - x_{k+1})\,\mathrm{dx} = -\frac{f''(\xi)}{2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)\,(x - x_{k+1})\,\mathrm{dx} \le$$

$$\le \frac{f''(\xi)}{2}\,h^2 \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{dx} = \frac{f''(\xi)}{2} h^3.$$

Тому

$$R_n(x) \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f''(\xi)}{8} h^3 = \frac{b-a}{8} f''(\xi) h^2.$$

Задача 3. Зазначимо спочатку, що додатна функція $g(x) \in C^2[a,\, b]$ буде логарифмічно опуклою на проміжку $[a,\, b]$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $x \in [a,\, b]$ виконується нерівність

$$g''(x)g(x) - \left(g'(x)\right)^2 > 0.$$

Нехай $f(x,\, y) \in C^2(\bar{\Omega})$. Тоді очевидне

Твердження 1. *Для того, щоб функція $f(x,\, y)$ була логарифмічно опуклою на $\bar{\Omega}$, необхідно і досить, щоб для всіх $(x,\, y) \in \bar{\Omega}$, виконувалась нерівність*

$$f''(x,\, y) f(x,y) - \left(f'(x,\, y)\right)^2 > 0,$$

де

$$f'(x,\, y) = f'_x(x,\, y) + f'_y(x,\, y)\, f(x,y),$$

$$f''(x,\, y) = f''_{xx}(x,\, y) + 2f''_{xy}(x,\, y)f(x,\, y) + f''_{yy}(x,\, y)f^2(x,y) + f'_y(x,\, y)f'_{(}x,\, y).$$

Якщо функція $f(x,\, y(x)) \in C^2\,[a,b]$ – логарифмічно опукла, то похибка визначається формулою

$$R_{i+1}(x) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (M_f(x) - f(x))\,\mathrm{dx} \leq \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (L_1(x) - f(x))\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{f''(\xi)}{2}\,(x - x_i)\,(x - x_{i+1})\right) \mathrm{dx} \leq -\frac{f''(\xi)}{2} h^3,$$

де $\xi \in (x_i,\, x_{i+1})$, $M_f(x)$ – мажоранта Ньютона, побудована для функції $f(x,\, y(x))$ за двома точками $(x_i,\, f\,(x_i,\, y(x_i)))$, $(x_{i+1},\, f\,(x_{i+1},\, y(x_{i+1})))$. Тому похибка чисельного методу становить $O(h^2)$.

4. Висновки. Показано, що точність апроксимації логарифмічно опуклої функції $f(x,\, y(x)) \in C^2\,[a,b]$ функцією $g_n(f;\, x)$, ланками якої є некласичні мажоранти Ньютона, побудовані для функції $f(x)$ на кожному проміжку вибраної системи точок за двома вузлами – кінцями проміжку, становить $O(h^2)$. Крім того, встановлено, що точність наближеної формули для обчислення визначених інтегралів і чисельного методу інтерполяційного типу для розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь становить також $O(h^2)$ при апроксимації підінтегральної функції некласичною мажорантою Ньютона.

1. *Цегелик Г. Г.* Використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, для апроксимації функцій / Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2001. – №6. – С.32-37.
2. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение / Г.Г.Цегелик // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
3. *Грипинська Н.В.* Оцінка похибки наближення функцій некласичною мажорантою Ньютона / Н. В. Грипинська, Г. Г. Цегелик // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл.матем. та інформ. – Л., 2007. – Вип. 12. – С. 32-35.
4. *Цегелик Г. Г.* Використання некласичного апарату мажорант і діаграм Ньютона функцій для побудови нової квадратурної формули / Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Л., 1995. – Вип. 41. – С. 108-111.
5. *Цегелик Г. Г.* Інтерполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь / Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2002. – №2. – С.37-43.

Одержано 17.10.2012

УДК 517.9

М.В. Грисенко (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)**,**
В. І. Кравець (Таврійський держ. агротехнол. ун-т, м. Мелітополь)

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ДЕЯКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

We grounded the application of averaging method to optimal control problems of functional-difference equations.

Обгрунтовано застосування методу усереднення до задач оптимального керування функціонально-різницевими рівняннями.

Вступ. Одним з найбільш поширених методів аналізу нелінійних динамічних систем є метод усереднення. Для систем звичайних диференціальних рівнянь він був обгрунтований Боголюбовим в [1].

В подальшому даний метод узагальнювався на різні класи диференціальних рівнянь, наприклад, імпульсні [4], функціонально-диференціальні ([5–7]) та інші.

Метод усереднення виявився також ефективним і до розв'язування задач оптимального керування. Даним питанням присвячена низка робіт (див.напр. [1]), де є широка бібліографія.

В роботі [2] використано відмінний від раніше відомих підходів щодо застосування методу усереднення, а саме здійснювалось усереднення по часу, що явно входить в праві частини системи, вважаючи функцію керування u параметром, далі при дослідженні усередненої системи розглядаються ті ж керування, що і для початкової задачі. Таким чином, множина керувань U для початкової і усередненої задач співпадає, при цьому не вимагається, щоб U була компактом.

У даній роботі вказаний результат перенесено на системи функціонально-диференціальних рівнянь. Важливо при цьому відзначити, що на відміну від вихідної системи, усереднена є вже автономною системою звичайних диференціальних рівнянь — об'єктом значно простішої природи, ніж система функціонально-диференціальних рівнянь.

Основним результатом роботи є встановлення зв'язку між оптимальним керуванням усередненої та точної систем, а саме доводиться, що оптимальне керування усередненою системою є ε—оптимальним для точної системи.

Робота складається зі вступу, постановки задачі, допоміжної леми та основного результату.

1. Необхідні позначення та постановка задач. Введемо необхідні для подальшого позначення та функціональні простори.

Нехай $h > 0$. Через $C_n([-h, 0])$ позначимо простір неперервних вектор-функцій визначених на $[-h, 0]$, що діють в простір $\mathbb{R}$. Введенням норми $\|x\| = max_{[-h,0]}|x(t)|$ він перетворюється в банахів простір $\hat{B}_n(X)$.

Через $\hat{B}_n(X)$ позначимо простір вимірних відображень вимірного топологічного простору (X, Σ_X) в простір $\mathbf{R^n}$. Тут Σ_X— сігма-алгебра вимірних множин в X. Таким чином, елементами простору $\hat{B}_n(X)$ є n-мірні вимірні функціонали над простором X.

В подальшому ми будемо працювати з наступним функціональним простором, який у введених позначеннях має вигляд $\hat{B_n}(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h,0]))$. Тут $\mathbb{R}^+$— невід'ємні дійсні числа. Таким чином, якщо елемент $X(t,z) \in \hat{B_n}(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h,0]))$, то він є вимірною функцією по першому і третьому аргументах і n-мірним функціоналом за другим аргументом.

Нехай $x(t) \in C_n([0,\infty])$, $\varphi(t) \in C_n([-h,0])$ при деякому $h > 0$, $X(t,\varphi) \in \hat{B_n}(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h,0]))$. Якщо $x(0) = \varphi(0)$, то функція

$$x(t,\varphi) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h,0] \\ x(t), & t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

неперервна. Введемо для кожного $t \geq 0$ елемент $x_t(\varphi) \in C_n([-h,0])$ наступною рівністю

$$x_t(\varphi) = x(t+\theta,\varphi), \quad \theta \in [-h,0]. \tag{2}$$

Будемо говорити, що функція $x(t)$ є розв'язком початкової задачі

$$x(t) = \varphi(t), \quad \text{при} \quad t \in [-h,0] \tag{3}$$

для диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x_t) \tag{4}$$

на $[0,\infty)$, якщо для кожного $t \geq 0$ функція $x(t,\varphi)$ з (1) задовольняє співвідношення

$$x(t,\varphi) = \varphi(0) + \int\limits_0^t X(s,x_s(\varphi))ds. \tag{5}$$

Перейдемо тепер безпосередньо до постановки задачі.

Нехай U—деяка підмножина з простору $\mathbb{R}^n$, $X(t,z,u) \in \hat{B_n}(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h,0]) \times U)$.

Розглянемо задачу оптимального керування системою диференціально-функціональних рівнянь.

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x_t,u), \tag{6}$$

$x(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h,0]$, $h \geq 0$, $\varphi \in C_n([-h,0])$. Тут $\varepsilon > 0$— малий параметр, $x \in \mathbb{R}^n$—фазовий вектор, $u = u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$—вектор керування, $t \geq 0$ $T > 0$—деяка константа.

Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо виконуються умови:

а1) $u(t) \in U$, при $t \geq 0$;

а2) $u(t)$—вимірні, локально інтегровні при $t \geq 0$ функції;

а3) для кожного $u(t)$ існує стала $u_0 \in U$, що $|u(t) - u_0| \leq \varphi(t)$, де $\varphi(t)$—незалежна від $u(t)$ функція, для якої $\int_0^\infty \varphi(t)dt < \infty$.

Множину допустимих керувань позначимо F. Для кожного допустимого керування $u(t)$ через $x(t,u)$ позначимо розв'язок початкової задачі (6) при $u = u(t)$.

Задача оптимального керування системою (6) полягає в знаходженні такого допустимого керування $u(t \in F)$, що забезпечує мінімальне значення функціонала якості

$$J_\varepsilon(u) = \Phi\left(X\left(\frac{T}{\varepsilon}\right), u\right) \to inf, \tag{7}$$

де $\Phi(x)$—деяка функція визначена в $\mathbb{R}^n$. Позначимо $J_\varepsilon = \inf\limits_{u\in F} J_\varepsilon(u)$.

Поставимо у відповідність системі диференціально-функціональних рівнянь (6) усереднену систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(y,u), y(0) = \varphi(0), \tag{8}$$

де

$$X_0(x,u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^t X(t,x,u)dt, \tag{9}$$

та критерій якості

$$\bar{J}_\varepsilon(u) = \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}\right), u\right) \to inf. \tag{10}$$

Нехай $\bar{u}^*(t,\varepsilon)$— оптисальне керування для задачі (8),(10), тобто $\bar{J}_\varepsilon(u) = \inf\limits_{u\in F} \bar{J}_\varepsilon(u) = \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon))$.

В роботі доводиться, що керування $\bar{u}^*(t,\varepsilon)$ є η-оптимальним для задачі (6), (7), а саме, що для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 > 0$, що при всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ виконується нерівність

$$|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon| < \eta.$$

Для доведення вище згаданого твердження нам потрібна наступна лема, що є узагальненням принципу усереднення для диференціально-функціональних рівнянь на випадок залежності правих частин від функціональних параметрів.

Лема 1. *Нехай для відображення* $X(t,z,u) \in \hat{B}_n(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h,0]), U)$ *виконані умови:*

1) $X(t,z,u)$ *задовольняє умову Ліпшиця в формі : існує* $M > 0$*, що при всіх* φ *і* $\psi \in C_n([-h,0])$, $u_1, u_2 \in U$ $t \geq 0$ *виконана нерівність*

$$|X(t,\varphi,u_1) - X(t,\psi,u_2)| \leq M(\| \varphi - \psi \| + |u_1 - u_2|);$$

2) існує стала $A \geq 0$*, що при* $t \geq 0$, $u \in U$ *справедлива нерівність*

$$|X(t,0,u)| \leq A;$$

3) рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}^n$ *та* $u \in U$ *справедлива рівність (9).*

Тоді для довільних $\eta > 0$ *і* $T > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, T) > 0$*, що для довільного* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *та* $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ *справедлива нерівність*

$$|x(t,u) - y(t,u)| \leq \eta \tag{11}$$

для кожного допустимого керування $u \in F$.

Доведення. По-перше, зауважимо, що з умов 1) і 2) леми випливає існування, єдиність і необмежувана продовжуваність вправо розв'язку $x(t,u)$ початкової задачі (6) ([7],с.56).

По-друге, з існування рівномірної границі (9) та умов на функцію X випливає, що функція $X_0(y,u)$ є глобально ліпшицевою за змінними y і u та задовольняє за змінною y умову лінійного росту рівномірно по $u \in U$. А тому розв'язок задачі Коші (8) існує, єдиний і необмежено продовжуваний вправо.

Візьмемо тепер довільне $\eta > 0$ і зафіксуємо його. Для $\varepsilon > 0$ і довільного допустимого керування оцінимо норму різниці між розв'язками системи (6) та наступної системи:

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon X(t, \bar{x}_t, u_0), \bar{x}(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0], \tag{12}$$

де u_0 вибрано з умови a3) для u_t.

Переходячи в (6) і (12) до інтегральних зображень, отримаємо

$$x(t) = \varphi(0) + \varepsilon \int\limits_0^t X(s, x_s(\varphi), u(s))ds \tag{13}$$

та

$$\bar{x}(t) = \varphi(0) + \varepsilon \int\limits_0^t X(s, \bar{x_s}(\varphi), u_0)ds. \tag{14}$$

Віднімаючи від (13) (14) та додаючи і віднімаючи $X(s, \bar{x_s}(\varphi), u(s))$ отримаємо

$$|x(t) - \bar{x}(t)| = \varepsilon \int\limits_0^t [X(s, x_s(\varphi), u(s)) - X(s, \bar{x_s}(\varphi), u(s))]ds +$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t [X(s, \bar{x_s}(\varphi), u(s)) - X(s, \bar{x_s}(\varphi), u_0)]ds.$$

Використовуючи тепер умову 1) леми отримаємо

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| \le \varepsilon M \int\limits_0^t \max_{-h \le \theta \le 0} |x(s+\theta, \varphi) - \bar{x}(s+\theta, \varphi)| ds + \varepsilon M \int\limits_0^t \varphi(s)ds \le \\ \le \varepsilon M \int\limits_0^{\frac{L}{\varepsilon}} \max_{-h \le \theta \le 0} |x(s+\theta, \varphi) - \bar{x}(s+\theta, \varphi)| ds + \varepsilon MC, \end{aligned} \tag{15}$$

де $C = \int\limits_0^\infty \varphi(s)ds$.

Позначимо $m(t) = \sup\limits_{s \in [-h, t]} |x(s) - \bar{x}(s)|$.

Тоді з (15) отримуємо

$$m\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \le \varepsilon M \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} m(s)ds + \varepsilon MC.$$

Звідки, з використанням леми Гронуолла-Беллмана маємо, що

$$m\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \le \varepsilon MC e^{TM}.$$

Останнє означає, що для будь-якого $t \in [-h, \frac{T}{\varepsilon}]$ справедлива нерівність

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon M C e^{TM} \tag{16}$$

рівномірно по всіх $u \in F$.

Аналогічними міркуваннями на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ отримується така ж оцінка для розв'язків системи

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}} &= \varepsilon X_0(\bar{y}, u_0), \\ \bar{y}(0) &= \varphi(0) \end{aligned} \tag{17}$$

та розв'язків системи (8), тобто

$$|y(t) - \bar{y}(t)| \leq \varepsilon M C e^{TM}. \tag{18}$$

виконана рівномірно по $u \in F$.

Але для систем (12) та (17) в силу теореми усереднення ([7],с.256) для достатньо малих ε справедлива нерівність

$$|\bar{x}(t) - \bar{y}(t)| \leq \frac{\eta}{2} \tag{19}$$

при всіх $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$. В силу рівномірної по $u \in U$ збіжності в (9) дана оцінка рівномірна по всім $u_0 \in U$.

Тоді з (16), (18) та (19) для $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ отримуємо оцінку

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - \bar{x}(t)| + |\bar{x}(t) - \bar{y}(t)| + |y(t) - \bar{y}(t)| \leq 2\varepsilon M C e^{TM} + \frac{\eta}{2} \equiv \eta,$$

рівномірну по $u(t) \in F$. Останнє і доводить лему.

2. Основний результат. Перейдемо тепер до викладення основного результату роботи. Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай для відображення* $X(t, z, u) \in \hat{B}_n(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h, 0]), U)$ *виконані умови попередньої леми та наступні умови:*

1) функція $\Phi(x)$ *задовольняє умову Ліпшиця з константою* $L > 0$ *при* $x \in \mathbb{R}^n$*;*

2) існує оптимальне керування $\bar{u}^*(t, \varepsilon)$ *усередненої задачі (8), (10).*

Тоді для довільного $\eta > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$*, що:*

а) для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $J_\varepsilon > -\infty$*;*

б) виконується нерівність $|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t, \varepsilon)) - J_\varepsilon| \leq \eta$*, тобто оптимальне керування усередненої задачі є* η*-оптимальним для точної.*

Доведення. Твердження а) теореми доведемо від супротивного. Нехай а) не виконується. Тоді існує послідовність ε_n така, що $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, а

$$J_{\varepsilon_n} = -\infty. \tag{20}$$

За означенням інфінума, для кожного ε_n існує послідовність керувань $u_m^n \in F$, що

$$J_{\varepsilon_n}(u_m^n) \to -\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{21}$$

Оскільки ці керування допустимі, то при них системи (6) і (8) мають відповідно розв'язки $x_m^n(t)$ і $y_m^n(t)$ визначені при $t \geq 0$. Оскільки для системи (8) для кожного ε існує оптимальне керування, то

$$J_{\varepsilon_n}(y_m^n) > \bar{J}_{\varepsilon_n} > -\infty.$$

Зафіксуємо тепер деяке $\eta_0 > 0$. Для нього існує натуральне n_0, що при $\varepsilon_n < \varepsilon_{n_0}$ справедливі оцінки

$$|J_{\varepsilon_n}(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n)| = \left|\Phi\left(x_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right) - \Phi\left(y_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq L\left|x_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right) - y_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right| \leq L\eta_0.$$

Звідси отримуємо

$$J_{\varepsilon_n}(u_m^n) > J_{\varepsilon_n}(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) + \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) > \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) - L\eta_0,$$

що приводить до протиріччя з (21).

Доведемо тепер твердження б).

Має місце нерівність

$$J_\varepsilon \leq J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) = \bar{J}_\varepsilon + LJ_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)).$$

Але

$$|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon))| =$$

$$= \left|\Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right)\right) - \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq L\left|x\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right) - y\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right)\right|.$$

Звідки, застосовуючи вище доведену теорему, для довільного $\eta_1 > 0$ при достатньо малих ε отримаємо оцінку

$$J_\varepsilon \leq \bar{J}_\varepsilon + L\eta_1. \tag{22}$$

З означення інфінуму також маємо, що для вибраного η_1 існує керування $u_{\eta_1}(t,\varepsilon)$ з виконанням нерівності

$$J_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) < J_\varepsilon + \eta_1.$$

З останньої отримується оцінка

$$\bar{J}_\varepsilon = \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) \leq \bar{J}_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) \leq \bar{J}_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) + J_\varepsilon + \eta_1 - J_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)).$$

Використовуючи умову 1) теореми та доведену лему, з (22) будемо мати

$$\bar{J}_\varepsilon \leq J_{\varepsilon+(L+1)\eta_1}.$$

Врахувавши при цьому (10) з останньої нерівності отримуємо оцінку між критеріями якості точної та усередненої систем

$$|J_\varepsilon - \bar{J}_\varepsilon| \leq (L+1)\eta_1. \tag{23}$$

Далі розглянемо різницю

$$|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon| \leq |J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon| + |\bar{J}_\varepsilon - J_\varepsilon|. \tag{24}$$

Але

$$|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon| = \left|\Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right)\right) - \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right)\right)\right| \leq L\eta_1.$$

Звідси, з урахуванням (23) і (24) остаточно отримуємо

$$|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon| \leq \eta,$$

де $\eta = \eta_1(2L+1)$, що й доводить теорему.

1. *Боголюбов Н.Н.*О некоторвх статистических методах в математической физике: К.:Изд.АН УССР, 1945.—150с.
2. *Носенко Т.В., Станжицький О.М.* Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування: Нелінійні коливання — .— .
3. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. —К.: Одесса:Лыбидь, 1992.— 188с.
4. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Вторая теорема Боголюбова Н.Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием: Диф.уравнения —1974.—10, №11.— С.2001—2010.
5. *Фодчук В.И.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра: Укр.мат.журнал —1964.—16,№2 -С.273-279.
6. *Халанай А.* Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. –Rev.math.pures et appl. Acad. RPR.—4.3—1959. С.467-483.
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.—М.Мир,—1984.—421с.

Одержано 14.09.2012

УДК 519.21

В. Й. Дзямко (Ужгородський нац. ун-т)
Ю. В. Козаченко (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)
А. І. Моца (Ужгородський нац. ун-т)

УМОВИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ЗОБРАЖЕНЬ φ-СУБГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ВИГЛЯДІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ

In this article the conditions and rates uniforms convergence of representation φ-subgaussian periodic random processes in the form of trigonometric series ave considered.

В даній роботі розглядаються умови та швидкість рівномірної збіжності зображень φ-субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді тригонометричних рядів.

Вступ. Робота є продовженням статті [1], в якій сформульовані всі необхідні відомості з теорії просторів $sub_\varphi(\Omega)$ і введені відповідні позначення. В статті [1] розглядалися зображення періодичних строго φ-субгауссових випадкових процесів у вигляді рядів за ортонормованими тригонометричними поліномами і були знайдені умови та швидкість збіжності цих рядів у просторі $L_2\left([0,\pi],\mu\right)$.

В цій роботі вивчаються умови та швидкість збіжності за ймовірністю таких же рядів у просторі $C([0,\pi])$. Робота складається із вступу і трьох розділів. В першому розділі знайдено умови збіжності рядів у просторі $C([0,\pi])$, в другому – швидкість цієї збіжності, а в третьому розділі розглядаються приклади.

1. Умови збіжності зображень строго φ-субгауссових процесів у вигляді рядів за тригонометричними поліномами у просторі $C([0,\pi])$.

Нехай $X=\{x(\theta),\theta\in\mathbb{R}\}$ – строго φ-субгауссовий з визначальною константою C_x періодичний з періодом 2π випадковий процес. Процес X-вимірний, $x(\theta)=x(-\theta)$, $Ex(\theta)=0$, $\sup\limits_{0\leq\theta\leq\pi} E\mid x(\theta)\mid^2<\infty$, $Ex(\theta)x(\xi)=R(\cos\theta,\cos\xi)$, $0\leq\theta\leq\pi$.

Покладемо, що процес X неперервний в середньому квадратичному, тобто функція $R(t,s)$, $-1\leq t\leq 1$, $-1\leq s\leq 1$, неперервна. Розглянемо цей процес на відрізку $[0,\pi]$. Як і в роботі [1] цей процес називатимемо стандартним φ-субгауссовим випадковим процесом.

Зауважимо, що центрований гауссів процес є строго φ-субгауссовим з визначальною константою $C_x=1$.

Нехай $T_k(\theta)$, $k=0,1,2,...$, $\theta\in[0,\pi]$ – повна ортонормована система дійсних тригонометричних поліномів степені k на просторі $\{[0,\pi],\mu\}$, μ – скінченна міра. Тоді [1] $X(\theta)$ можна зобразити у вигляді ряду

$$X(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k\cdot T_k(\theta), \tag{1}$$

де $\xi_k=\int_0^T X(\theta)T_k(\theta)d\mu(\theta)$ і ряд (1) збіжний з імовірністю одиниця в нормі простору $L_2([0,\pi],\mu)$. Введемо позначення:

$$X_N(\theta)=\sum_{k=0}^{N}\xi_k\cdot T_k(\theta),$$

$$\Delta_N(\theta) = X(\theta) - X_N(\theta) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi \cdot T_k(\theta) -$$

похибка при апроксимації процесу $X(\theta)$ сумою $X_N(\theta)$. У роботі [1] показано, що

$$\tau_{\varphi}^2(\Delta_N(\theta)) \leq C_X^2 \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} (E\xi_k\xi_l) \cdot T_k(\theta) \cdot T_l(\theta), \tag{2}$$

де $\tau_{\varphi}(\cdot)$ – норма випадкових величин у просторі $sub_{\varphi}(\Omega)$.

Аналогічно встановлюється, що при $M < N$

$$\tau_{\varphi}^2(X_N(\theta) - X_M(\theta)) \leq C_X^2 \cdot \sum_{l=M+1}^{N} \sum_{k=M+1}^{N} (E\xi_k\xi_l) \cdot T_k(\theta)T_l(\theta). \tag{3}$$

Зауважимо, що

$$E\xi_k\xi_l = \int_0^T \int_0^T R(\cos\theta, \cos\zeta) T_k(\theta) T_l(\zeta) d\mu(\theta) d\mu(\zeta). \tag{4}$$

З нерівності (3) випливає така лема.

Лема 1. *Якщо при кожному* $\theta \in [0, \pi]$ *збігається ряд*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (E\xi_k\xi_l) \cdot T_k(\theta) \cdot T_l(\theta) < \infty, \tag{5}$$

то в кожній точці θ *ряд* (1) *є збіжним у середньому квадратичному, тобто* $E(X(\theta) - X_N(\theta)^2 \longrightarrow 0$ *при* $N \longrightarrow \infty$.

Наслідок 1. *При виконанні умови* (5) справджується таке граничне співвідношення: $X_N(\theta) \longrightarrow X(\theta)$ при $N \longrightarrow \theta$, $\theta \in (0, \pi)$ за ймовірністю.

Сформулюємо твердження, які є необхідними для доведення основних теорем.

Наступна теорема є частинним випадком теореми 3.6 з роботи [2].

Теорема 1. *Нехай* $Y_n = \{y_n(t), t \in [0, T]\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *– послідовність строго* φ*-субгауссових випадкових процесів,* $y_n \in C([0, T])$, *і виконується умова:*

$$\sup_{|t-s| \leq h} (E|y_n(t) - y_n(s)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h), \tag{6}$$

де $\sigma(h), h \leq 0,$ *– строго монотонно зростаюча неперервна функція, така, що* $\sigma(0) = 0$.

Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} \psi(\ln\left(1 + \frac{1}{\sigma^{(-1)(u)}}\right) du < \infty, \tag{7}$$

де $\psi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)(v)}}$, *а* $\sigma^{(-1)}(v)$ *– функція обернена до* $\sigma(v)$, *і для кожного* $t \in T$ *за ймовірністю* $X_n(t) \longrightarrow X(t)$ *при* $n \longrightarrow \infty$, *тоді* $X_n(t)$ *збігається за ймовірні-*

стю в просторі $C(T)$ до $X(t)$, тобто при $\delta > 0$

$$P\left\{\sup_{t\in L[0,T]} |X_n(t) - X(t)| > \delta\right\} \longrightarrow 0$$

при $n \longrightarrow \infty$.

Лема 2. [3] (Нерівність Бернштейна). *Нехай $T_k(x)$ – тригонометричний поліном степені k. Тоді*

$$\sup_x |T'_k(x)| \le k \cdot \sup_x |T_k(x)|.$$

З леми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай $T_k(x)$ – тригонометричний поліном степені k, то для будь-яких $t, s \in [0, \pi]$ справджується нерівність*

$$|T_k(t) - T_k(s)| \le k \cdot \sup_x |T_k(x)| \cdot |t - s|. \tag{8}$$

Наступна лема є модифікацією леми 4.2 з роботи [4].

Лема 3. *Нехай $Z_n(u)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $u \in [0, \pi]$ – послідовність функцій, така, що:*

1) $\sup\limits_{0\le u\le\pi} |Z_n(u)| \le B_n$;

2) *для всіх $u, v \in [0, \pi]$ має місце нерівність $|Z_n(u) - Z_n(v)| \le C_n \cdot n \cdot |u - v|$;*

3) *$S(u), u > 0$ – монотонно зростаюча функція, така, що для деякої константи $r \ge 0$ функція $\frac{u}{S(u)}$ – монотонно зростає при $u > r$. Тоді для всіх $n \ge 1$ справджується нерівність*

$$|Z_n(u) - Z_n(v)| \le \max(C_n, 2B_n) \cdot \frac{S(n + r)}{S\left(r + \frac{1}{|u-v|}\right)}. \tag{9}$$

З леми 3 та наслідку 2 випливає таке твердження.

Лема 4. *Нехай $T_k(u)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, – тригонометричний поліном степені k. Тоді для всіх $u, v \in [0, \pi]$ та $k = 1, 2, 3, \ldots$ має місце нерівність:*

$$|Z_k(u) - Z_k(v)| \le 2 \cdot \sup_u |T_k(u)| \cdot \frac{S(k + r)}{S\left(r + \frac{1}{|u-v|}\right)}, \tag{10}$$

де функція $S(u)$ визначена в лемі 3.

Наступна теорема – перша з двох основних теорем.

Теорема 2. *Нехай $X(\theta)$ – стандартний процес з простору $sub_\varphi(\Omega)$, $S(u)$ – функція, для якої виконуються умови леми 3, причому для кожного $\varepsilon < \frac{C}{S\left(r+\frac{1}{\pi}\right)}$ є збіжним інтеграл $\int\limits_0^\varepsilon \psi\left(\ln\left(S^{(-1)}\left(\frac{C}{u}\right) - r + 1\right)\right) du$, ($C$ – визначена в (12), а ψ визначена в теоремі 1), тоді, якщо збігається ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| \cdot S(k + r) \cdot S(l + r)C_k \cdot C_l < \infty, \tag{11}$$

(тут $C_k = \sup\limits_u |T_k(u)|$*), то* $X_N(\theta)$ *збіжний за ймовірністю в просторі* $C([0,\pi])$ *при* $N \longrightarrow \infty$ *до процесу* $X(\theta)$*, який є вибірково неперервний з імовірністю одиниця.*

Доведення. Справедливість теореми 2 випливає з теореми 1. Дійсно, з (11) випливає, що є збіжним ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}|E\xi_k\xi_l|\cdot C_k\cdot C_l,$$

тобто при кожному $\theta\in[0,\pi]$ збігається ряд (5). Отже, з наслідку 1 випливає, що в кожній точці $\theta\in[0,\pi]$ часткова сума $X_N(\theta)$ прямує до $X(\theta)$ при $N\longrightarrow\infty$ за ймовірністю.

Знайдемо тепер функцію $\sigma(h)$ з (6). Оскільки

$$X_N(\theta)-X_N(\zeta)=\sum_{k=0}^{N}\xi_k(T_k(\theta)-T_k(\zeta)),$$

то з леми 4 та умови (11) маємо, що

$$E|X_N(\theta)-X_N(\zeta)|^2=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}(E\xi_k\xi_l)(T_k(\theta)-T_k(\zeta))(T_l(\theta)-T_l(\zeta))\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}|E\xi_k\xi_l|\cdot|T_k(\theta)-T_k(\zeta)|\cdot|T_l(\theta)-T_l(\zeta)|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}|E\xi_k\xi_l|\cdot 2C_k\cdot\frac{S(k+r)}{S\left(\frac{1}{|\theta-\zeta|}+r\right)}\cdot 2C_l\cdot\frac{S(l+r)}{S\left(\frac{1}{|\theta-\zeta|}+r\right)}=$$

$$=\frac{4}{S^2\left(\frac{1}{|\theta-\zeta|}+r\right)}\cdot\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}|E\xi_k\xi_l|\cdot C_k\cdot C_l\cdot S(k+r)\cdot S(l+r)\le\frac{1}{S^2\left(\frac{1}{|\theta-\zeta|}+r\right)}\cdot C^2,$$

де

$$C^2=4\sum_{k=0}^{T}\sum_{l=0}^{T}|E\xi_k\xi_l|\cdot C_k\cdot C_l\cdot S(k+r)\cdot S(l+r). \tag{12}$$

Звідси маємо, що

$$\sigma(h)=\frac{C}{S\left(\frac{1}{h}+r\right)}.$$

Отже,

$$\sigma^{(-1)}(h)=\left(S^{-1}\left(\frac{C}{h}\right)-r\right)^{-1},\ \text{де } 0<h<\frac{C}{S^{-1}\left(r+\frac{1}{\pi}\right)}.$$

Тобто, при $\varepsilon<\frac{C}{S^{-1}\left(r+\frac{1}{\pi}\right)}$ отримаємо:

$$\int_0^{\varepsilon}\psi\left(\ln\left(\frac{1}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du=\int_0^{\varepsilon}\psi\left(\ln\left(S^{(-1)}\left(\frac{C}{u}\right)-r+1\right)\right)du<\infty.$$

Теорема доведена.

2. Швидкість збіжності зображень строго φ-субгауссового випадкового процесу у вигляді ряду за тригонометричними поліномами. Сформулюємо теорему, яка є окремим випадком наслідку 5.1 з роботи [2].

Теорема 3. *Нехай* $y = \{y(t), t \in [0,T]\}$ *– сепарабельний випадковий процес з простору* $sub_\varphi(\Omega)$. *Якщо виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\le h} \tau_\varphi (X(t) - X(s)) \le \sigma(h),$$

де $\sigma(h)$ *– строго монотонно зростаюча неперервна функція,* $\sigma(0) = 0$ *та для* $\sigma(h)$ *виконується умова (7), тоді для будь-якого* $p \in (0,1)$ *і* $u > 2 \cdot I_\varphi\left(\frac{p\varepsilon_0}{p\cdot(1-p)}\right)$ *справджується нерівність*

$$P\{\sup_{t\in[0,T]} |X(t)| > u\} \le 2A(u,p), \tag{13}$$

де

$$\varepsilon_0 = C_x \cdot \sup_{0\le t\le T} \left(E|X(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad I_\varphi(\delta) = \int\limits_0^\delta \psi\left(\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du,$$

$$A(u,p) = \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\left[u(1-p) - \frac{2}{p} I_\varphi(\theta\varepsilon_0)\right]\right)\right\},$$

$\varphi^*(u)$ *– перетворення Юнга-Фенхеля функції* $\varphi(u)$.

Другою основною теоремою роботи є така.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді при будь-яких*

$$0 < p < 1,\ u > 2I_\varphi(p\cdot\varepsilon_N)\cdot\frac{1}{p\cdot(1-p)}$$

має місце нерівність:

$$P\{\sup_{0\le\theta\le\pi} |\Delta_N(\theta)| > u\} \le 2A_N(u,p), \tag{14}$$

де

$$A_N(u,p) = \exp\left\{-\varphi * \left[\frac{1}{\varepsilon_N}\left(u(1-p) - \frac{2}{p}\cdot\hat{I}_\varphi(p\cdot\varepsilon_N)\right)\right]\right\},$$

$$\hat{I}_\varphi(\delta) = \int\limits_0^\delta \psi\left(\ln\left[\frac{\pi}{2}\left(S^{(-1)}\left(\frac{C_N}{u}\right) - r\right) + 1\right]\right) du,$$

$$C_N = 2C_x \cdot \left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| C_k \cdot C_l \cdot S(k+r)S(l+r)\right),$$

$$\varepsilon_N = C_x \sup_{0\le\theta\le\pi} \sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{k=N+1}^{\infty} (E\xi_k\xi_l)\cdot T_k(\theta)\cdot T_l(\theta)$$

$$\Delta_N(\theta) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k \cdot T_k(\theta).$$

Зауваження 1. *Справедлива нерівність*

$$\varepsilon_N \leq \hat{\varepsilon}_N = C_x \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| \cdot C_l \cdot C_k.$$

В оцінці (14) можна замінити ε_N на $\hat{\varepsilon}_N$.

Доведення теореми. Як і при доведенні теореми 2 маємо

$$E|\Delta_N(\theta) - \Delta_N(\zeta)|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{S^2\left(\frac{1}{|\theta-\zeta|} + r\right)} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| \cdot C_k \cdot C_l \cdot S(k+r) \cdot S(l+r).$$

Тобто, в позначеннях теореми 3 отримаємо

$$C(h) = C_N \cdot \frac{1}{S\left(\frac{1}{h} + r\right)}, \ \ \sigma^{(-1)}(h) = \left(S^{(-1)}\left(\frac{C_N}{h}\right) - r\right)^{-1},$$

$$\varepsilon_0 = C_x \cdot \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \left(E\Delta_N^2(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В роботі [1] показано, що

$$E\left(\Delta_N^2(\theta)\right) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} (E\xi_k\xi_l) \cdot T_k(\theta) \cdot T_l(\theta).$$

Звідси маємо

$$\sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \tau\left(\Delta_N(\theta)\right) \leq \varepsilon_N \leq \hat{\varepsilon}_N.$$

Таким чином, із теореми 3 випливає справедливість теореми 4. Теорема доведена.

3. Приклади

Приклад 1. *Нехай* $X(\theta)$ *– стандартний процес з простору* $sub_\varphi(\Omega)$. *Покладемо:*

$$S(v) = S_\psi(v) = \left(\psi\left[\ln\left(\frac{\pi}{2}v + 1\right)\right]\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

де γ *є будь-яким числом, що приймає значення з інтервалу* $(0;1)$. *Тоді*

$$S_\psi^{(-1)}(t) = \left[\exp\left\{\psi^{(-1)}(t^\gamma)\right\} - 1\right] \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Позначимо символом r_ψ *таке невід'ємне число, що при* $v > r_\psi$ *функція* $\frac{v}{S_\psi(v)}$ *монотонно зростає. Тоді*

$$\int_0^\delta \psi\left(\ln\left[\tfrac{\pi}{2}\left(S_\psi^{-1}\left(\tfrac{C_N}{u}\right) - r_\psi\right) + 1\right]\right) du =$$

$$= \int_0^\delta \psi\left(\ln\left[\exp\left\{\psi^{(-1)}\left(\left(\tfrac{C_N}{u}\right)^\gamma\right) - r_\psi\right\}\right]\right) du \leq$$

$$\leq \int_0^\delta \psi\left(\ln\left[\exp\left\{\psi^{(-1)}\left(\left(\tfrac{C_N}{u}\right)^\gamma\right)\right\}\right]\right) du \leq \int_0^\delta \left(\tfrac{C_N}{u}\right)^\gamma du = C_N^\gamma \cdot \delta^{1-\gamma} \cdot \tfrac{1}{1-\gamma} < \infty.$$

Отже, якщо існує $r_\xi \geq 0$, *для якого функція* $\frac{v}{S_\psi(v)}$ *монотонно зростає при* $v > r_\xi$, *тоді функція* $S_\psi(v)$ *задовольняє умови теореми 2.*

Отже, має місце наступна теорема.

Теорема 5. *Нехай* $X(\theta)$ *– стандартний випадковий процес з простору* $sub_\varphi(\Omega)$, *існує* $r_\xi \leq 0$ *таке, що при* $v > r_\xi$ *функція* $\frac{v}{S_\psi(v)}$ *строго монотонно зростає. Якщо є збіжним ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| \cdot S_\psi(k + r_\psi) \cdot S_\psi(l + r_\psi) \cdot C_k \cdot C_l,$$

тоді $X_N(\theta)$ *збігається за імовірністю у просторі* $C([0,\pi])$ *при* $N \to \infty$. *Процес* $X(\theta)$ *вибірково неперервний з імовірністю одиниця та якщо для деяких* $0 < p < 1$, $0 < \gamma < 1$

$$u > 2C_N^\gamma \cdot (p\varepsilon_N)^{1-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{p \cdot (1-p)},$$

то справджується нерівність

$$P\{\sup_{0\leq\theta\leq\pi} |\Delta_N(\theta)| > u\} \leq 2\hat{A}_N(u,p), \tag{15}$$

де

$$\hat{A}_N(u,p) = \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{1}{\varepsilon_N}\left[u(1-p) - \frac{2}{p} \cdot C_N^\delta \cdot (p \cdot \varepsilon_N)^{1-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\gamma}\right]\right)\right\}.$$

Розглянемо простори $sub_\varphi(\Omega)$, де $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, причому $\alpha \in (1,2]$. Тоді

$$\psi(x) = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot x^{1-\frac{1}{\alpha}} \text{ і } S_\psi(v) = \left[\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}v + 1\right)\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

де γ – будь-яке число, що $0 < \gamma < 1$. Звідси бачимо, що для цих просторів теорема 5 буде справедливою, якщо для деякого $\gamma \in (0,1)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| \cdot C_k \cdot C_l \cdot (\ln k)^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\gamma}} \cdot (\ln l)^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\gamma}} \tag{16}$$

є збіжним. Причому, якщо

$$u > 2C_N^\gamma \cdot (p\varepsilon_N)^{1-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{p(1-p)},$$

тоді справджується нерівність

$$P\{\sup_{0\leq\theta\leq\pi} |\Delta_N(\theta)| > u\} \leq 2\tilde{A}_N(u,p), \tag{17}$$

де

$$\tilde{A}_N(u,p) = \exp\left\{-\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{\varepsilon_N}\left(u(1-p) - \frac{2}{p} \cdot C_N^\gamma \cdot (p \cdot C_N)^{1-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\gamma}\right)\right]^\beta\right\},$$

і число β визначається з умови $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=1$.

Якщо процес гауссів, то умову (16) можемо визначити таким чином: для деякого $\gamma \in (0,1)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}|E\xi_k\xi_l|\cdot C_k\cdot C_l(\ln k)^{\frac{1}{2\gamma}}\cdot(\ln l)^{\frac{1}{2\gamma}}<\infty \tag{18}$$

збіжний. При умові (18), якщо

$$u>2C_N^{\gamma}\cdot(p\varepsilon_N)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{p\cdot(1-p)},$$

тоді справджується наступна нерівність:

$$\begin{gathered}P\{\sup_{0\le\theta\le\pi}|\Delta_N(\theta)|>u\}\le\\ \le\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{\varepsilon_N}\left(u(1-p)-\tfrac{2}{p}\cdot C_N^{\gamma}\cdot(p\cdot C_N)^{1-\gamma}\cdot\tfrac{1}{1-\gamma}\right)\right]^2\right\},\end{gathered} \tag{19}$$

де

$$C_N=2\left[\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}|E\xi_k\xi_l|\cdot C_kC_l\cdot\hat{S}(k+r)\cdot\hat{S}(l+r)\right],$$

$$\hat{S}(v)=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}v+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{\gamma}},\qquad r \text{ визначається за лемою 3,}$$

$$\varepsilon_N=\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}|E\xi_k\xi_l|\cdot C_k\cdot C_l.$$

Приклад 2. *Розклад стандартних процесів за системою косинусів. Нехай процес гауссів*

$$T_k(\theta)=b_k\cos k\theta,\ \ k=0,1,2,...,\ \ b_0=\frac{1}{\pi},\ \ b_k=\frac{2}{\pi},\ \ k=1,2,\dots .$$

Ця система є повною ортонормованою системою в просторі $C([0,\pi],\mu)$, *де* μ *– міра Лебега. Отже,*

$$E\xi_k\xi_l=b_k\cdot b_l\cdot\int_o^{\pi}\int_0^{\pi}R(\cos\theta,\cos\zeta)\cos k\theta\cdot\cos k\zeta d\theta d\zeta.$$

Якщо збіжний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}|E\xi_k\xi_l|\cdot(\ln k\cdot\ln l)^{\chi}, \tag{20}$$

$k,l\ge 1$, $\chi>\frac{1}{2\gamma}$, *де* $0<\gamma<1$, *тоді умова* (18) виконується. Очевидно, умова (18) виконується при $\chi>\frac{1}{2}$.

Знайдемо умови, які треба накласти на коваріаційну функцію процесу X, щоб виконувалася умова (20). Безпосередньою перевіркою встановлюється, що при $k, l \geq 1$

$$E\xi_k\xi_l = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} R(\cos\theta, \cos\zeta)\cos k\theta \cdot \cos l\zeta d\theta d\zeta =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 kl}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 R(\cos\theta, \cos\zeta)}{\partial\theta\partial\zeta}\sin k\theta \cdot \sin l\zeta d\theta d\zeta.$$

Далі, як і в роботі [1] переконуємося, що

$$\begin{gathered} E\xi_k\xi_l = \tfrac{4}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\tfrac{\partial^2 R\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right),\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{k}\right)\right)}{\partial\theta\partial\zeta} - \right. \\ \left. - \tfrac{\partial^2 R\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right),\cos\zeta\right)}{\partial\theta\partial\zeta} - \tfrac{\partial^2 R\left(\cos\theta,\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{l}\right)\right)}{\partial\theta\partial l} + \tfrac{\partial^2 R(\cos\theta,\cos\zeta)}{\partial\theta\partial\zeta}\right]\sin k\theta \cdot \sin l\zeta d\theta d\zeta. \end{gathered} \tag{21}$$

З умови (21) випливає, що умова (20) і, отже, умова (18), справджується, якщо існує похідна $\frac{\partial^2 R(\cos\theta,\cos\zeta)}{\partial\theta\partial\zeta}$ і для неї виконується умова

$$\sup_{0\leq\theta,\zeta\leq\pi}\left|\frac{\partial^2 R(\cos(\theta+h), \cos(\zeta+h_1))}{\partial\theta\cdot\partial\zeta} - \frac{\partial^2 R(\cos(\theta+h), \cos\zeta)}{\partial\theta\partial\zeta} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 R(\cos\theta, \cos(\zeta+h_1))}{\partial\theta\partial\zeta} + \frac{\partial^2 R(\cos\theta, \cos\zeta)}{\partial\theta\cdot\partial\zeta}\right| \leq$$

$$\leq C \cdot \left(\frac{1}{|\ln|h_1||}\cdot\frac{1}{|\ln|h_1||}\right)^s \text{ для } s > \frac{3}{2}.$$

Висновки. В роботі досліджені умови та швидкість збіжності зображень строго φ-субгауссових випадкових процесів у вигляді рядів за ортонормованими системами тригонометричних поліномів у просторі $C\,([0,\pi])$.

1. *Дзямко В. Й., Козаченко Ю. В., Моца А. І.* Про зображення φ-субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді рядів // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, № 1. – С. 42–54.
2. *Козаченко Ю. В., Сливка Г. І.* Обгрунтування методі Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2004. – Т. 69. – С. 63–78.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, – 1965.
4. *Козаченко Ю. В., Вереш К. Й.* Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами з просторів Орліча // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Т. 80. – С. 63–75.

Одержано 24.09.2012

УДК 519.21

І. І. Дубовецька, М. П. Моклячук (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

МІНІМАКСНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ПРОЦЕСІВ

The problem of mean square optimal estimation of the functional $A_N\zeta = \int\limits_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)dt$ depending on the unknown values of periodically correlated stochastic process $\zeta(t)$ from observations of the process $\zeta(t)+\theta(t)$ for $t \in \mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$, where $\theta(t)$ is uncorrelated with $\zeta(t)$ periodically correlated process, is considered. Formulas for calculating spectral characteristic and mean square error of optimal linear estimation of the functional are proposed. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax (robust) spectral characteristics are proposed for the given sets of admissible spectral densities.

Досліджується задача оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала $A_N\zeta = \int\limits_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)dt$ від невідомих значень періодично корельованого стохастичного процесу $\zeta(t)$ за результатами спостережень процесу $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$, де $\theta(t)$ - некорельований із $\zeta(t)$ періодично корельований процес. Виведені формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала. Знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала для різних класів спектральних щільностей.

Вступ. Методи дослідження задач оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів (задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації) розроблені у роботах А. М. Колмогорова [1], Н. Вінера [2], А. М. Яглома [3, 4], Ю. А. Розанова [5]. Ці методи базуються на припущенні, що точні значення спектральних щільностей процесів відомі. У тому випадку, коли повна інформація про значення спектральних щільностей відсутня, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовують мінімаксний метод розв'язування задач оцінювання. Тобто шукають оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу. У. Гренандер [6] вперше застосував мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів. М. П. Моклячук [7], М. П. Моклячук та О. Ю. Масютка [8] досліджували задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для стаціонарних процесів і послідовностей.

Дослідження періодично корельованих процесів розпочато у статті Є. Г. Гладишева [9], де проведено аналіз властивостей кореляційної функції та зображень періодично корельованих процесів. Зв'язок між періодично корельованими та нескінченновимірними стаціонарними процесами досліджував А. Макагон [10], [11].

У даній статті досліджується задача середньоквадратичного оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\zeta = \int_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)dt$ від невідомих значень стохастичного процесу $\zeta(t)$ з класу $\mathbf{Y}$ середньоквадратично неперервних періодично корельованих процесів $\zeta(t)$, за результатами спостережень процесу $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$, де $\theta(t)$ - некорельований із $\zeta(t)$ періодично корельований процес. Знайдені формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала

$A_N\zeta$ у тому випадку, коли спектральні щільності породжених стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ відомі. Якщо ж повна інформація про значення спектральних щільностей відсутня, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовано мінімаксний підхід до розв'язування задач оцінювання. Для заданих класів допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$.

1. Періодично корельовані процеси та відповідні векторні стаціонарні послідовності.

Означення 1. *[9] Середньоквадратично неперервний стохастичний процес* $\zeta : \mathbb{R} \to H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathsf{E}\zeta(t) = 0$, *називається періодично корельованим з періодом* T, *якщо його кореляційна функція* $K(t+u, u) = \mathsf{E}\zeta(t+u)\overline{\zeta(u)}$ *для всіх* $t, u \in \mathbb{R}$ *та деякого фіксованого* T *задовольняє умову*

$$K(t+u,u) = \mathsf{E}\zeta(t+u)\overline{\zeta(u)} = \mathsf{E}\zeta(t+u+T)\overline{\zeta(u+T)} = K(t+u+T, u+T).$$

Нехай $\zeta(t)$, $\theta(t), t \in \mathbb{R}$, - некорельовані між собою періодично корельовані стохастичні процеси. Побудуємо дві послідовності стохастичних функцій

$$\{\zeta_j(u) = \zeta(u+jT), u \in [0,T), j \in \mathbb{Z}\}, \tag{1}$$

$$\{\theta_j(u) = \theta(u+jT), u \in [0,T), j \in \mathbb{Z}\}. \tag{2}$$

Кожна з послідовностей (1), (2) утворює $L_2([0,T); H)$-значну стаціонарну послідовність $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, відповідно, із кореляційними функціями

$$B_\zeta(l,j) = \langle \zeta_l, \zeta_j \rangle_H = \int_0^T \mathsf{E}[\zeta(u+lT)\overline{\zeta(u+jT)}]du = \int_0^T K_\zeta(u+(l-j)T, u)du = B_\zeta(l-j),$$

$$B_\theta(l,j) = \langle \theta_l, \theta_j \rangle_H = \int_0^T \mathsf{E}[\theta(u+lT)\overline{\theta(u+jT)}]du = \int_0^T K_\theta(u+(l-j)T, u)du = B_\theta(l-j),$$

де $K_\zeta(t,s) = \mathsf{E}\zeta(t)\overline{\zeta(s)}$, $K_\theta(t,s) = \mathsf{E}\theta(t)\overline{\theta(s)}$ - кореляційні функції періодично корельованих процесів $\zeta(t)$, та $\theta(t)$.

Якщо у $L_2([0,T); \mathbb{R})$ визначити ортонормований базис

$$\{\widetilde{e}_k = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}u/T}, k = 1,2,3,\dots\}, \quad \langle \widetilde{e}_j, \widetilde{e}_k \rangle = \delta_{kj},$$

то стаціонарні послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ можна подати у вигляді

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{kj}\widetilde{e}_k, \quad \zeta_{kj} = \langle \zeta_j, \widetilde{e}_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \zeta_j(v) e^{-2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}v/T} dv, \tag{3}$$

$$\theta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{kj}\widetilde{e}_k, \quad \theta_{kj} = \langle \theta_j, \widetilde{e}_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \theta_j(v) e^{-2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}v/T} dv. \tag{4}$$

Компоненти ζ_{kj} та θ_{kj} стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ задовольняють умови [12]:

$$\mathsf{E}\zeta_{kj} = 0, \quad \|\zeta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}|\zeta_{kj}|^2 \leq P_1, \quad \mathsf{E}\zeta_{kl}\overline{\zeta_{nj}} = \langle R_\zeta(l-j)e_k, e_n\rangle,$$

$$\mathsf{E}\theta_{kj} = 0, \quad \|\theta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}|\theta_{kj}|^2 \leq P_2, \quad \mathsf{E}\theta_{kl}\overline{\theta_{nj}} = \langle R_\theta(l-j)e_k, e_n\rangle,$$

де $\{e_k, k = 1, 2, \dots\}$ - базис у просторі ℓ_2. Кореляційні функції $R_\zeta(j)$ та $R_\theta(j)$ стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ є операторними функціями в ℓ_2. Кореляційні оператори $R_\zeta(0) = R_\zeta$, $R_\theta(0) = R_\theta$ - ядерні і їх ядерні норми задовольняють обмеження

$$\|\zeta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\zeta e_k, e_k\rangle \leq P_1, \quad \|\theta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\theta e_k, e_k\rangle \leq P_2.$$

Стаціонарні послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ мають спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ - додатні операторнозначні функції в ℓ_2 змінної $\lambda \in [-\pi, \pi)$, якщо їх кореляційні функції $R_\zeta(j)$ та $R_\theta(j)$ можна записати у вигляді

$$\langle R_\zeta(j)e_k, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} \langle f(\lambda)e_k, e_n\rangle d\lambda,$$

$$\langle R_\theta(j)e_k, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} \langle g(\lambda)e_k, e_n\rangle d\lambda, \quad k, n = 1, 2, \dots.$$

Для майже всіх $\lambda \in [-\pi, \pi)$ спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ є ядерними операторами з інтегровними ядерними нормами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(\lambda)e_k, e_k\rangle d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\zeta e_k, e_k\rangle = \|\zeta_j\|_H^2 \leq P_1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle g(\lambda)e_k, e_k\rangle d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\theta e_k, e_k\rangle = \|\theta_j\|_H^2 \leq P_2.$$

2. Класичний метод лінійної інтерполяції періодично корельованих процесів. Вивчатимемо задачу середньоквадратичного оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_N\zeta = \int_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)dt$$

від невідомих значень стохастичного процесу $\zeta(t)$ з класу $\mathbf{Y}$ середньоквадратично неперервних періодично корельованих процесів $\zeta(t)$, за результатами спостережень процесу $\zeta(t) + \theta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, (N+1)T]$. Процес $\theta(t)$ - некорельований із $\zeta(t)$ періодично корельований процес. Функція $a(t), t \in \mathbb{R}$, задовольняє умову $\int_0^{(N+1)T} |a(t)|dt < \infty$.

Запишемо функціонал $A_N\zeta$ у такому вигляді

$$A_N\zeta = \int\limits_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)dt = \sum_{j=0}^{N}\int\limits_0^T a_j(u)\zeta_j(u)du,$$

$$a(u+jT) = a_j(u),\ \zeta(u+jT) = \zeta_j(u),\ u \in [0,T).$$

Враховуючи розклад (3) стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, функціонал $A_N\zeta$ можна подати наступним чином

$$A_N\zeta = \sum_{j=0}^{N}\int\limits_0^T a_j(u)\zeta_j(u)du = \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}\zeta_{kj} = \sum_{j=0}^{N}\vec{a}_j^{\top}\vec{\zeta}_j,$$

де

$$\vec{\zeta}_j = (\zeta_{kj}, k = 1,2,\dots),$$

$$\vec{a}_j = (a_{kj}, k = 1,2,\dots) = (a_{1j}, a_{3j}, a_{2j}, \dots, a_{2k+1,j}, a_{2k,j}, \dots)^{\top},$$

$$a_{kj} = \langle a_j, \widetilde{e}_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}}\int\limits_0^T a_j(v)e^{-2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}v/T}dv.$$

Будемо вважати, що послідовність векторів $\{\vec{a}_j, j = 0,1,\dots,N\}$ задовольняє умову

$$\|\vec{a}_j\| < \infty, \quad \|\vec{a}_j\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|a_{kj}|^2, \quad j = 0,1,\dots,N. \tag{5}$$

За умови (5) функціонал $A_N\zeta$ має скінченний другий момент.

Нехай спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, відповідно, задовольняють умову мінімальності

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} Tr\left[(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\right]d\lambda < \infty. \tag{6}$$

Умова (6) є необхідною та достатньою для неможливості безпомилкової інтерполяції невідомих значень послідовності $\{\zeta_j + \theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ [5].

Позначимо через $L_2(f)$ гільбертів простір векторних комплекснозначних функцій $b(\lambda) = \{b_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, інтегрованих в квадраті за мірою із щільністю $f(\lambda) = \{f_{kn}(\lambda)\}_{k,n=1}^{\infty}$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{\top}(\lambda)f(\lambda)\overline{b(\lambda)}d\lambda = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k,n=1}^{\infty} b_k(\lambda)\overline{b_n(\lambda)}f_{kn}(\lambda)d\lambda < \infty.$$

Через $L_2^{N-}(f)$ позначимо підпростір в $L_2(f)$, породжений функціями $e^{ij\lambda}\delta_k, \delta_k = \{\delta_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$, $k = 1,2,\dots$, $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$, де $\delta_{kk} = 1, \delta_{kn} = 0$ для $k \neq n$.

Кожна лінійна оцінка $\hat{A}_N\zeta$ функціонала $A_N\zeta$ від спостережень послідовності $\{\zeta_j+\theta_j\}$ при $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\ldots,N\}$ має вигляд

$$\hat{A}_N\zeta=\int_{-\pi}^{\pi}h^\top(e^{i\lambda})(Z^\zeta(d\lambda)+Z^\theta(d\lambda))=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}h_k(e^{i\lambda})(Z_k^\zeta(d\lambda)+Z_k^\theta(d\lambda)),\qquad(7)$$

де $Z^\zeta(\Delta)=\{Z_k^\zeta(\Delta)\}_{k=1}^\infty$ та $Z^\theta(\Delta)=\left\{Z_k^\theta(\Delta)\right\}_{k=1}^\infty$ - ортогональні випадкові міри послідовностей $\{\zeta_j\}$ та $\{\theta_j\}$, відповідно, $h(e^{i\lambda})=\left\{h_k(e^{i\lambda})\right\}_{k=1}^\infty$ - спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_N\zeta$. Функція $h(e^{i\lambda})\in L_2^{N-}(f+g)$.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h;f,g)$ оцінки $\hat{A}_N\zeta$ обчислюється за формулою

$$\Delta(h;f,g)=E|A_N\zeta-\hat{A}_N\zeta|^2=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left[A_N(e^{i\lambda})-h(e^{i\lambda})\right]^\top f(\lambda)\overline{[A_N(e^{i\lambda})-h(e^{i\lambda})]}+h^\top(e^{i\lambda})g(\lambda)\overline{h(e^{i\lambda})}\right)d\lambda,$$

$$A_N(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{N}\vec{a}_je^{ij\lambda}.$$

Спектральна характеристика $h(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_N\zeta$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(f,g)=\Delta(h(f,g);f,g)=\min_{h\in L_2^{N-}(f+g)}\Delta(h;f,g)=\min_{\hat{A}_N\zeta}E|A_N\zeta-\hat{A}_N\zeta|^2.\qquad(8)$$

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\zeta$ є розв'язком оптимізаційної задачі (8). Використавши класичний метод проекцій А.М. Колмогорова [1], можна вивести формули для обчислення величини середньокваратичної похибки $\Delta(f,g)$ та спектральної характеристики $h(f,g)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за умови, що спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ послідовностей $\{\zeta_j,j\in\mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j,j\in\mathbb{Z}\}$, відповідно, відомі. Тоді

$$\begin{aligned}h^\top(f,g)&=\left(A_N^\top(e^{i\lambda})f(\lambda)-C_N^\top(e^{i\lambda})\right)[f(\lambda)+g(\lambda)]^{-1}=\\&=A_N^\top(e^{i\lambda})-\left(A_N^\top(e^{i\lambda})g(\lambda)+C_N^\top(e^{i\lambda})\right)[f(\lambda)+g(\lambda)]^{-1},\end{aligned}\qquad(9)$$

$$\Delta(f,g)=\langle\mathbf{a}_N,\mathbf{R}_N\mathbf{a}_N\rangle+\langle\mathbf{c}_N,\mathbf{B}_N\mathbf{c}_N\rangle,\qquad(10)$$

де

$$C_N(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{N}\vec{c}_je^{ij\lambda},\mathbf{a}_N=\{\vec{a}_j\}_{j=0}^N,\mathbf{c}_N=\{\vec{c}_j\}_{j=0}^N=\mathbf{B}_N^{-1}\mathbf{D}_N\mathbf{a}_N,$$

$\langle a,b\rangle$ - скалярний добуток в ℓ_2, матриці $\mathbf{B}_N=\{B_N(j,l)\}_{j,l=0}^N$,$\mathbf{D}_N=\{D_N(j,l)\}_{j,l=0}^N$, $\mathbf{R}_N=\{R_N(j,l)\}_{j,l=0}^N$ задаються елементами :

$$B_N(j,l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\right]^\top e^{i(l-j)\lambda}d\lambda,$$

$$D_N(j,l)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\right]^{\top}e^{i(l-j)\lambda}d\lambda,$$

$$R_N(j,l)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}g(\lambda)\right]^{\top}e^{i(l-j)\lambda}d\lambda,\quad j,l=0,1,\dots,N.$$

Теорема 1. *Нехай $\{\zeta(t),t\in\mathbb{R}\}$ та $\{\theta(t),t\in\mathbb{R}\}$ - некорельовані між собою періодично корельовані стохастичні процеси такі, що стаціонарні послідовності $\{\zeta_j,j\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j,j\in\mathbb{Z}\}$, побудовані за співвідношеннями (1), (2), відповідно, мають спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$, які задовольняють умову мінімальності (6). Нехай коефіцієнти $\{\vec{a}_j,j=0,1,\dots,N\}$, які визначають функціонал $A_N\zeta$, задовольняють умову (5). Тоді спектральна характеристика $h(f,g)$ і середньоквадратична похибка $\Delta(f,g)$ лінійної оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t\in\mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$, обчислюються за формулами (9) та (10). Оптимальна оцінка $\hat{A}_N\zeta$ функціонала $A_N\zeta$ обчислюється за формулою (7).*

Наслідок 1. *Нехай $\{\zeta(t),t\in\mathbb{R}\}$ - періодично корельований стохастичний процес такий, що стаціонарна послідовність $\{\zeta_j,j\in\mathbb{Z}\}$, яка побудована за співвідношенням (1), має спектральну щільність $f(\lambda)$, що задовольняє умову мінімальності*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}Tr\left[(f(\lambda))^{-1}\right]d\lambda<\infty. \tag{11}$$

Нехай коефіцієнти $\{\vec{a}_j,j=0,1,\dots,N\}$, які визначають функціонал $A_N\zeta$, задовольняють умову (5). Тоді спектральна характеристика $h(f)$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за спостреженнями процеса $\zeta(t)$ при $t\in\mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$ обчислюються за формулами

$$h^{\top}(f)=A_N^{\top}(e^{i\lambda})-C_N^{\top}(e^{i\lambda})[f(\lambda)]^{-1}, \tag{12}$$

$$\Delta(f)=\langle\mathbf{c}_N,\mathbf{a}_N\rangle, \tag{13}$$

де $\mathbf{a}_N=\{\vec{a}_j\}_{j=0}^{N},\mathbf{c}_N=\{\vec{c}_j\}_{j=0}^{N}=\mathbf{B}_N^{-1}\mathbf{a}_N$, матриця $\mathbf{B}_N=\{B_N(j,l)\}_{j,l=0}^{N}$ задається елементами:

$$B_N(j,l)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[(f(\lambda))^{-1}\right]^{\top}e^{i(l-j)\lambda}d\lambda,\quad j,l=0,1,\dots,N.$$

Оптимальна оцінка $\hat{A}_N\zeta$ функціонала $A_N\zeta$ обчислюється за формулою

$$\hat{A}_N\zeta=\int\limits_{-\pi}^{\pi}h^{\top}(e^{i\lambda})Z^{\zeta}(d\lambda)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}h_k(e^{i\lambda})Z_k^{\zeta}(d\lambda).$$

3. Мінімаксний (робастний) метод інтерполяції. Щоб користуватись формулами (9), (10), (12), (13) для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$, потрібно знати спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, які побудовані за співвідношеннями (1), (2), відповідно. У тому випадку, коли спектральні щільності точно не відомі, але задана множина $D = D_f \times D_g$ допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксний підхід до задач оцінювання функціоналів від невідомих значень процесу. Ми шукаємо оцінку, яка дає найменшу похибку одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу D.

Означення 2. *Для заданої множини пар спектральних щільностей* $D = D_f \times D_g$ *спектральні щільності* $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ *називаються найменш сприятливими у* D *для оптимальної оцінки функціонала* $A_N\zeta$, *якщо*

$$\Delta(f^0, g^0) = \Delta(h(f^0, g^0); f^0, g^0) = \max_{(f,g)\in D} \Delta(h(f, g); f, g).$$

Означення 3. *Для заданої множини пар спектральних щільностей* $D = D_f \times D_g$ *спектральна характеристика* $h^0(\lambda)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\zeta$ *називається мінімаксною (робастною), якщо*

$$h^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D} L_2^{N-}(f + g), \quad \min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g)\in D} \Delta(h^0; f, g).$$

Виходячи із цих означень та співвідношень (9), (10), (12), (13), можна переконатись у справедливості наступних лем.

Лема 1. *Спектральні щільності* $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$, *які задовольняють умову (6), найменш сприятливі в класі* D *для оптимальної оцінки функціонала* $A_N\zeta$, *якщо коефіцієнти Фур'є функцій*

$$(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}, \quad f^0(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}, \quad f^0(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}g^0(\lambda)$$

задають матриці $\mathbf{B}_N^0, \mathbf{D}_N^0, \mathbf{R}_N^0$, *які визначають розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{(f,g)\in D} \left(\langle \mathbf{a}_N, \mathbf{R}_N \mathbf{a}_N\rangle + \langle (\mathbf{B}_N)^{-1}\mathbf{D}_N \mathbf{a}_N, \mathbf{D}_N \mathbf{a}_N\rangle\right) =$$

$$= \langle \mathbf{a}_N, \mathbf{R}_N^0 \mathbf{a}_N\rangle + \langle (\mathbf{B}_N^0)^{-1}\mathbf{D}_N^0 \mathbf{a}_N, \mathbf{D}_N^0 \mathbf{a}_N\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0, g^0)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\zeta$ *обчислюється за формулою (9) за умови, що* $h(f^0, g^0) \in H_D$.

Лема 2. *Спектральна щільність* $f^0(\lambda) \in D_f$, *яка задовольняє умову (11), найменш сприятлива в класі* D_f *для оптимальної оцінки функціонала* $A_N\zeta$ *за спостереженнями процесу* $\zeta(t)$ *при* $t \in \mathbb{R}\backslash[0, (N+1)T]$, *якщо коефіцієнти Фур'є функції* $(f^0(\lambda))^{-1}$ *задають матрицю* $\mathbf{B}_N^0$, *яка визначає розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{f\in D_f} \langle (\mathbf{B}_N)^{-1}\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_N\rangle = \langle (\mathbf{B}_N^0)^{-1}\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_N\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\zeta$ *обчислюється за формулою (12) за умови, що* $h(f^0) \in H_D$.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0, g^0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h^0; f, g) \leq \Delta(h^0; f^0, g^0) \leq \Delta(h; f^0, g^0), \forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f^0, g^0)$, $h(f^0, g^0) \in H_D$ та (f^0, g^0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\Delta(h(f^0, g^0); f, g) \to sup, \quad (f, g) \in D, \tag{14}$$

$$\Delta(h(f^0, g^0); f, g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (A_N(e^{i\lambda})g^0(\lambda) + C_N^0(e^{i\lambda}))^{\top}(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}f(\lambda)\times$$

$$\times(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}\overline{(A_N(e^{i\lambda})g^0(\lambda) + C_N^0(e^{i\lambda}))}d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (A_N(e^{i\lambda})f^0(\lambda) - C_N^0(e^{i\lambda}))^{\top}\times$$

$$\times(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}g(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}\overline{(A_N(e^{i\lambda})f^0(\lambda) - C_N^0(e^{i\lambda}))}d\lambda.$$

Лема 3. *Нехай $f^0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (11) та є розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\begin{gathered}\Delta(h(f^0); f) \to sup, \quad f(\lambda) \in D_f, \\ \Delta(h(f^0); f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (C_N^0(e^{i\lambda}))^{\top}(f^0(\lambda))^{-1}f(\lambda)(f^0(\lambda))^{-1}\overline{(C_N^0(e^{i\lambda}))}d\lambda.\end{gathered} \tag{15}$$

Тоді $f^0(\lambda)$ є найменш сприятливою спектральною щільністю для оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, (N+1)T]$. Спектральна характеристика $h^0 = h(f^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$, обчислена за формулою (12), є мінімаксною, якщо $h(f^0) \in H_D$.

Задача на умовний екстремум (14) еквівалентна такій задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f^0, g^0); f, g) + \delta((f, g)|D) \to inf,$$

де $\delta((f, g)|D)$ - індикаторна функція множини D. Розв'язок (f^0, g^0) останньої задачі визначається умовою $0 \in \partial\Delta_D(f^0, g^0)$ [13], яка є необхідною та достатньою для того, щоб точка (f^0, g^0) належала множині мінімумів опуклої функції. $\partial\Delta_D(f^0, g^0)$ - субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(f, g)$ в точці $(f, g) = (f^0, g^0)$.

4. Найменш сприятливі спектральні щільності на множині D_0^-.

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями $\zeta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, (N+1)T]$, за умови, що спектральна щільність $f(\lambda)$ стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, яка побудована за співвідношенням (1), належить множині

$$D_0^- = \left\{ f(\lambda) | \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda)d\lambda = P \right\},$$

де $P = \{p_{kn}\}_{k,n=1}^{\infty}$ - задана додатно визначена матриця з $detP \neq 0$.

За допомогою методу невизначених множників Лагранжа знаходимо, що розв'язок $f^0(\lambda)$ задачі (15) на умовний екстремум задовольняє рівняння

$$\left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^\top C_N^0(e^{i\lambda})\left(C_N^0(e^{i\lambda})\right)^*\left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^\top = \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^\top \vec{\alpha}\vec{\alpha}^*\left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^\top, \quad (16)$$

де $\vec{\alpha} = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ - вектор множників Лагранжа,

$$C_N^0(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} \vec{c}_j^{\,0} e^{ij\lambda}, \quad \mathbf{c}_N^0 = \{\vec{c}_j^{\,0}\}_{j=0}^{N} = (\mathbf{B}_N^0)^{-1}\mathbf{a}_N,$$

матриця $\mathbf{B}_N^0$ побудована із коефіцієнтів Фур'є матричної функції $\left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^\top$:

$$B_N^0(j,l) = R^\top(j-l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^\top e^{i(l-j)\lambda}d\lambda, \qquad j,l = 0,1,\ldots,N.$$

Коефіцієнти Фур'є $R(j) = R^*(-j), j = 0,1,\ldots,N$, знайдені з рівності

$$\mathbf{B}_N^0\vec{\alpha}_N = \mathbf{a}_N,$$

для $\vec{\alpha}_N = (\vec{\alpha},\vec{0},\ldots,\vec{0})^\top$, задовольняють співвідношення (16) та $\mathbf{B}_N^0\mathbf{c}_N^0 = \mathbf{a}_N$. З виведених рівнянь отримуємо, що

$$R(j) = P(\vec{a}_0)^{-1}\vec{a}_j^\top, \quad j = 0,1,\ldots,N,$$

де $\left[(\vec{a}_0)^{-1}\right]^\top \cdot \vec{a}_0 = 1$. Як наслідок маємо рівність $R(0) = P$.

Нехай послідовність $\{\vec{a}_j, j = 0,1,\ldots,N\}$ визначена таким чином, що матрична функція $(f^0(\lambda))^{-1} = \sum_{j=-N}^{N} R(j)e^{ij\lambda}$ є додатно визначеною та має ненульовий дискримінант. Тоді $(f^0(\lambda))^{-1}$ можна зобразити у вигляді [14]

$$(f^0(\lambda))^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{N} A_j e^{-ij\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{N} A_j e^{-ij\lambda}\right)^*.$$

Отже, $f^0(\lambda)$ - спектральна щільність стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку N, яка задається рівнянням

$$\sum_{j=0}^{N} A_j\vec{\zeta}_{l-j} = \vec{\varepsilon}_l,$$

де $\vec{\varepsilon}_l$ -векторна послідовність білого шуму. Мінімаксна спектральна характеристика $h(f^0)$ обчислюється за формулою

$$h(f^0) = -\sum_{j=1}^{N}\overline{R(j)}(P^T)^{-1}\vec{a}_0 e^{-ij\lambda}. \quad (17)$$

Отже, справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай послідовність коефіцієнтів* $\{\vec{a}_j, j = 0, 1, \dots, N\}$*, що визначає лінійний функціонал* $A_N\zeta$*, визначена таким чином, що матрична функція* $\sum_{j=-N}^{N} R(j)e^{ij\lambda}$*, де*

$$R(j) = R^*(-j) = P(\vec{a}_0)^{-1}\vec{a}_j^{\top}, j = 0, 1, \dots, N,$$

додатно визначена та має ненульовий визначник. Тоді найменш сприятлива спектральна щільність у класі D_0^- *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\zeta$ *задається формулою*

$$f^0(\lambda) = \left(\sum_{j=-N}^{N} R(j)e^{ij\lambda}\right)^{-1}.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h(f^0)$ *визначається формулою (17). Найбільше значення середньоквадратичної похибки оцінки* $\hat{A}_N\zeta$ *обчислюється за формулою*

$$\Delta(f^0) = \langle \mathbf{c}_N^0, \mathbf{a}_N \rangle. \tag{18}$$

5. Найменш сприятливі спектральні щільності на множині D_M^-**.** Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями $\zeta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, (N+1)T]$, за умови, що спектральна щільність $f(\lambda)$ стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, яка побудована за співвідношенням (1), належить множині

$$D_M^- = \left\{ f(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) \cos(m\lambda) d\lambda = P(m), m = 0, 1, \dots, M \right\},$$

де послідовність матриць $P(m) = \{p_{kn}(m)\}_{k,n=1}^{\infty}$, $m = 0, 1, \dots, M$, задана таким чином, що $P(m) = P^*(-m)$ та матрична функція $\sum_{m=-M}^{M} P(m)e^{im\lambda}$ додатно визначена і має ненульовий визначник. За допомогою методу невизначених множників Лагранжа знаходимо, що розв'язок $f^0(\lambda)$ задачі (15) на умовний екстремум задовольняє рівняння

$$\begin{gathered} \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top} C_N^0(e^{i\lambda}) \left(C_N^0(e^{i\lambda})\right)^* \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top} = \\ = \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top} \left(\sum_{m=0}^{M} \vec{\alpha}_m e^{im\lambda}\right) \left(\sum_{m=0}^{M} \vec{\alpha}_m e^{im\lambda}\right)^* \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top}, \end{gathered} \tag{19}$$

де $\vec{\alpha}_m, m = 0, 1, \dots, M$, - невизначені множники Лагранжа. Рівність (19) виконується, якщо

$$\sum_{j=0}^{N} \vec{c}_j e^{ij\lambda} = \sum_{m=0}^{M} \vec{\alpha}_m e^{im\lambda}.$$

Розглянемо такі випадки: $M \geq N$ та $M < N$. Нехай $M \geq N$. Тоді коефіцієнти Фур'є функції $(f^0(\lambda))^{-1}$ визначають матрицю $\mathbf{B}_N^0$. Отже екстремальна задача (15) вироджена. Покладемо

$$\vec{\alpha}_{N+1} = \dots = \vec{\alpha}_M = \vec{0},$$

а $\vec{\alpha}_0,\dots,\vec{\alpha}_N$ знайдемо з рівняння $\mathbf{B}_N^0\alpha_0^N=\mathbf{a}_N$, де $\alpha_0^N=(\vec{\alpha}_0,\dots,\vec{\alpha}_N)^\top$. Тоді найменш сприятлива щільність задовольняє співвідношення

$$(f^0(\lambda))^{-1}=\sum_{m=-M}^{M}P(m)e^{im\lambda}=\left(\sum_{j=0}^{M}A_je^{-ij\lambda}\right)\left(\sum_{j=0}^{M}A_je^{-ij\lambda}\right)^*. \qquad (20)$$

Така спектральна щільність $f^0(\lambda)$ є спектральною щільністю стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку M

$$\sum_{j=0}^{M}A_j\vec{\zeta}_{l-j}=\vec{\varepsilon}_l.$$

Нехай $M<N$. Тоді матрицю $\mathbf{B}_N$ визначають коефіцієнти Фур'є функції $(f(\lambda))^{-1}$. Серед них відомі $P(m),m=0,\dots,M$, та невідомі $P(m),m=M+1,\dots,N$. Невідомі $\vec{\alpha}_m,m=0,\dots,M$, та $P(m),m=M+1,\dots,N$, знаходимо з рівняння

$$\mathbf{B}_N\alpha_0^M=\mathbf{a}_N,\quad \alpha_0^M=(\vec{\alpha}_0,\dots,\vec{\alpha}_M,\vec{0},\dots,\vec{0})^\top.$$

Якщо послідовність матриць $P(m),m=0,\dots,N$, така, що матрична функція $\sum_{m=-N}^{N}P(m)e^{im\lambda}$ додатно визначена і має ненульовий визначник, то найменш сприятлива спектральна щільність $(f^0(\lambda))^{-1}$ визначається формулою

$$(f^0(\lambda))^{-1}=\sum_{m=-N}^{N}P(m)e^{im\lambda}=\left(\sum_{j=0}^{N}A_je^{-ij\lambda}\right)\left(\sum_{j=0}^{N}A_je^{-ij\lambda}\right)^*. \qquad (21)$$

Отже, $f^0(\lambda)$ - щільність стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку N

$$\sum_{j=0}^{N}A_j\vec{\zeta}_{l-j}=\vec{\varepsilon}_l.$$

Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Спектральна щільність (20) стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку M, яка визначається матрицями $P(m),m=0,1,\dots,M$, є найменш сприятливою в класі D_M^- в задачі оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\vec{\zeta}$ при $M\geq N$. Якщо ж $M<N$ та розв'язки $P(m),m=M+1,\dots,N$, рівняння $\mathbf{B}_N\alpha_0^M=\mathbf{a}_N$ з коефіцієнтами $P(m),m=0,\dots,M$, утворюють додатно визначену матричну функцію $\sum_{m=-N}^{N}P(m)e^{im\lambda}$ з визначником тотожньо не рівним нулю, то спектральна щільність (21) стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку N є найменш сприятливою в класі D_M^-. Мінімаксна спектральна характеристика $h(f^0)$ визначається формулою (12). Найбільше значення середньоквадратичної похибки оцінки $\hat{A}_N\zeta$ обчислюється за формулою (18).*

Висновки. Запропоновано формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики в задачі оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\zeta=\int_0^{(N+1)T}a(t)\zeta(t)dt$, який залежить від невідомих значень періодично корельованого стохастичного процесу $\zeta(t)$ за результатами спостережень процесу $\zeta(t) + \theta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$, де $\theta(t)$ - некорельований з $\zeta(t)$ періодично корельований стохастичний процес. Задача вивчається за умов спектральної визначеності та спектральної невизначеності. Результати отримані з використанням властивостей гільбертового простору, теорії оцінювання векторних стаціонарних послідовностей.

1. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник статей. – М.: "Наука", 1986. – 534 с.
2. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series: Whis engineering applications. – Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, 1966. - 163 p.
3. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. – 526 p.
4. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Suplementary notes and references. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. – 258 p.
5. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы, 2-е изд. доп. – М.: "Наука", 1990. – 272 с.
6. *Grenander U.* A prediction problem in game theory // Ark. Mat. – 1957. – **3**. – P. 371–379.
7. *Моклячук М. П.* Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів: монографія. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 320 с.
8. *Моклячук М. П., Масютка О. Ю.* Мінімаксні оцінки функціоналів від стаціонарних процесів: монографія. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. – 216 с.
9. *Гладышев Е. Г.* Периодически и почти-периодически коррелированные случайные процессы с непрерывным временем // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – **8**, № 2. – С. 184–189.
10. *Makagon A.* Induced stationary process and structure of locally square integrable periodically correlated processes // Studia Math. – 1999. – **136**, №1. – P. 71–86.
11. *Makagon A.* Characterization of the spectra of periodically correlated processes // Multivariate Analysis. – 2001. – **78**. – P. 1–10.
12. *Kallianpur G., Mandrekar V.* Spectral theory of stationary H-Valued processes // J. Multivariate Analysis. – 1971. – **1**. – P. 1–16.
13. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. – М.: "Наука", 1982. – 144 с.
14. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды. – М.: "Мир", 1974. – 576 с.

Одержано 01.10.2012

УДК 517.956.223

А. В. Заворотинский (Черниговский нац. пед. ун-т имени Т.Г.Шевченка)

СЛАБО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ С ПАРАМЕТРОМ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И НЕИЗВЕСТНЫМИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ. ОЦЕНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ.

A certain a class of elliptic boundary value problems is considered in domain. The elliptic operator polinomialy depends on parameter and the boundary conditions contain additional functions defined on the boundary of the domain. For these problems the definition of weakly ellipticity with a parameter is introduced. By means of method Vishik-Iyusternik fundamental decisions of a problem are under construction and their estimations are received.

Исследуются эллиптические краевые задачи в эвклидовой области, для которых эллиптическое уравнение зависит полиномиально от параметра, а краевые условия содержат дополнительные неизвестные функции на границе. Построена фундаментальна система решений этой задачи и получены её оценки в прстранствах Соболева.

Введение. Эллиптические операторы с параметром играют важную роль в теории эллиптических уравнений и её приложений. Среди них отдельный интерес представляют слабо эллиптические краевые задачи, рассмотренные Волевичем [1–3]. Данный класс задач является обобщением эллиптических с параметром задач, рассмотренных Агмоном [4] и Аграновичем-Вишиком [5]. Слабо эллиптические задачи тесно связаны со смешаной задачей для параболических уравнений, не разрешённых относительно старшей производной по времени [6]. Эллиптические задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области были исследованы в работах [7–9]. Такие задачи возникают в теории упругости, гидродинамики и, как вспомогательные, в теории эллиптических задач в не гладких областях и при исследовании гиперболических задач. Автору была поставлена задача исследовать слабо эллиптические с параметром граничные задачи с неизвестными дополнительными функциями на границе области.

В настоящей работе посторена фундаментальная система решений слабо эллиптической с параметром граничной задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области и его оценка. Статья состоит из 4 пунктов. В п.1 даётся постановка задачи. В п.2 приведён основной результат работы. В п.3 приводятся вспомогательные утверждения, которые касаются разрешимости модельной краевой задачи на полуоси. В п.4 дано доказательство основной теоремы. Техника локализации позволяет на основе полученных оценок фундаментальных решений получить априорные оценки в специальных нормах функциональных пространств, зависящих от большого параметра λ. Этому будет посвящена отдельная публикация.

Пользуясь случаем автор приносит глубокую благодарность $\boxed{\text{Л.Р.Волевичу}}$, М.Л. Горбачуку за постановку задачи и А.А.Мурачу за обсуждение результатов.

1.Постановка задачи. 1.1. Пусть G – ограниченая открытая область в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$. Предполагается, что её граница ∂G является бесконечно гладким многообразием без края размерности $n-1$. Как обычно $\overline{G} := G \cup \partial G$. Рассмотрим следующую краевую задачу, содержащую параметр λ:

$$A(x,D,\lambda)u(x) \equiv \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \lambda^j A_{2m-j}(x,D)u(x) = f(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

$$(B_j(x',D)u)(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x',D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \quad x' \in \partial G, \quad j = 1,\dots,m+\varkappa. \tag{2}$$

Здесь $\lambda \in [0;\infty)$, $m,\mu,\varkappa \in \mathbb{N}$, $m > \mu$, $A_{2m-j}(x,D)$ – линейный дифференциальный оператор (л.д.о.) в $\overline{G}$, $B_j(x,D)$ – граничный л.д.о. на ∂G, $C_{j,k}(x',D')$ – касательный л.д.о. на ∂G. Коэффициенты этих операторов – комплекснозначные бесконечно гладкие функции, а порядки удовлетворяют условиям

$$\operatorname{ord} A_{2m-j} \le 2m-j, \quad \operatorname{ord} B_j = m_j, \quad \operatorname{ord} C_{j,k} \le m_j + \alpha_k,$$

где $m_j, \alpha_k \in \mathbb{Z}$ и

$$m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_{\mu+\varkappa} < m_{\mu+\varkappa+1} \le \ldots m_{m+\varkappa}. \tag{3}$$

Как обычно, $C_{j,k} \equiv 0$ если $m_j + \alpha_k < 0$.

Задача (1), (2) кроме неизвестной функции $u(x)$, $x \in \overline{G}$, содержит $\varkappa$ дополнительных неизвестных функций $\sigma_1(x'),\dots,\sigma_\varkappa(x')$, $x' \in \partial G$. Поэтому число краевых условий равно $m+\varkappa$.

Сформулируем условия, которым удовлетворяет задача (1) – (2). **1.2.** Пусть $x \in \overline{G}$. Обозначим

$$A^0(x,\xi,\lambda) := \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \lambda^j A^0_{2m-j}(x,\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in [0;\infty),$$

где $A^0_{2m-j}(x,\xi)$– главный символ оператора $A_{2m-j}(x,D)$. Заметим, что функция $A^0(x,\xi,|\xi|)$ однородная по ξ порядка $2m$.

Условие 1. *Существует $c > 0$,такое что*

$$|A^0(\xi,\lambda)| \ge C|\xi|^{2\mu}(|\lambda| + |\xi|)^{2m-2\mu}. \tag{4}$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \ne 0$, $\lambda \in [0;\infty)$.

Это условие *слабой эллиптичности с параметром* оператора $A^0(x,D,\lambda)$ в точке $x \in \overline{G}$. При $\mu = 0$ это условие переходит в известное условие эллиптичности с большим праметром [4, 5, 10].

Предложение 1([2], см. также [3]). *Неравенство* (4) *равносильно следующим условиям:*

$$A^0_{2m}(x,\xi) \ne 0, \quad A^0_{2\mu}(x,\xi) \ne 0, \quad A^0(x,\xi,\lambda) \ne 0, \tag{5}$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \ne 0, \lambda \in [0;\infty)$.

Отметим, что первые два неравенства в (5) означают эллиптичность операторов $A^0_{2m}(x,\xi)$ и $A^0_{2\mu}(x,\xi)$.

1.3. Пусть $x' \in \partial G$ и U – достаточно малая окресность точки x' из топологии в ∂G. Выберем в U локальные координаты $(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$ такие, что x_n –

расстояние от точки $x \in U$ до границы ∂G. Запишем в этих координатах символы $A^0_{2m-j}(x', \xi)$ и $A^0(x, \xi, \lambda)$ для каждого $\lambda \in [0; \infty)$. Полученные полиномы обозначим через $A^0_{2m-j}(\xi)$ и $A^0(\xi, \lambda)$ соответственно.

Предположим, что выполняется условие 1 в точке $x = frm[o]--x'$. Пусть $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ и $\lambda \in [0; \infty)$. Тогда уравнения $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$ и $A^0_{2\mu}(\xi', \tau) = 0$ не имеют вещественных τ-корней. Обозначим через $m^{\pm}(\xi', \lambda)$ и $\mu^{\pm}(\xi', \lambda)$ число корней советственно первого и второго уравнений, лежащих в полуплоскости $\mathbb{C}_{\pm} := \{\tau \in \mathbb{C} : \Im\tau \gtrless 0\}$. Но тогда числа $m^{\pm}(\xi', \lambda)$ на самом деле не зависят от ξ' и λ, обозначим их через $m^{\pm}$, и $m^+ + m^- = 2m$. Поскольку корни уравнения $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$ непрерывно зависят от λ, то числа $m^{\pm}$ совпадают с числом нулей в верхней (нижней) полуплоскости уравнения $A^0_{2m}(\xi', \tau) = 0$, отвечающего $\lambda = 0$.

Условие 2. *Для каждого* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ *выполняются равенства*

$$m^+(\xi') = m^-(\xi') = m, \quad \mu^+(\xi') = \mu^-(\xi') = \mu$$

Это условие *правильной слабой эллиптичности с параметром* оператора $A^0(x', D, \lambda)$ в точке $x' \in \partial G$.

Заметим, что при $n \geq 3$ равенство $\mu^+(\xi') = \mu^-(\xi')$ выполняется автоматически [3].

1.4. Как и прежде, $x' \in \partial G$. Запишем в локальных координатах главные символы операторов $B_j(x', D)$ и $C_{j,k}(x', D')$. Полученные полиномы обозначим соответственно через $B^0_j(\xi)$ и $C^0_{j,k}(\xi)$, где $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi \equiv (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

В задаче (1), (2) отбросим младшие члены дифференциальных операторов, положим $f \equiv 0$, перейдем к локальным координатам в окрестности точки ξ' и применим преобразование Фурье по переменным $x_1, \cdots, x_{n-1}$. Получим следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (1) на полуоси $t := x_n > 0$:

$$A^0(\xi', D_t, \lambda)v(t) = 0 \quad t > 0, \tag{6}$$

$$(B^0_j(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}(\xi')\sigma_i = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{7}$$

Здесь гладкая функция $v(t)$ и числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa}$ искомые, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa}$ – произвольно заданные комплексные числа. Задача (6),(7) зависит от двух параметров $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ и $\lambda \in [0, \infty)$. Она называется *граничным символом* задачи (1), (2) в точке $x' \in \partial G$.

Нас будут интересовать решения, удовлетворяющие условию

$$v(t) \to 0, \quad \text{при} t \to \infty \tag{8}$$

Условие 3. *Для любых* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$, $\lambda > 0$ *и* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (6),(7),(8) *имеет единственное решение* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa})$.

Это аналог условия Лопатинского для краевой задачи (1), (2) при фиксированном λ.

1.5. В следующих двух условиях идет речь о разрешимости краевой задачи для оператора $A^0(\xi', D_t, \lambda)$ в предельных случаях $\lambda \to \infty$ и $\lambda \to 0$ (ср. с [3]).

Пусть $r \in \{m, \mu\}$.Рассмотрим следующую краевую задачу

$$A^0_{2r}(\xi', D_t)v(t) = 0 \quad t > 0, \tag{9}$$

$$(B^0_j(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}(\xi')\sigma_i = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, r + \varkappa. \tag{10}$$

Условие 4. *Для любого* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ *и* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (9),(10),(8) *имеет единственное решение* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ *при* $r = m$.

Условие 5. *Для любого* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ *и* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (9),(10),(8) *имеет единственное решение* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ *при* $r = \mu$.

1.6. Поскольку при $\lambda \neq 0$ уравнение $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$ эквивалентно уравнению

$$A^0_{2\mu}(\xi', z) + \lambda^{-1} A^0_{2\mu+1}(\xi', z) + \cdots + \lambda^{2\mu-2m} A^0_{2m}(\xi', z) = 0,$$

при больших $|\lambda|$ имеются 2μ корней уравнения $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$, близких к корням уравнения $A^0_{2\mu}(\xi', \tau) = 0$. Сделаем замену $\varepsilon = \lambda^{-1}$. Поскольку при $\varepsilon = 0$ оператор $A^0(\xi', D_t, \varepsilon)$ совпадает с оператором $A^0_{2\mu}(\xi', D_t)$ порядка $2\mu < 2m$, то при малых $\varepsilon > 0$ требуются поправки к решению задачи (6),(7), позволяющие удовлетворить оставшимся $m - \mu$ краевым условиям. Из метода Вишика–Люстерника [3, 11] вытекает, что эти поправки являются решением следующей краевой задачи:

$$A^0(0, D_t, 1)v(t) = 0, t > 0; \tag{11}$$

$$(B^0(0, D_t)v(t))|_{t=0} = \varphi_j, j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{12}$$

Условие 6. *Для любых* $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (11),(12),(8) *имеет единственное решение* $v(t)$.

1.7. Определение. *Краевая задача* (1),(2) *называется слабо эллиптической с параметром если в поизвольной точке* $x \in \overline{G}$ *выполняется условие 1 и в произвольной точке* $x' \in \partial G$ *выполняются условия 2 – 6.*

Из условий 1-3 следует, что при произвольных фиксированных $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ и $\lambda \in [0; \infty)$ краевая задача (1),(2) эллиптическая как задача без параметра, но с дополнительными неизвестными функциями на границе области [7, 8].

1.8. Наряду с задачами типа (1),(2) можно рассматривать задачи, получающиеся при замене "большого"параметра λ на "малый"параметр $\varepsilon = 1/\lambda > 0$, рассмотренные в работе автора [12]

$$A(x, D, \varepsilon)u(x) \equiv \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-j} A_{2m-j}(x, D)u(x) = f(x), \quad x \in G,$$

$$(B_j(x', D)u)(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \quad x' \in \partial G, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa.$$

2. Основной результат. Пусть $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$, $\lambda \in [0; \infty)$ и $r = \{1, \ldots, m + \varkappa\}$. Рассмотрим следующий граничный символ задачи (1), (2) в точке $x' \in \partial G$:

$$A^0(\xi', D_t, \lambda)v_r(t) = 0 \quad t > 0, \tag{13}$$

$$(B_j^0(\xi', D_t)v_r)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^0(\xi')\sigma_k^{(r)} = \delta_{j,r}, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{14}$$

Здесь $\delta_{j,r}$ – символ Кронекера.

Из условий 1,2,3 следует, что краевая задача (13), (14) имеет единственное решение

$$v_r(t) = v_r(t, \xi', \lambda), \quad \sigma_k^{(r)} = \sigma_k^{(r)}(\xi', \lambda), \quad k = 1, \ldots, \varkappa,$$

такое, что функция $v_r(t)$ со всеми производными экпоненциально убывает при $t \to \infty$.

Система векторов $(v_r(t), \sigma_1^{(r)}, \ldots, \sigma_\varkappa^{(r)})$, $r = 1, \ldots, \varkappa$, линейно независимая. Она называется *фундаментальной системой решений* (ф.с.р.) граничного символа.

Обозначим через $\|\cdot\|$ норму в пространстве $L_2((0, +\infty))$.

Основных результатом работы является следующая теорема:

Теорема. *Пусть задача* (1),(2) *слабо эллиптическая с параметром и пусть целое число* $l \geq 0$. *Тогда для любых* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\lambda \in [0; \infty)$ *граничный символ задачи* (13),(14) *имеет единственное решение* $(v_r(t), \sigma_1^{(r)}, \ldots, \sigma_\varkappa^{(r)})$, *и справедливы оценки для* $v_r(t, \xi', \lambda)$ *ф.с.р.:*

$$||D^l v_r(., \xi', \lambda)||_{L_2(\mathbb{R}^+)} \leq \tag{15}$$

$$\leq C \begin{cases} |\xi'|^{l-m_r-1/2}, & r \leq \mu + \varkappa, \quad l \leq m_{\mu+\varkappa+1}; \\ |\xi'|^{m_{\mu+\varkappa+1}-m_r}(|\lambda| + |\xi'|)^{l-m_{\mu+\varkappa+1}-1/2}, & r \leq \mu + \varkappa, \quad l > m_{\mu+\varkappa+1}; \\ |\xi'|^{l-m_{\mu+\varkappa}-1/2}(|\lambda| + |\xi'|)^{m_{\mu+\varkappa}-m_r}, & r > \mu + \varkappa, \quad l \leq m_{\mu+\varkappa}; \\ (|\lambda| + |\xi'|)^{l-m_r-1/2}, & r > \mu + \varkappa, \quad l > m_{\mu+\varkappa}. \end{cases}$$

с константой C, *не зависящей от* ξ' *и* λ.

Доказательство теоремы будет приведено в п.4. Для этого в п.3 мы исследуем условия разрешимости краевой задачи на полуоси $(0; +\infty)$ с дополнительными неизвестными постоянными в краевых условиях.

3. Условия разрешимости краевой задачи на полуоси. В этом пункте мы фиксируем $\xi' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и для краткости обозначим $B_j^0(D_t) := B_j^0(\xi', D_t)$, $C_{j,k}^0 := C_{j,k}^0(\xi')$.

Рассмотрим следующую краевую задачу на полуоси:

$$P(D_t)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{16}$$

$$(B_j^0(D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^0 \sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, p + \varkappa, \tag{17}$$

Здесь $p \in \mathbb{N}$ и $P(\tau)$ - произвольный комплексный полином порядка $\operatorname{ord} P \leq 2p$.

Пусть γ — кусочно гладкий контур, лежащий в полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Предположим, что точно p корней $\tau_1^+, \ldots, \tau_p^+$ этого полинома (с учётом их кратности) лежат внутри области, ограниченной контуром γ (остальные корни находятся вне замыкания этой области). Положим

$$P^\gamma(\tau) := \prod_{j=1}^{p}(\tau - \tau_j^+) = \sum_{k=0}^{p} a_k^\gamma \tau^{p-k}, \quad P_j^\gamma(\tau) := \sum_{k=0}^{j} a_k^\gamma \tau^{j-k}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_\gamma$ пространство решений уравнения $P^\gamma(D_t)v(t) = 0$. Пространство $\mathfrak{M}_\gamma$ имеет размерность p и базис

$$h_k(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma e^{i\tau t}\frac{P^\gamma_{p-k}(\tau)}{P^\gamma(\tau)}\,d\tau, \quad k = 1,\ldots,p. \tag{18}$$

Пусть

$$B^\gamma_j(\tau) := \sum_{k=1}^{p} b^\gamma_{j,k}\tau^{j-1}$$

— остаток от деления полинома $B^0_j(\tau)$ на $P^\gamma(\tau)$.

Введём матрицу $L^\gamma = \left(L^\gamma_{j,k}\right)_{j,k=1,\ldots,p+\varkappa}$, где

$$L^\gamma_{j,k} := \begin{cases} b^\gamma_{j,k}, & j = 1,\ldots,p+\varkappa; \quad k = 1,\ldots,p;\\ C_{j,k-p}, & j = 1,\ldots,p+\varkappa; \quad k = p+1,\ldots,p+\varkappa.\end{cases}$$

Назовём её *матрицей Лопатинского*, для задачи (16),(17), где

$$v \in \mathfrak{M}_\gamma. \tag{19}$$

Следующая лемма является обобщением известного утверждения в теории эллиптических краевых задач.

Лемма 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Для любых* $\varphi_1,\ldots,\varphi_{p+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (16),(17),(19) *имеет единственное решение.*

(ii) *Матрица Лопатинского* L^γ *обратима.*

(iii) *Найдутся полиномы* $N_1(\tau),\ldots,N_{p+\varkappa}(\tau)$, *порядка меньше* p, *и такие числа* $\sigma^r_1,\ldots,\sigma^r_\varkappa, r = 1,\ldots,p+\varkappa$, *что*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{B^0_j(\tau)N_\ell(\tau)}{P^\gamma(\tau)}d\tau + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}\sigma^\ell_k = \delta_{j,\ell}, \quad j,\ell = 1,\ldots,p+\varkappa. \tag{20}$$

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ следует из того, что всякое решение задачи (16), (17), (19) является также решением задачи

$$P^\gamma(D_t)v(t) = 0, \quad t > 0,$$
$$(B^\gamma_j(D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}\sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1,\ldots,p+\varkappa.$$

Следовательно, уравнение

$$L^\gamma w = \mathrm{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{p+\varkappa}) \in \mathbb{C}^{p+\varkappa}$$

имеет единственное решение

$$w = \mathrm{col}\left(v(0),(D_t v)(0),\ldots,(D^{p-1}_t v)(0),\sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa\right).$$

Последнее равносильно обратимости матрицы L^γ.

Импликация (ii)$\Rightarrow$(iii). Как показано в работе [13, часть 1, раздел 1] справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{z^{\ell-1}P^{\gamma}_{p-k}(z)}{P^{\gamma}(z)}dz=\delta_{\ell,k},\quad \ell,k=1\dots,p. \tag{21}$$

Любое решение уравнения (16), пренадлежащее пространству $\mathfrak{M}_{\gamma}$ представляется в виде

$$v(t)=\sum_{k=1}^{p}R_kh_k(t), \tag{22}$$

где R_k – некоторые постоянные, которые мы найдем из граничных условий (17).

Подставим решение (22) в граничные выражения (17). Мы получим следующее

$$B^0_j(D_t)v(t)|_{t=0}+\sum_{k=1}^{\varkappa}C^0_{j,k}\sigma_k=\varphi_j,\quad j=1,\dots,m+\varkappa. \tag{23}$$

Учитывая (18) и (22) мы получим следующее:

$$B^0_j(D_t)v(t)|_{t=0}=$$
$$=B^0_j(D_t)\left(\textstyle\sum_{k=1}^{p}R_kh_k(t)\right)\Big|_{t=0}=\textstyle\sum_{k=1}^{p}R_kB^0_j(D_t)h_k(t)|_{t=0}=$$
$$=\textstyle\sum_{k=1}^{p}R_kB^0_j(D_t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{P^{\gamma}_{p-k}(z)}{P^{\gamma}(z)}e^{i\tau t}dz\right)\Bigg|_{t=0}=$$
$$=\textstyle\sum_{k=1}^{p}R_k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{B^0_j(z)P^{\gamma}_{p-k}(z)}{P^{+}(z)}dz.$$

Интеграл в правой части последнего выражения не изменится если мы заменим $B^0_j(\tau)$ на $B^{\gamma}_j(\tau)$. Учитывая это и равенство (21) мы получим

$$\tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\tfrac{B^0_j(z)P^{\gamma}_{p-k}(z)}{P^{\gamma}(z)}dz=$$
$$\int\limits_{\gamma}\tfrac{z^{r-1}P^{\gamma}_{m-k}(z)}{P^{\gamma}(z)}dz=\textstyle\sum_{\ell=1}^{p}b_{j,\ell}\delta_{\ell,k}=b_{j,k}.$$

Возвращаясь к (23) результате мы получили систему $p+\varkappa$ уравнений для нахождения неизвестных $R_1,\dots,R_p$, $\sigma_1,\dots,\sigma_{\varkappa}$:

$$\sum_{k=1}^{p}R_kb_{j,k}+\sum_{k=1}^{\varkappa}C^0_{j,k}\sigma_k=\varphi_j,\quad j=1,\dots,p+\varkappa. \tag{24}$$

Так как матрица Лопатинского обратима, то неизвестные функции однозначно определяются.

Обозначим через $D=(D_{kj})_{k,j=1,\dots,p+\varkappa}$ – матрицу, обратную матрице Лопатинского L. Если заменить в (24) φ_j соответственно на $\delta_{j,r}$ и учитывая представление (18), (22) мы получим

$$\begin{aligned} N_{\ell}(\tau) &= \sum_{k=1}^{p}D_{kl}P^{\gamma}_{p-k}(\tau),\quad l=1,\dots,p+\varkappa;\\ \sigma^{\ell}_k &= D_{p+k,l},\quad k=1,\dots,\varkappa;\ l=1,\dots,p+\varkappa. \end{aligned}$$

которые удовлетворяют (20).

Импликация (iii)⇒(i). Выбирем произвольный вектор $\varphi_1, \dots, \varphi_{p+\varkappa} \in \mathbb{C}^{p+\varkappa}$. В силу условия (iii) решением задачи (16), (17), (19) можна представить в виде:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^{p+\varkappa} \varphi_r \int\limits_{\gamma} e^{i\tau t} \frac{N_r(\tau)}{P^{\gamma}(\tau)} d\tau, \\ \sigma_k &= \sum_{r=1}^{p+\varkappa} \varphi_r \, \sigma_k^r, \quad k = 1, \dots, \varkappa. \end{aligned}$$

Так пространство решений этой задачи и пространство её правых частей имеют одинаковую размерность $p + \varkappa$, то из существования решения следует его единственность. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Элементы матрицы Лопатнского L непрерывно зависят от корней $\tau_1^+, \dots, \tau_p^+ \in \mathbb{C}+$ полинома $P(\tau)$. Поэтому при малом возмущении этих корней матрица L сохраняет свою невырожденность. Следовательно, условия (i),(ii),(iii) лемы 1 инвариантны относительно малых возмущений корней.

Замечание 2. Если контур $\gamma \subset \mathbb{C}+$ охватывает *все* корни полинома $P(\tau)$, лежащие в полуплоскости $\mathbb{C}+$, то $\mathfrak{M}_\gamma$ – пространство *всех* решений уравнения (16), експоненциально убывающих к нулю при $t \to \infty$.

4. Доказательство теоремы. Оценки фигурирующие в теореме зависят от двух параметров λ и $|\xi'|$. Доказательство этих оценок легко редуцируется к случаю одного параметра.

Действительно, по соображениям однородности

$$A(\xi', D_t, \lambda)u(\rho t) = (A(\xi', \rho D_t, \lambda)u)(\rho t) = \rho^{2m}(A(\xi'/\rho, D_t, \lambda/\rho)u)(\rho t).$$

Аналогично

$$\begin{gathered} B_j(\xi', D_t)u(\rho t) = \rho^{m_k}(B_k(\xi'/\rho, D_t)u)(\rho t), \\ C_{j,k}(\xi')\sigma_k(\xi') = \rho^{-m_r-\alpha_k} C_{j,k}(\xi'/\rho)\sigma_k(\xi'/\rho), \\ j = 1, \dots, m + \varkappa, \quad k = 1, \dots, \varkappa. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что функции $v_r(t, \xi', \lambda)$, $\sigma_1^{(r)}(\xi'), \dots, \sigma_\varkappa^{(r)}(\xi')$ и $v_j(rt, \xi'/r, \lambda/r)$, $\sigma_1^{(r)}(\xi'/r), \dots, \sigma_\varkappa^{(r)}(\xi'/r)$ одновременно являются решениями задачи (13), (14). Из единственности решения этой задачи следует, что

$$v_r(\xi', t, \lambda) = \rho^{-m_r} v_r(\xi'/\rho, \rho t, \lambda/\rho), \sigma_k^{(r)}(\xi') = \rho^{-m_r-\alpha_k} \sigma_k^{(r)}(\xi'/\rho),$$

откуда

$$||D^l v_r(., \xi', \lambda)||_{L_2(\mathbb{R}^+)} = \rho^{l-m_r-1/2} ||D^l v_r(., \xi'/\rho, \lambda/\rho)||_{L_2(\mathbb{R}^+)}.$$

Полагая $\rho = |\xi'|$ и $\omega = \xi'/|\xi'|$, получим

$$||D^l v_r(., \xi', \lambda)||_{L_2(\mathbb{R}^+)} = |\xi'|^{l-m_r-1/2} ||D^l v_r(., \omega, \frac{\lambda}{|\xi'|}||_{L_2(\mathbb{R}^+)}.$$

Теорема будет доказана если для $|\omega| = 1$ имеем

$$||D^l v_r(\omega, \cdot, \lambda)||_{L_2((R)^+)} \leq C \times \tag{25}$$

$$\times\begin{cases} 1, & j \le \mu+\varkappa \quad l \le m_{\mu+\varkappa+1}; \\ \lambda^{m_{\mu+\varkappa+1}-l+1/2}, & j \le \mu+\varkappa \quad l > m_{\mu+\varkappa+1}; \\ \lambda^{m_j-m_{\mu+\varkappa}}, & j > \mu+\varkappa \quad l \le m_{\mu+\varkappa}; \\ \lambda^{m_j-l+1/2}, & j > \mu+\varkappa \quad l > m_{\mu+\varkappa}. \end{cases}$$

для $\lambda > 1$, а левая часть ограничена константой для $\lambda \le 1$. Ограниченность при $\lambda \le 1$ легко следует из условий 1-3. Рассмотрим случай больших λ.

Прежде чем доказывать эту оценку, мы приведем необходимый вспомогательный материал. Обозначим корни уравнения $A_{2\mu}(\omega,\tau)=0$, лежащие в $\mathbb{C}_+$, через $\tau_1^+(\omega),\dots,\tau_\mu^+(\omega)$. Из компактности сферы $\{\omega,|\omega|=1\}$ следует, что можно указать контур $\gamma_1 \in \mathbb{C}_+$, находящийся на положительном расстоянии от вещественной оси и охватывающий при $|\omega|=1$ указанные корни.

Согласно условию 2 и замечанию 2 леммы 1 найдутся такие функции $\sigma_i^l(\omega)$ и полиномы $N_\ell(\omega,\tau)$ $(\ell=1,\dots,\mu+\varkappa;\ i=1,\dots,\varkappa)$, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{B_k(\omega,\tau)N_\ell(\omega,\tau)}{A_{2\mu}^+(\omega,\tau)}d\tau+\sum_{i=1}^{\varkappa}C_{ki}(\omega)\sigma_i^l(\omega)=\delta_{k\ell}\quad k,\ell=1,\dots,\mu+\varkappa. \tag{26}$$

Следуя $[3,11]$определим полином

$$Q(\tau):=\frac{A^0(0,\tau,1)}{A_{2\mu}^0(0,\tau)}=\sum_{j=0}^{2m-2\mu}q_j\tau^{2m-2\mu-j},\quad q_j=\frac{A_{2m-j}^0(0,1)}{A_{2\mu}^0(0,1)}.$$

Обозначим через $\tau_{\mu+1}^+,\dots,\tau_m^+$ корни уравнения $Q(\tau)=0$ с положительными мнимыми частями, и пусть контур $\gamma_2 \in C_+$ охватывает эти корни. Согласно условию 6 и лемме 1 ($\varkappa=0$)найдутся такие полиномы $N_\ell(\tau)$, $\ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa$, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{B_k(0,\tau)N_\ell(\tau)}{Q^+(\tau)}d\tau=\delta_{k\ell},\quad k,\ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa. \tag{27}$$

Обозначим через $\tau_1^+(\omega,\lambda),\dots,\tau_m^+(\omega,\lambda)$ корни уравнения

$$A(\omega,\tau,\lambda)=0, \tag{28}$$

лежащие в $\mathbb{C}_+$. Согласно $[1,3]$ указанные выше корни разбиваются на группы $S^{1+}(\omega,\lambda)$ и $S^{2+}(\omega,\lambda)$, причем выбранный выше контур $\gamma_1 \in \mathbb{C}_+$ охватывет множества $S^{1+}(\omega,\lambda)$ при всех $|\omega|=1$ и достаточно больших $\lambda \ge \lambda_0$. Аналогично контур $\gamma_2 \in \mathbb{C}_+$ охватывает множества $\lambda^{-1}S^{2+}(\omega,\lambda)$ при всех $|\omega|=1$ и достаточно больших $\lambda \ge \lambda_0$. Более того, в теоретико-множественном смысле

$$S^{1+}(\xi',\lambda)\to S_{2\mu}^+(\xi'),\quad \lambda^{-1}S^{2+}(\xi',\lambda)\to S_b^+,\quad |\lambda|\to\infty.$$

Через $S_{2\mu}^+(\xi')$ и S_b^+ обозначены множества на комплексной плоскости $\mathbb{C}_+$, отвечающие, соответственно, нулям уравнения $A_{2\mu}(\omega,\tau)=0$ и уравнения $Q(\tau)=0$ с положительными мнимыми частями.

В соответствие с разбиением корней мы факторизуем символ $A(\omega,\tau,\lambda)$ (см. [9, предложение 1 из п.III.1.3.]):

$$A(\omega,\tau,\lambda)=A^{1+}(\omega,\tau,\lambda)A^{2+}(\omega,\tau,\lambda)A^{-}(\omega,\tau,\lambda).$$

Согласно условию 5 и лемме 1 задача на полупрямой

$$\begin{gathered} A(\omega,D_t,\lambda)v(t)=0 \quad t>0,\\ B_j(\omega,D_t,\lambda)v(0)+\sum_k^{\varkappa}C_{jk}(\omega)\sigma_k(\omega)=g_j \quad j=1,\dots,\mu+\varkappa,\\ v(t)\in\mathfrak{M}_{\gamma_1}. \end{gathered}$$

однозначно разрешима при достаточно малых $\lambda\geq\lambda_0$. Более того, найдутся такие полиномы $N_\ell(\omega,\tau,\lambda)$ и функции $\sigma_i^l(\omega)$ ($\ell=1,\dots,\mu+\varkappa$; $i=1,\dots,\varkappa$), что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{B_k(\omega,\tau)N_\ell(\omega,\tau,\lambda)}{A^{1+}(\omega,\tau,\lambda)}d\tau+\sum_{i=1}^{\varkappa}C_{ki}(\omega)\sigma_i^l(\omega)=\delta_{k\ell}, \quad k,\ell=1,\dots,\mu+\varkappa. \tag{29}$$

Полезно отметить, что

$$N_\ell(\omega,\tau,\lambda)\to N_\ell(\omega,\tau). \quad \lambda\to\infty,$$

и равенства (29) при $\lambda\to\infty$ переходят в равенства (26).

Согласно условию 6 и лемме 1 задача на полупрямой

$$\begin{gathered} A\left(\tfrac{\omega}{\lambda},D_t,1\right)v(t)=0, \quad t>0,\\ B_j\left(\tfrac{\omega}{\lambda},D_t\right)v(0)=g_j, \quad j=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa,\\ v(t)\in\mathfrak{M}_{\gamma_2} \end{gathered}$$

однозначно разрешима при достаточно больших $\lambda\geq\lambda_0$. Более того, найдутся такие полиномы $N_\ell(\omega,\tau,\lambda)$, $\ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa$, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{B_k(\frac{\omega}{\lambda},\tau)N_\ell(\omega,\tau,\lambda)}{A^{2+}(\frac{\omega}{\lambda},\tau,1)}d\tau=\delta_{k\ell}, \quad k,\ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa. \tag{30}$$

Полезно отметить, что

$$N_\ell(\omega,\tau,\lambda)\to N_\ell(\tau), \quad \lambda\to\infty, \quad \ell>\mu+\varkappa,$$

и равенства (30) при $\lambda\to\infty$ переходят в равенства (27).

Заметим, что

$$A^2(\omega,\lambda\tau,\lambda)=A^2(\frac{\omega}{\lambda},\tau,1), \quad B_j(\omega,\lambda\tau)=\lambda^{m_j}B_j(\frac{\omega}{\lambda},\tau).$$

В силу этих соотношений равенства (30) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{B_k(\omega,\lambda\tau)N_\ell(\omega,\tau,\lambda)}{A_2^{+}(\omega,\lambda\tau,\lambda)}d\tau=\lambda^{m_k}\delta_{k\ell}, \quad k,\ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa. \tag{31}$$

Вернемся к доказательству оценки (25). Поскольку все корни уравнения (28) с положительными мнимыми частями при $|\omega| = 1$ охватываются контурами γ_1 и $\lambda\gamma_2$, то пространство функций на полупрямой, удовлетворяющих однородному уравнению в (13) является прямой суммой подпространств $\mathfrak{M}_{\gamma_1}$ и $\mathfrak{M}_{\lambda\gamma_2}$. Имеет место

Лемма 2. *Решение* $v_r(\omega, t, \lambda)$ *задачи* (13)-(14) *может быть представлено в виде*

$$v_r(t,\omega,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{M_j^{(1)}(\omega,\tau,\lambda)}{A^{1+}(\omega,\tau,\lambda)} e^{it\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{M_j^{(2)}(\omega,\tau,\lambda)}{A^{2+}(\frac{\omega}{\lambda},\tau,1)} e^{it\lambda\tau d\tau} \tag{32}$$

где для функций $M_r^{(1)}$ *и* $M_r^{(2)}$ *выполнены оценки*

$$|M_r^{(1)}(\tau,\omega,\lambda)| \le \begin{cases} C\,, & r \le \mu+\varkappa\,, \\ C\,\lambda^{m_{\mu+\varkappa}-m_r}\,, & r > \mu+\varkappa\,, \end{cases} \tag{33}$$

$$|M_r^{(2)}(\tau,\omega,\lambda)| \le \begin{cases} C\,\lambda^{-m_{\mu+\varkappa+1}}\,, & r \le \mu+\varkappa\,, \\ C\,\lambda^{-m_r}\,, & r > \mu+\varkappa\,. \end{cases} \tag{34}$$

Из этих оценок и представления (32) следует, что

$$\|(D_t^l v_j)(\cdot,\omega,\lambda)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \le \begin{cases} O(1) + O(\lambda^{l-m_{\mu+\varkappa+1}-\frac{1}{2}})\,, & j \le \mu+\varkappa\,, \\ O(\lambda^{m_{\mu+\varkappa}-m_j}) + O(\lambda^{l-m_j-\frac{1}{2}})\,, & j > \mu+\varkappa\,. \end{cases} \tag{35}$$

Неравенства (25) и соответственно основная теорема непосредственно следуют из этих оценок.

Доказательство. Мы воспользуемся методом предложенным в работах Л.Р.Волевича. Пусть функции $w(t,\omega,\lambda), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa$ являются решением задачи (13), в которой δ_{jk} заменены на $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{m+\varkappa}) \in \mathbb{C}^{m+\varkappa}$. Решение ищется в виде

$$\begin{gathered} w(t,\omega,\lambda) = \textstyle\sum_{\ell=1}^{\mu+\varkappa} \psi_\ell(\omega,\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{N_\ell(\tau,\omega,\lambda)}{A^{1+}(\tau,\omega,\lambda)} e^{it\tau} d\tau + \\ + \textstyle\sum_{\ell=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} \psi_\ell(\omega,\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{N_\ell(\tau,\omega,\lambda)}{A^{2+}(\tau,\frac{\omega}{\lambda},1)} e^{it\lambda\tau} d\tau, \end{gathered} \tag{36}$$

$$\sigma_k = \sum_{\ell=1}^{\mu+\varkappa} \psi_\ell(\omega,\lambda)\sigma_k^\ell\,, \quad k = 1,\ldots,\varkappa \tag{37}$$

с подлежащими определению функциями ψ_ℓ.

Функции $N_\ell(\tau,\omega,\lambda)$ и $\sigma_1^\ell, \ldots, \sigma_\varkappa^\ell$ при $\ell = 1, \ldots, \mu+\varkappa$ удовлетворяют соотношениям (29), а при $\ell = \mu+\varkappa+1, \ldots, m+\varkappa$ функции $N_\ell(\tau,\omega,\lambda)$ – соотношениям (30). Применяя к обеим частям (36) граничный оператор $B_k(\omega, D_t)$ и полагая $t = 0$, также учитывая (37) мы получим систему линейных уравнений для неизвестных функций $\psi_k(\omega,\lambda)$:

$$\begin{aligned} \psi_k(\omega,\lambda) + \lambda^{m_k} \sum_{\ell=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} h_{k\ell}(\omega,\lambda)\psi_\ell(\omega,\lambda) &= \phi_k\,, \quad (k = 1,\ldots,\mu+\varkappa)\,; \\ \sum_{\ell=1}^{\mu+\varkappa} h_{k\ell}(\omega,\lambda)\psi_\ell(\omega,\lambda) + \lambda^{m_k}\psi_k(\omega,\lambda) &= \phi_k\,, \quad (k = \mu+\varkappa+1,\ldots,m+\varkappa)\,. \end{aligned}$$

Здесь мы положили

$$h_{k\ell}(\omega,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{B_k(\frac{\omega}{\lambda},\tau)N_\ell(\omega,\tau,\lambda)}{A^{2+}(\frac{\omega}{\lambda},\tau,1)}\,d\tau,$$

$$(k=1,\dots,\mu+\varkappa;\ \ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa);$$

$$h_{k\ell}(\omega,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{B_k(\omega,\tau)N_\ell(\tau,\omega,\lambda)}{A^{1+}(\tau,\omega,\lambda)}\,d\tau+\sum_{i=1}^{\varkappa}C_{ki}(\omega)\sigma_i^\ell\,,$$

$$(k=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa;\ \ell=1,\dots,\mu+\varkappa)\,.$$

Теперь мы запишем $\psi=(\psi',\psi'')$, где ψ' состоит из первых $\mu+\varkappa$ компонент вектора ψ, а ψ'' состоит из остальных $m-\mu$ компонент. Аналогично $\phi=(\phi',\phi'')$. Этих обозначениях наша система может быть переписана в виде

$$\begin{array}{rcrcl}\psi' & + & \Delta_1H_{12}\psi'' & = & \phi'\,,\\ H_{21}\psi' & + & \Delta_2\psi'' & = & \phi''\,,\end{array}$$

где мы использовали обозначения

$$\Delta_1:=\begin{pmatrix}\lambda^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{m_{\mu+\varkappa}}\end{pmatrix},\quad \Delta_2:=\begin{pmatrix}\lambda^{m_{\mu+\varkappa+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{m_{m+\varkappa}}\end{pmatrix}$$

и

$$H_{12}:=\Big(h_{k\ell}\Big)_{\substack{k=1,\dots,\mu+\varkappa\\ \ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa}},\quad H_{21}:=\Big(h_{k\ell}\Big)_{\substack{k=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa\\ \ell=1,\dots,\mu+\varkappa}}.$$

Если мы слева умножим второе уравнение на матрицу $\Delta_1H_{12}\Delta_2^{-1}$ и вычтем полученное равенство из первого уравнения, то получим

$$(I-\Delta_1H_{12}\Delta_2^{-1}H_{21})\psi'=\phi'-\Delta_1H_{12}\Delta_2^{-1}\phi''\,.$$

Аналогично мы получим

$$(I-\Delta_2^{-1}H_{21}\Delta_1H_{12})\psi''=-\Delta_2^{-1}H_{21}\phi'+\Delta_2^{-1}\phi''\,.$$

В левых частях написанных выше равенств в скобках стоят матрицы, отличающиеся от единичной на матрицу, элементы которой не превосходят $\lambda^{m_{\mu+\varkappa}-m_{\mu+\varkappa+1}}$. Согласно (3) $m_{\mu+\varkappa+1}-m_{\mu+\varkappa}>0$. Отсюда вытекает, что эти матрицы при достаточно больших $|\lambda|$ имеют обратные, которые мы обозначим через G_1 м G_2, соответственно. Тогда мы получим

$$\begin{array}{rcrcr}\psi' & = & G_1\phi' & - & G_1\Delta_1H_{12}\Delta_2^{-1}\phi''\,,\\ \psi'' & = & -G_2\Delta_2^{-1}H_{21}\phi' & + & G_2\Delta_2^{-1}\phi''\,.\end{array}$$

Если мы возьмем $\phi=e_j\quad(1\le j\le\mu+\varkappa)$, где через e_j обозначен j-й единичный вектор, то получим

$$\psi'_{(j)}=G_1e_j,\quad \psi''_{(j)}=-G_2\Delta_2^{-1}H_{21}e_j,\quad j=1,\dots,\mu+\varkappa.$$

Аналогично для $j > \mu + \varkappa$ получим

$$\psi'_{(j)} = -G_1 \Delta_1 H_{12} \lambda^{-m_j} e_j, \quad \psi''_{(j)} = G_2 \lambda^{-m_j} e_j, \quad j > \mu + \varkappa.$$

Вернемся к представлению (32). Обозначим через $\psi'_{\ell(j)}$ $(\ell = 1, \ldots, \mu + \varkappa)$ – компоненты вектора $\psi'_{(j)}$, а через $\psi''_{\ell(j)}$ $(\ell = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa)$ – компоненты вектора $\psi''_{(j)}$. Тогда

$$M_j^{(1)} = \sum_{\ell=1}^{\mu+\varkappa} \psi'_{\ell(j)} N_\ell, \quad M_j^{(2)} = \sum_{\ell=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} \psi''_{\ell(j)} N_\ell, \quad \sigma_k^j = \sum_{\ell=1}^{\mu+\varkappa} \psi'_{\ell(j)} \sigma_k^\ell, \quad k = 1, \ldots, \varkappa.$$

Из написанных выше формул для $\psi'_{(j)}$ и $\psi''_{(j)}$ следует, что при $j \leq \mu + \varkappa$

$$\psi'_{\ell(j)} = O(1), \quad \psi''_{\ell(j)} = O(\lambda^{-m_{\mu+\varkappa+1}}),$$

а при $j > \mu + \varkappa$

$$\psi'_{\ell(j)} = O(\lambda^{m_{\mu+\varkappa} - m_j}), \quad \psi''_{\ell(j)} = O(\lambda^{-m_j}).$$

Таким образом, мы приходим к оценкам (33), (34). Лемма доказана.

1. *Denk R., Mennicken R., Volevich L. R. Boundary Value Problems for a Class of Elliptic Operator Pencils// Integ. Eq. Operator Th. 2000. V. 8, P. 410-436.*
2. *Denk R., Mennicken R., Volevich L. R. On Elliptic Operator Pencils with General Boundary Conditions// Integ. Eq. Operator Th. 2001. V. 9, P. 25-40.*
3. *Волевич Л. Р. Метод Вишика-Люстерника в эллиптических задачах с малым параметром // Труды московского математического общества, т. 67, –2006. – С. 104–147.*
4. *Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), 119-147.*
5. *Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические краевые задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. – 1964. –* ***19****, № 3. – С. 43 – 161.*
6. *Демиденко Г.В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск. Научная книга. 1998, с. 436*
7. *Roitberg Ya. A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. –Dordrecht: Kluwer Acad. Publisher, 1999. –x+276 p.*
8. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: Amer. Math. Soc., 1997.*
9. *Гиндикин С. Г., Волевич Л. Р. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. – Москва: УРСС, 1999. – 272 с.*
10. *Roitberg Ya. A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. –Dordrecht: Kluwer Acad. Publisher, 1996. –xii+415 p.*
11. *Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук, –* ***12*** *, – 1957. – Вып. 5. – С. 3 – 122.*
12. *Заворотинський А. В. Еліптичні з малим параметром граничні задачі з невідомими додатковими функціями на межі області. Формальний асимптотичний розв'язок . // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (серія "Математика") – 2011. – Т1., №1-2. – С. 40 – 46.*
13. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях I. – Москва: ИЛ, 1962. – 208 с.*

Одержано 28.10.2012

УДК 517.97

О. Д. Кичмаренко, М. Л. Карпычева (Одесский нац. ун-т)

УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

In this paper we consider discrete equations with delay , as a modeling tool for real processes that most closely reflects the behavior of system, which is influenced by the background. Method of investigation, the averaging method for systems of discrete equations with dependence on a small parameter. We prove theorems on averaging of systems with periodic and nonperiodic functions of discrete equations. The examples of the use of the averaging method and are estimates of the solutions of the original and averaged systems.

У роботі розглядаються системи дискретних рівнянь із запізненням, як інструмент моделювання реальних процесів, які точніше відображають поведінку систем, на які впливає передісторія. Методом дослідження є метод усереднення рівнянь, які містять залежність від малого параметру. Проводиться доведення теорем про усереднення систем з періодичними та неперіодичними правими частинами дискретних рівнянь. Розглядаються приклади застосування методу усереднення та наводяться оцінки близькості розв'язків заданих та усереднених систем.

В работе рассматриваются системы дискретных уравнений с запаздыванием, как инструмент моделирования реальных процессов, которые наиболее точно отображают поведение систем, на которые влияет предыстория. Методом исследования выбран метод усреднения уравнений, содержащих малый параметр. Доказываются теоремы об усреднении систем с периодическими и непериодическими правыми частями уравнений. Рассматриваются примеры применения метода усреднения и приводятся оценки близости решений исходных и усредненных систем.

Введение. В настоящее время в теории дискретных уравнений сформировалось направление – дискретные уравнения с запаздыванием. Уравнения этого типа, по сути, являются дискретными уравнениями более высокого порядка или сравнительно легко сводятся к последним. Однако такое сведение в большинстве случаев не упрощает поставленную проблему. Величина запаздывания является существенным фактором, влияющим на поведение решения дискретного уравнения и на его устойчивость. Поэтому для дискретных уравнений с запаздыванием целесообразно развивать специальные методы исследования.

В работе рассматриваются дискретные уравнения с запаздыванием, содержащие малый параметр. Для построения решений применяется метод усреднения, формулируются и доказываются теоремы, гарантирующие близость решений заданной и усредненной систем в периодическом и непериодическом случаях на асимптотически большом промежутке времени.

1. Постановка задачи. Пусть движение объекта описывается системой дискретных уравнений с запаздыванием:

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot f\left(i, x_i, x_{i-1}\right), \tag{1}$$
$$x_{-1} = x^1, \quad x_0 = x^0,$$

где $x_i \in D \subset R^n$ – фазовый вектор, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f\left(i, x_i, x_{i-1}\right)$ – заданная вектор-функция, $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$, $L = const$, $E\left(s\right)$ – целая часть числа s, заданные значения x^0, x^1 определяют начальное и предшествующее состояние, характеризующее влияние запаздывания на текущее состояние системы.

2. Лемма замораживания для систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием. Рассмотрим вспомогательную систему дискретных уравнений с запаздыванием, равным нулю,

$$z_{i+1} = z_i + \varepsilon \cdot f\left(i, z_i, z_i\right), \quad z_0 = x^0 \tag{2}$$

и докажем лемму "замораживания".

Лемма 1. *Пусть в области* $Q = \{\, i \in I; \;\; x, y \in D \,\}$ *выполнены условия:*

1) функция $f\left(i, x, y\right)$ *ограничена константой* M *и удовлетворяет условию Липшица по* x, y *с постоянной* λ*;*

2) решение $z = z_i, \quad i \in I$ *системы (2) при* $z_0 = x^0 \in D' \subset D$ *вместе с* ρ*-окрестностью принадлежит области* D*.*

Тогда существуют такие $C > 0$ *и* $\varepsilon_1 > 0$*, что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *и для любого* $i \in I = \{0, \; 1, \; 2, \; ..., N\}$*,* $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ *справедлива оценка:*

$$\|x_i - z_i\| \leq C\varepsilon,$$

где x_i *и* z_i *– решения систем уравнений (1) и (2) соответственно.*

Доказательство. Представим уравнения (1) и (2) в виде

$$x_{i+1} = x^0 + \varepsilon \sum_{j=0}^{i} f\left(j, x_j, x_{j-1}\right), \qquad z_{i+1} = x^0 + \varepsilon \sum_{j=0}^{i} f\left(j, z_j, z_j\right)$$

и оценим их разность с учетом выполнения условия 1) леммы:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{i} \|f\left(j, x_j, x_{j-1}\right) - f\left(j, z_j, z_j\right)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{i} \left[\|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - z_j\|\right] \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{i} \left[\|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - x_j\| + \|x_j - z_j\|\right] = \varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{i} \left[\, 2 \cdot \|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - x_j\|\right].$$

Последнее слагаемое под знаком суммы можно оценить, если представить систему (1) в виде

$$\|x_{i+1} - x_i\| \leq \varepsilon \cdot \|f\left(i, x_i, x_{i-1}\right)\| \leq \varepsilon M$$

при $i \in I = \{0, \; 1, \; 2, \; ..., N\}$. Тогда

$$\varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{i} \|x_{j-1} - x_j\| \leq \varepsilon\lambda \cdot \left(\|x_{-1} - x_0\| + \sum_{j=0}^{i-1} \|x_{j+1} - x_j\| \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \cdot \left(\left\|x^1 - x^0\right\| + \varepsilon M N \right) = \varepsilon\lambda \cdot \left(\Delta + ML\right),$$

где $\Delta = \|x^1 - x^0\|$. Следовательно,

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq 2\varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{i} \|x_j - z_j\| + \varepsilon\lambda\left(\Delta + ML\right).$$

Применив дискретный аналог леммы Гронуолла-Беллмана, получим:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon\lambda\left(\Delta + ML\right) \cdot e^{2\lambda L}.$$

Так как разность $\|x_{i+1} - z_{i+1}\|$ должна быть не больше ρ, то найдется такое ε_1, что для всех $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ выполняется:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon\lambda\left(\Delta + ML\right) \cdot e^{2\lambda L} \leq \rho,$$

то есть справедливо утверждение леммы, где

$$C = \lambda\left(\Delta + ML\right) \cdot e^{2\lambda L}, \qquad \varepsilon_1 \leq \frac{\rho}{\lambda\left(\Delta + ML\right)} \cdot e^{-2\lambda L}.$$

Лемма доказана.

3. Усреднение систем дискретных уравнений с периодическими правыми частями. Пусть в системе (1) функция $f\left(i, x_i, x_{i-1}\right)$, является функцией периодической по i с периодом p, то есть для любого $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$ справедливо равенство

$$f\left(\ i + p,\ x_i, x_{i-1}\ \right) = f\left(\ i,\ x_i, x_{i-1}\right).$$

Множество $I = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ ..., N\ \}$ разобьем на отрезки длиной p точками деления $kp,\ \ k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$, выбор значений k определим из условия $kp \leq \frac{L}{\varepsilon}$, поэтому $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon p}\right)$.

На множестве значений $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$ системе (1) поставим в соответствие усредненную систему вида:

$$w_{k+1} = w_k + \varepsilon p \cdot f_0\left(w_k\right)\ , \qquad w_0 = x^0, \tag{3}$$

$$y_i = w_k + \frac{\left(i - kp\right)\left(w_{k+1} - w_k\right)}{p}, \quad i \in \left[kp,\ (k+1)\,p\right), \tag{4}$$

где

$$f_0\left(w\right) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} f\left(\ j,\ w,\ w\right). \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть в области $Q = \{\ i \in I;\ \ x, y \in D\ \}$ выполняются условия 1)-2) леммы и, кроме того:*

1) функция $f\left(i, x, y\right)$ является p-периодической по i;

2) решение $w = w_k,\quad k \in I_k$ системы (3) при $w_0 = x^0 \in D' \subset D$ вместе с ρ-окрестностью принадлежит области D.

Тогда для любого $L > 0$ существуют такие $C > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и для любого $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ справедливо:

$$\|x_i - y_i\| \leq C\varepsilon, \tag{6}$$

где x_i – решение системы (1), y_i – решение системы (3), (4), $x_{-1} = x^1$, $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Доказательство. Оценим разность $\|x_i - y_i\|$, где x_i – решение системы (1), y_i – решение системы (3), (4), $x_{-1} = x^1$, $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Из неравенства треугольника следует

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \le \|x_{i+1} - z_{i+1}\| + \|z_{i+1} - y_{i+1}\|, \tag{7}$$

где z_i – решение замороженной системы (2), $z_0 = x_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства отдельно. По лемме существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любого $\varepsilon \le \varepsilon_1$ справедливо:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \le \varepsilon\lambda\,(\Delta + ML) \cdot e^{2\lambda L}. \tag{8}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части неравенства (7) и для любого $k \in I_k$ и $i \in [kp,\ (k+1)\,p)$ получим

$$\|z_{i+1} - y_{i+1}\| \le \|z_{i+1} - z_{kp}\| + \|z_{kp} - y_{kp}\| + \|y_{kp} - y_{i+1}\|. \tag{9}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (9). Для этого систему (2) представим в виде

$$z_{i+1} = z_{kp} + \varepsilon \sum_{j=kp}^{i} f\,(j, z_j, z_j),$$

тогда

$$\|z_{i+1} - z_{kp}\| \le \varepsilon \sum_{j=kp}^{i} \|f\,(j, z_j, z_j)\| \le \varepsilon p \cdot M. \tag{10}$$

Оценим третье слагаемое в правой части неравенства (9). Для этого из соотношений (3), (4) при любом $k \in I_k$ получим следующие равенства для $i \in [kp,\ (k+1)\,p)$: $y_{kp} = w_k$; $y_{kp+1} = y_{kp} + \varepsilon \cdot f_0\,(y_{kp})$; $y_{kp+2} = y_{kp} + 2\varepsilon \cdot f_0\,(y_{kp})$; $\ldots y_{i+1} = y_{kp} + (i + 1 - kp) \cdot \varepsilon \cdot f_0\,(y_{kp})$; или $y_{i+1} = y_{kp} + \varepsilon \cdot \sum\limits_{j=kp}^{i} f_0\,(y_{kp})$, откуда

$$\|y_{i+1} - y_{kp}\| \le \varepsilon \cdot \sum_{j=kp}^{i} \|f_0\,(y_{kp})\|.$$

Учитывая соотношение (5), дополнительно получим

$$\|y_{i+1} - y_{kp}\| \le \varepsilon p \cdot M. \tag{11}$$

В правой части неравенства (9) осталось оценить второе слагаемое $|z_{kp} - y_{kp}|$ на промежутке $[kp,\ (k+1) \cdot p]$ для любого $k \in I_k$. Для этого соответствующие системы представим в виде

$$z_{(k+1)p} = z_{kp} + \varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} f\,(j, z_j, z_j), \qquad y_{(k+1)p} = y_{kp} + \varepsilon \cdot \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} f_0\,(y_{kp}).$$

Далее получим

$$\left\|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\right\| \le \|z_{kp} - y_{kp}\| + \varepsilon \left\| \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \left(f\,(j, z_j, z_j) - f_0\,(y_{kp})\right) \right\| \le$$

$$\leq \|z_{kp}-y_{kp}\| + \varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|f(j,z_j,z_j) - f(j,y_{kp},y_{kp})\| +$$

$$+\varepsilon \left\| \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} f(j,y_{kp},y_{kp}) - p\cdot f_0(y_{kp}) \right\|.$$

В полученном неравенстве третье слагаемое в силу соотношения (5) обращается в ноль, поэтому при выполнении условий теоремы, имеем

$$\left\|z_{(k+1)p}-y_{(k+1)p}\right\| \leq \|z_{kp}-y_{kp}\| +$$

$$+\varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|f(j,z_j,z_j) - f(j,z_{kp},z_{kp})\| + \varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|f(j,z_{kp},z_{kp}) - f(j,y_{kp},y_{kp})\| \leq$$

$$\leq \|z_{kp}-y_{kp}\| + \varepsilon\lambda \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} 2\|z_j - z_{kp}\| + \varepsilon\lambda \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} 2\|z_{kp}-y_{kp}\| \leq$$

$$\leq \|z_{kp}-y_{kp}\| + 2\varepsilon\lambda \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \varepsilon p\cdot M + 2\varepsilon\lambda p\cdot \|z_{kp}-y_{kp}\| \leq$$

$$\leq 2(\varepsilon p)^2 \lambda M + (1+2\varepsilon p\lambda)\cdot \|z_{kp}-y_{kp}\|.$$

Итак, получили неравенство

$$\left\|z_{(k+1)p}-y_{(k+1)p}\right\| \leq (1+2\varepsilon p\lambda)\cdot \|z_{kp}-y_{kp}\| + 2(\varepsilon p)^2 \lambda M. \tag{12}$$

Из неравенства (12) получим оценку для $\|z_{kp}-y_{kp}\|$, для этого введем обозначения $\beta_k = \|z_{kp}-y_{kp}\|$, $a=(1+2\varepsilon p\lambda)$, $b = 2(\varepsilon p)^2\lambda M$ и запишем неравенство (12) в виде

$$\beta_{k+1} \leq a\cdot\beta_k + b. \tag{13}$$

Преобразуем неравенство, учитывая, что оно является рекуррентным

$$\beta_{k+1} \leq a\cdot\beta_k + b \leq a\cdot(a\cdot\beta_{k-1}+b)+b \leq a^2\cdot\beta_{k-1} + ab + b \leq$$

$$\leq a^2\cdot(a\cdot\beta_{k-2}+b) + ab + b \leq a^3\cdot\beta_{k-2} + a^2b + ab + b \leq \ldots \leq$$

$$\leq a^{k+1}\beta_0 + a^k b + \ldots + a^2 b + ab + b = a^{k+1}\beta_0 + b\cdot\left(a^k + \ldots + a^2 + a + 1\right).$$

Здесь $\beta_0 = \|z_0 - y_0\| = 0$ в силу равных начальных условий $z_0 = y_0 = x^0$ для решений системы (2) и (3), (4) соответственно, а сумма в скобках представляет собой сумму k слагаемых геометрической прогрессии. Окончательно, из неравенства (13) получим

$$\beta_{k+1} \leq b\cdot\frac{a^k-1}{a-1}. \tag{14}$$

Вернемся к исходным переменным и применим к неравенству (12) полученную оценку (14)

$$\left\|z_{(k+1)p}-y_{(k+1)p}\right\| \leq 2(\varepsilon p)^2\lambda M\cdot \frac{(1+2\varepsilon p\lambda)^k - 1}{1+2\varepsilon p\lambda - 1} =$$

$$= 2\left(\varepsilon p\right)^2 \lambda M \cdot \frac{\left(1+2\varepsilon p\lambda\right)^k - 1}{2\varepsilon p\lambda} = \varepsilon pM \cdot \left(\left(1+2\varepsilon p\lambda\right)^k - 1\right).$$

Учитывая, что $(1+\alpha)^k = \left((1+\alpha)^{1/\alpha}\right)^{\alpha k} \sim e^{\alpha k}$ при $\alpha \to 0$, можно найти такое $\varepsilon_2 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ будут эквивалентны выражения $(1+2\varepsilon p\lambda)^k \sim e^{2\varepsilon p\lambda k}$, окончательно получим оценку

$$\left\|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\right\| \leq \varepsilon pM \cdot \left(e^{2\varepsilon p\lambda k} - 1\right) \leq \varepsilon pM \cdot \left(e^{2\lambda L} - 1\right) \qquad (15)$$

С учетом полученных оценок (10), (11), (15) неравенство (9) примет вид

$$\left\|z_{i+1} - y_{i+1}\right\| \leq 2\varepsilon p \cdot M + \varepsilon pM \cdot \left(e^{2\lambda L} - 1\right) \leq \varepsilon pM \cdot \left(e^{2\lambda L} + 1\right). \qquad (16)$$

По условию теоремы должно выполняться неравенство $\left\|z_{i+1} - y_{i+1}\right\| < \rho$, тогда найдется такое ε_3, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$ выполняется:

$$\left\|z_{i+1} - y_{i+1}\right\| \leq \varepsilon p \cdot M \cdot \left(e^{2\lambda L} + 1\right) < \rho.$$

С учетом оценок (8), (16) неравенство (7) принимает вид:

$$\left\|x_{i+1} - y_{i+1}\right\| \leq \varepsilon\lambda\left(\Delta + ML\right) \cdot e^{2\lambda L} + \varepsilon pM \cdot \left(e^{2\lambda L} + 1\right) = \varepsilon C.$$

Выберем в качестве $\varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right\}$.

Таким образом, справедливо утверждение теоремы (6), где

$$C = \lambda\left(\Delta + ML\right) \cdot e^{2\lambda L} + pM \cdot \left(e^{2\lambda L} + 1\right). \qquad (17)$$

Теорема доказана.

4. Усреднение систем дискретных уравнений с непериодическими правыми частями. Пусть в системе (1) функция $f\left(i, x_i, x_{i-1}\right)$ не является периодической. Выберем целочисленное значение $h\left(\varepsilon\right)$, обладающее свойствами

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h\ \left(\varepsilon\right) = +\infty, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon \cdot h\ \left(\varepsilon\right) = 0. \qquad (18)$$

Множество $I = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ ..., N\ \}$ разобьем на отрезки длиной $h\left(\varepsilon\right)$ точками деления $k \cdot h\left(\varepsilon\right),\ \ k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$, выбор значений k определим из условия $kh \leq \frac{L}{\varepsilon}$, поэтому $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon h}\right)$.

На множестве значений $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$ системе (1) поставим в соответствие усредненную систему вида:

$$w_{k+1} = w_k + \varepsilon h \cdot \overline{f}\left(w_k\right)\ , \qquad w_0 = x^0, \qquad (19)$$

$$y_i = w_k + \frac{\left(i - kh\right)\left(w_{k+1} - w_k\right)}{h}, \quad i \in \left[kh,\ \left(k+1\right)h\right), \qquad (20)$$

где

$$\overline{f}\left(w\right) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} f\left(\ j,\ w,\ w\right), \qquad (21)$$

Сходимость в (21) означает, что найдется монотонно убывающая функция $s\left(h\right)$ такая, что $\lim\limits_{h\to\infty} s\left(h\right) = 0$, и будет справедливо неравенство

$$\left\|\overline{f}\left(w\right) - \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} f\left(\ j,\ w,\ w\right)\right\| \leq s\left(h\right). \qquad (22)$$

Теорема 2. *Пусть в области* $Q = \{\ i \in I;\ \ x,\, y \in D\ \}$ *выполняются условия 1)-2) леммы и, кроме того:*

1) равномерно относительно $w \in D$ *и* q *существует предел (21);*

2) решение $w = w_k, \quad k \in I_k$ *системы (19) при* $w_0 = x^0 \in D' \subset D$ *вместе с* ρ*-окрестностью принадлежит области* D*.*

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0\,(\,\eta,\ L\,) > 0$*, что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и для любого* $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$*,* $N = E\,(L\varepsilon^{-1})$ *справедливо:*

$$\|x_i - y_i\| \le \eta, \tag{23}$$

где x_i *– решение системы (1),* y_i *– решение системы (19), (20),* $x_{-1} = x^1$*,* $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$*.*

Доказательство. Оценим разность $\|x_i - y_i\|$, где x_i – решение системы (1), y_i – решение системы (19), (20), $x_{-1} = x^1$, $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Из неравенства треугольника следует

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \le \|x_{i+1} - z_{i+1}\| + \|z_{i+1} - y_{i+1}\|\,, \tag{24}$$

где z_i – решение замороженной системы (2), $z_0 = x_0 = x^0 \in D' \subset D$.

По лемме существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любого $\varepsilon \le \varepsilon_1$ справедливо:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \le \varepsilon\lambda\,(\Delta + ML)\cdot e^{2\lambda L}. \tag{25}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части неравенства (24) для любого $k \in I_k$ и $i \in [kh,\ (k+1)\,h)$ получим

$$\|z_{i+1} - y_{i+1}\| \le \|z_{i+1} - z_{kh}\| + \|z_{kh} - y_{kh}\| + \|y_{kh} - y_{i+1}\|\,. \tag{26}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (26).

$$\|z_{i+1} - z_{kh}\| \le \varepsilon \sum_{j=kh}^{i} \|f\,(j, z_j, z_j)\| \le \varepsilon h \cdot M. \tag{27}$$

Оценим третье слагаемое в правой части неравенства (26). Ранее было получено, что при любом $k \in I_k$ для $i \in [kh,\ (k+1)\,h)$:

$$\|y_{i+1} - y_{kh}\| \le \varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{i} \left\|\overline{f}\,(y_{kh})\right\| \le \varepsilon h \cdot M. \tag{28}$$

В правой части неравенства (26) оценим второе слагаемое $\|z_{kp} - y_{kp}\|$ на промежутке $[kh,\ (k+1)\cdot h]$ для любого $k \in I_k$. Для этого соответствующие системы представим в виде

$$z_{(k+1)h} = z_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} f\,(j, z_j, z_j), \qquad y_{(k+1)h} = y_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{f}\,(y_{kh}).$$

Далее получим

$$\left\|z_{(k+1)h} - y_{(k+1)h}\right\| \le \|z_{kh} - y_{kh}\| + \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(f\,(j, z_j, z_j) - \overline{f}\,(y_{kh})\right) \right\| \le$$

$$\leq \|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|f(j,z_j,z_j)-f(j,y_{kh},y_{kh})\|+$$
$$+\varepsilon\left\|\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}f(j,y_{kh},y_{kh})-h\cdot\overline{f}(y_{kh})\right\|.$$

При выполнении условий теоремы и в силу соотношения (22) имеем

$$\left\|z_{(k+1)h}-y_{(k+1)h}\right\|\leq\|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|f(j,z_j,z_j)-f(j,z_{kh},z_{kh})\|+$$
$$+\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|f(j,z_{kh},z_{kh})-f(j,y_{kh},y_{kh})\|+\varepsilon h\cdot s(h)\leq$$
$$\leq\|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}2\|z_j-z_{kh}\|+\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}2\|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon h\cdot s(h)\leq$$
$$\leq\|z_{kh}-y_{kh}\|+2\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|z_j-z_{kh}\|+2\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon hs(h)\leq$$
$$\leq\|z_{kh}-y_{kh}\|+2\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\varepsilon h\cdot M+2\varepsilon\lambda h\cdot\|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon hs(h)\leq$$
$$\leq 2(\varepsilon h)^2\lambda M+\varepsilon hs(h)+(1+2\varepsilon h\lambda)\cdot\|z_{kh}-y_{kh}\|.$$

Итак, получили неравенство

$$\left\|z_{(k+1)h}-y_{(k+1)h}\right\|\leq(1+2\varepsilon h\lambda)\cdot\|z_{kh}-y_{kh}\|+2(\varepsilon h)^2\lambda M+\varepsilon hs(h). \qquad (29)$$

Получили неравенство вида (13), где введены обозначения $\beta_k=\|z_{kh}-y_{kh}\|$, $a=(1+2\varepsilon h\lambda)$, $b=2(\varepsilon h)^2\lambda M+\varepsilon hs(h)$, для которого справедливо соотношение (14). Для неравенства (29) получим

$$\begin{gathered}\left\|z_{(k+1)h}-y_{(k+1)h}\right\|\leq\left(2(\varepsilon h)^2\lambda M+\varepsilon hs(h)\right)\cdot\tfrac{(1+2\varepsilon h\lambda)^k-1}{1+2\varepsilon h\lambda-1}=\\=\varepsilon h(2\varepsilon h\lambda M+s(h))\cdot\tfrac{(1+2\varepsilon h\lambda)^k-1}{2\varepsilon h\lambda}=\\=\left(\varepsilon hM+\tfrac{s(h)}{2\lambda}\right)\cdot\left((1+2\varepsilon h\lambda)^k-1\right)\leq\left(\varepsilon hM+\tfrac{s(h)}{2\lambda}\right)\cdot\left(e^{2\lambda L}-1\right).\end{gathered} \qquad (30)$$

С учетом полученных оценок (27), (28), (30) неравенство (26) примет вид

$$\begin{gathered}\|z_{i+1}-y_{i+1}\|\leq 2\varepsilon h\cdot M+\left(\varepsilon hM+\tfrac{s(h)}{2\lambda}\right)\cdot\left(e^{2\lambda L}-1\right)\leq\\\leq\varepsilon h\cdot M\cdot\left(e^{2\lambda L}+1\right)+\tfrac{s(h)}{2\lambda}\left(e^{2\lambda L}-1\right).\end{gathered} \qquad (31)$$

По условию теоремы должно выполняться неравенство $\|z_{i+1}-y_{i+1}\|<\rho$, тогда в силу (18) и свойств функции $s(h)$ найдется такое ε_2, что для всех $0<\varepsilon\leq\varepsilon_2$ выполняется:

$$\|z_{i+1}-y_{i+1}\|\leq\varepsilon h\cdot M\cdot\left(e^{2\lambda L}+1\right)+\frac{s(h)}{2\lambda}\left(e^{2\lambda L}-1\right)<\rho.$$

С учетом полученных оценок (25), (31) неравенство (24) принимает вид

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leq \varepsilon\lambda\left(\Delta + ML\right) \cdot e^{2\lambda L} + \varepsilon h \cdot M \cdot \left(e^{2\lambda L} + 1\right) + \frac{s\left(h\right)}{2\lambda}\left(e^{2\lambda L} - 1\right).$$

Выберем в качестве $\varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\right\}$, тогда для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливо утверждение теоремы. Теорема доказана.

5. Практическая реализация метода усреднения дискретных уравнений с запаздыванием. Рассмотрим примеры применения метода усреднения при решении задач, описываемых системами дискретных уравнений с постоянным запаздыванием.

Пример 1. *Пусть движение объекта описывается системой дискретных уравнений с запаздыванием вида*

$$\begin{gathered} x_{i+1}^1 = x_i^1 + \varepsilon \cdot \left[\left(-9\cos^2 6ih + 6\sin 12ih\right) \cdot x_i^1 - \right. \\ \left. -x_{i-1}^1 + \left(12\cos^2 6ih + 4.5\sin 12ih\right) \cdot x_i^2\right], \end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered} x_{i+1}^2 = x_i^2 + \varepsilon \cdot \left[\left(-12\sin^2 6ih + 4.5\sin 12ih\right) \cdot x_i^1 - \right. \\ \left. - \left(9\sin^2 6ih + 6\sin 12ih\right) \cdot x_i^2 - x_{i-1}^2\right], \end{gathered} \tag{33}$$

где $x_i = \left(x_i^1,\, x_i^2\right) \in D \subset R^2$ *– фазовый вектор,* $\varepsilon > 0$ *– малый параметр,* $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$.

Функции, входящие в правые части уравнений системы, являются периодическими с периодом $p = E\left(\frac{\pi}{6h}\right)$ *и удовлетворяют условиям теоремы 1, поэтому для нахождения решения системы применим метод усреднения, описанный в пункте 3.*

Множество $I = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ ..., N\ \}$ *разобьем на отрезки длиной* $p = E\left(\frac{\pi}{6h}\right)$ *точками деления* kp, $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$, *выбор значений* k *определим из условия* $kp \leq \frac{L}{\varepsilon}$, *поэтому* $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon p}\right) = E\left(\frac{6Lh}{\varepsilon\pi}\right)$.

На множестве значений $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$ *системе (32), (33) поставим в соответствие усредненную систему вида (3), (4):*

$$w_{k+1}^1 = w_k^1 + \varepsilon p \cdot \left[-5,5 \cdot w_k^1 + 6 \cdot w_k^2\right], \tag{34}$$

$$w_{k+1}^2 = w_k^2 + \varepsilon p \cdot \left[-6 \cdot w_k^1 - 5,5 \cdot w_k^2\right], \tag{35}$$

$$y_i^1 = w_k^1 + \frac{(i - kp)\left(w_{k+1}^1 - w_k^1\right)}{p}, \quad y_i^2 = w_k^2 + \frac{(i - kp)\left(w_{k+1}^2 - w_k^2\right)}{p}, \tag{36}$$

$$i \in [kp,\ (k+1)\,p).$$

Численные решения x_i^1, x_i^2 *исходной системы (32), (33) и* y_i^1, y_i^2 *усредненной системы (34) – (36) позволили получить следующие оценки близости решений.*

$\varepsilon = 0.01$ $\max\left|x_i^1 - y_i^1\right| = 0.0876$, $\max\left|x_i^2 - y_i^2\right| = 0.0436$, $\|x_i - y_i\| = 0.1031$.

$\varepsilon = 0.005$ $\max\left|x_i^1 - y_i^1\right| = 0.0387$, $\max\left|x_i^2 - y_i^2\right| = 0.0202$, $\|x_i - y_i\| = 0.0479$.

$\varepsilon = 0.001$ $\max\left|x_i^1 - y_i^1\right| = 0.0073$, $\max\left|x_i^2 - y_i^2\right| = 0.0079$, $\|x_i - y_i\| = 0.0091$.

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод, что оценка близости решений имеет вид $\|x_i - y_i\| \leq C\varepsilon$, *что соответствует выводам теоремы 1.*

Пример 2. *Пусть движение объекта описывается дискретным уравнением с запаздыванием вида*

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot \left(-x_{i-1} + \frac{x_i}{1+i} \right). \tag{37}$$

Функция в правой части уравнения не является периодической, для нее выполняются условия теоремы 2, значит к уравнению (37) можно применить метод усреднения, описанный в пункте 4.

Выберем целочисленное значение шага $h(\varepsilon) = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$*, обладающее свойствами (18). Множество* $I = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ ...,N\ \}$ *разобьем на отрезки длиной* $h(\varepsilon)$ *точками деления* $k \cdot h(\varepsilon)$, $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$*, выбор значений* k *определим из условия* $kh \le \frac{L}{\varepsilon}$*, поэтому* $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon h}\right)$.

На множестве значений $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$ *системе (37) поставим в соответствие усредненное уравнение вида (19) – (21):*

$$w_{k+1} = w_k + \varepsilon h \cdot [-w_k], \quad y_i = w_k + \frac{(i-kh)(w_{k+1} - w_k)}{h}, \tag{38}$$

где $i \in [kh,\ (k+1)\,h)$.

Численные решения x_i*, исходного уравнения (37) и* y_i *усредненного уравнения (38) позволили получить следующие оценки близости решений*

$\varepsilon = 0.05 \quad \|x_i - y_i\| = 0.2113.$

$\varepsilon = 0.01 \quad \|x_i - y_i\| = 0.0668.$

$\varepsilon = 0.0001 \quad \|x_i - y_i\| = 0.0033.$

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод, что оценка близости решений имеет вид $\|x_i - y_i\| \le \eta$*, что соответствует выводам теоремы 2.*

Выводы. В работе рассмотрены дискретные уравнения и системы дискретных уравнений с запаздыванием как инструмент моделирования реальных процессов, точнее отображающий поведение системы, на которую влияет предыстория.

Методом исследования является метод усреднения систем дискретных уравнений, содержащих зависимость от малого параметра. Доказаны теоремы об усреднении систем с периодическими и непериодическими правыми частями дискретных уравнений.

Рассмотрены примеры применения метода усреднения и приведены оценки близости решений исходной и усредненной систем.

1. *Плотников В.А., Плотникова Л.И., Яровой А.Т.* Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления. // Нелинейные колебания. – 2004. – Т.7, № 2. – С. 241 – 254.
2. *Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л.* Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием. // Междун. научная конф. "Дифференциальные уравнения и их применение". – Ужгород, 2012. – С.42–43.

Получено 31.10.2012

УДК УДК 517.9

І. Ю. Король, І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ЄДИНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ЛІНІЙНИХ БАГАТОКРОКОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

The present paper proposes a unified approach, which allows to obtain all the well known multistep methods for solving the Cauchy problem for ordinary differential equations.

У роботі запропоновано єдиний підхід, який дозволяє одержати всі загальновідомі багатокрокові методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

1. Опис загального підходу. Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Як відомо [4], лінійні багатокрокові методи для розв'язанні задачі (1) будують на основі формули

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{i=-r}^{q} b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}), \tag{2}$$

де a_j, $j = \overline{0,p}$, b_i, $i = \overline{-r,q}$ – невідомі коефіцієнти. Якщо $b_{-1} = 0$, то метод (2) називається явним, а при $b_{-1} \neq 0$ – неявним.

В окремих випадках [2, 3] для знаходження коефіцієнтів a_j і b_i задачу (1) замінюють еквівалентним інтегральним співвідношенням

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt,$$

після чого підінтегральну функцію замінюють інтерполяційним многочленом Лагранжа або Ньютона. Однак, для одержання широкого спектру формул лінійних багатокрокових методів такий підхід є досить трудомісткий, або і зовсім непридатний. У зв'язку з цим формули лінійних багатокрокових методів будемо шукати у вигляді

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_{-1} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{q} b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}), \tag{3}$$

або

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_{-1} y'_{n+1} + h \sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}, \tag{4}$$

де $y'_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$, $y'_{n-i} = f(t_{n-i}, y_{n-i})$ – значення похідної шуканої функції, а невідомі коефіцієнти a_j і b_i знаходяться як розв'язки відповідних систем алгебраїчних рівнянь.

Нашою метою є вибір такого підходу до побудови систем лінійних неоднорідних рівнянь на основі формули (3), який дає можливість достатньо просто отримати широкий набір алгоритмів як явного, так і неявного типів. Зокрема, якщо покласти $b_{-1} = 0$, то одержуємо методи явного типу, а при $b_{-1} \neq 0$ – неявного.

Ідея запропонованого підходу полягає в наступному: якщо задача Коші (1) має точний розв'язок у вигляді полінома степені k

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_k t^k,$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – константи, то за допомогою формули (4) цей розв'язок можна знайти точно.

Невідомі коефіцієнти $a_{j1}, a_{j1+1}, \ldots, a_{j2},\ b_1, b_0, b_1, \ldots, b_q$ будемо шукати з умови [1], що формула (4) є точною для всіх поліноміальних розв'язків, степінь яких не перевищує k. За такі поліноми візьмемо поліноми вигляду:

$$y(t) = \frac{1}{h^0}(t_{n+1} - t)^0 = 1 \text{ при } m = 0, \quad y(t) = \frac{1}{h^m}(t_{n+1} - t)^m,\ m = 1, 2, \ldots, k; \quad (5)$$

$$y'(t) = 0, \text{при } m = 0; \qquad y'(t) = -\frac{m}{h^m}(t_{n+1} - t)^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots, k. \quad (6)$$

Для побудови таких систем формулу (4) запишемо у вигляді лінійної неоднорідної системи

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + h b_{-1} y'_{n+1} + h \sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i} = y_{n+1}, \quad (7)$$

Систему (7) запишемо у матрично-векторному вигляді

$$Cx = d, \quad (8)$$

де матриця C формується приєднанням до матриці A справа стовпця b і матриці B. Наявність стовпця b та кількість стовпців у матрицях A і B залежать від числового методу та його порядку точності. При цьому матриця C є квадратною.

Відмітимо, що формула (7) має чотири складові: перший доданок – сума, коефіцієнтам a_j якої будуть відповідати стовпці матриці A (один стовпець при $j1 = j2$); друга складова – доданок з коефіцієнтом b_{-1}, якому буде відповідати стовпець b загальної матриці C системи; третя складова – сума, коефіцієнтам b_i якої у побудованій алгебраїчній системі будуть відповідати стовпці матриці B, і четверта складова – права частина, якій буде відповідати стовпець d.

Використовуючи поліноми (5) побудуємо складові системи (7) для знаходження невідомих коефіцієнтів наступним чином: стовпець, який відповідає коефіцієнту a_j – це значення поліномів $y_m(t)$ у вузлі t_{n-j}:

$$\begin{gathered} \text{при } m = 0: \ y_0(t_{n-j}) = \tfrac{1}{h^0}(t_{n+1} - (t_n - jh))^0 = 1; \\ \text{при } m = 1, \ldots, k: \ y_m(t_{n-j}) = \tfrac{1}{h^m}(t_{n+1} - (t_n - jh))^m = \tfrac{1}{h^m}(h + jh)^m = (j+1)^m. \end{gathered} \quad (9)$$

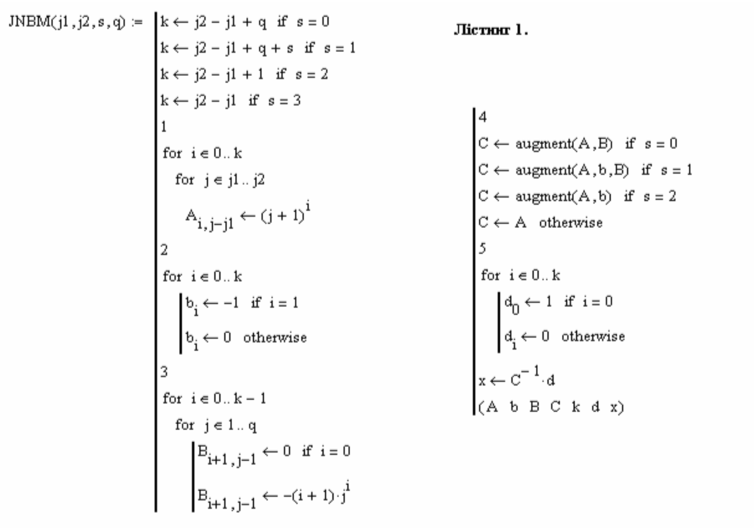
Аналогічно обчислюється матриця B, яка відповідає коефіцієнтам b_i, котрі є значеннями похідних $y'_m(t)$ поліномів (6) у вузлі t_{n-i}:

$$\begin{gathered}\text{при } m=0: \ y'_0(t_{n-i})=0;\\ \text{при } m=1,\ldots,k: \ y'_m(t_{n-i})=-\tfrac{m}{h^m}(t_{n+1}-(t_n-ih))^{m-1}=\\ =-\tfrac{m}{h^m}(h+ih)^{m-1}=-\tfrac{m}{h}(i+1)^{m-1}.\end{gathered} \tag{10}$$

З одержаних формул випливає, що похідна y'_{n+1}, що відповідає стовпцю b і функція y_{n+1}, що відповідає стовпцю d, приймають такі значення:

$$y'_{n+1}=y'_m(t_{n+1})=\begin{cases}-1 & \text{при } m=1,\\ 0 & \text{при } m\neq 1,\end{cases} \qquad y_{n+1}=y_m(t_{n+1})=\begin{cases}1 & \text{при } m=0,\\ 0 & \text{при } m\neq 0.\end{cases} \tag{11}$$

На лістингу 1 наведено програму, яка формує матрицю C і стовпець d. На початку програми визначається число k – порядок точності різницевої формули (4) числового методу. Воно залежить від кількості стовпців матриць A і B та наявності чи відсутності стовпця b; у циклі 1 за формулами (9) формуються стовпці матриці A; у циклі 2 за першою формулою (11) обчислюється стовпець b; у циклі 3 – за формулами (10) обчислюються стовпці матриці B. У частині 4 в залежності від значення параметра s формується матриця C. При $s = 0$ і $s = 3$ одержуємо матрицю C, яка відповідає одному з явних методів, а при $s = 1$ і $s = 2$ – неявним методам. Після цього за другою формулою (11) обчислюється вектор d і знаходиться розв'язок системи (8). Саме елементи вектора x і є коефіцієнтами розрахункових формул того чи іншого різницевого методу.



Лістинг 1.

```
JNBM(j1,j2,s,q) := | k ← j2 − j1 + q  if  s = 0
                   | k ← j2 − j1 + q + s  if  s = 1
                   | k ← j2 − j1 + 1  if  s = 2
                   | k ← j2 − j1  if  s = 3
                   | 1
                   | for  i ∈ 0..k
                   |   for  j ∈ j1..j2
                   |     A_{i,j−j1} ← (j + 1)^i
                   | 2
                   | for  i ∈ 0..k
                   |   | b_i ← −1  if  i = 1
                   |   | b_i ← 0  otherwise
                   | 3
                   | for  i ∈ 0..k − 1
                   |   for  j ∈ 1..q
                   |     | B_{i+1,j−1} ← 0  if  i = 0
                   |     | B_{i+1,j−1} ← −(i + 1)·j^i
                   | 4
                   | C ← augment(A,B)  if  s = 0
                   | C ← augment(A,b,B)  if  s = 1
                   | C ← augment(A,b)  if  s = 2
                   | C ← A  otherwise
                   | 5
                   | for  i ∈ 0..k
                   |   | d_0 ← 1  if  i = 0
                   |   | d_i ← 0  otherwise
                   | x ← C^{−1}·d
                   | (A  b  B  C  k  d  x)
```

Рис. 1. Текст програми

Проілюструємо як за допомогою наведеної програми одержуються різні загальновідомі методи.

2. Метод Адамса-Башфорта. Метод Адамса-Башфорта є явним багатокроковим методом, який одержується з формули (4) при різних значеннях q, за умови, що $j1 = j2 = 0$, $b_{-1} = 0$:

$$y_{n+1} = a_0 y_n + h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}.$$

Нижче детально проілюстровано процес формування та вигляд матриць A, B, C та вектора d для всіх значень k, вектори x, які є розв'язками системи (9) та розрахункові формули методу Адамса-Башфорта, які будуються на основі одержаних векторів x. Зауважимо, що $f_{n-i} = f(t_{n-i}, y(t_{n-i}))$. Локальні похибки одержаних формул можна знайти в [2].

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 1 \quad x^T = (1\ 1) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot f_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 2 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 2 \quad x^T = (1\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\tfrac{3}{2} f_n - \tfrac{1}{2} f_{n-1}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 3 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 3 \quad x^T = (1\ \tfrac{23}{12}\ -\tfrac{4}{3}\ \tfrac{5}{12}) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\tfrac{23}{12} \cdot f_n\ - \tfrac{4}{3} \cdot f_{n-1} +\ \tfrac{5}{12} \cdot f_{n-2}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -12 & -27 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -3 & -12 & -27 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 4 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 4 \quad x^T = (1\ \tfrac{55}{24}\ -\tfrac{59}{24}\ \tfrac{37}{24}\ -\tfrac{3}{8}) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\tfrac{55}{24} \cdot f_n - \tfrac{59}{24} \cdot f_{n-1} + \tfrac{37}{24} \cdot f_{n-2} - \tfrac{3}{8} \cdot f_{n-3}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \\ -3 & -12 & -27 & -48 \\ -4 & -32 & -108 & -256 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 1 & -3 & -12 & -27 & -48 \\ 1 & -4 & -32 & -108 & -256 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 5 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 5 \quad x^T = (1\ \tfrac{1901}{720}\ -\tfrac{1387}{360}\ \tfrac{109}{30}\ -\tfrac{637}{360}\ \tfrac{251}{720})$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\tfrac{1901}{720} \cdot f_n\ - \tfrac{1387}{360} \cdot f_{n-1} + \tfrac{109}{30} \cdot f_{n-2} -\ \tfrac{637}{360} \cdot f_{n-3} + \tfrac{251}{720} \cdot f_{n-4}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&-2&-4&-6&-8&-10\\1&-3&-12&-27&-48&-75\\1&-4&-32&-108&-256&-500\\1&-5&-80&-405&-1280&-3125\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

3. Метод Адамса-Мултона. Метод Адамса-Мултона є неявним багатокроковим методом, який одержується з формули (4) при різних значеннях q, за умови, що $j1 = j2 = 0$, $b_{-1} = -1$:

$$y_{n+1} = a_0 y_n + hb_{-1}y'_{n+1} + h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}.$$

Нижче, аналогічно, як і в попередньому випадку, наведено вигляд матриць A, B, C, стовпця b та правої частини d для $k = 5$; вектори x, які є розв'язками відповідних систем при $k = \overline{1,5}$ та формули методу, які будуються на основі одержаних векторів x. Локальні похибки одержаних формул можна знайти в [2].

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k{=}1 \quad x^T{=}(1\ 1) \quad y_{n+1}{=}y_n{+}h{\cdot}f_{n+1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 1 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k{=}2 \quad x^T{=}(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}) \quad y_{n+1}{=}y_n{+}h{\cdot}\big(\tfrac{1}{2}{\cdot}f_{n+1}\ {+}\tfrac{1}{2}{\cdot}f_n\big)$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 1 \quad q := 2 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k{=}3 \quad x^T{=}(1\ \tfrac{5}{12}\ \tfrac{2}{3}\ -\tfrac{1}{12}) \quad y_{n+1}{=}y_n{+}h{\cdot}\big(\tfrac{5}{12}{\cdot}f_{n+1}\ {+}\tfrac{2}{3}{\cdot}f_n{-}\ \tfrac{1}{12}{\cdot}f_{n-1}\big)$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 1 \quad q := 3 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k{=}4 \quad x^T{=}(1\ \tfrac{3}{8}\ \tfrac{19}{24}\ {-}\tfrac{5}{24}\ \tfrac{1}{24}) \quad y_{n+1}{=}y_n{+}h{\cdot}\big(\tfrac{3}{8}{\cdot}f_{n+1}{+}\tfrac{19}{24}{\cdot}f_n{-}\tfrac{5}{24}{\cdot}f_{n-1}{+}\tfrac{1}{24}{\cdot}f_{n-2}\big)$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 1 \quad q := 4 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k{=}5 \quad x^T{=}(1\ \tfrac{251}{720}\ \tfrac{323}{360}\ -\tfrac{11}{30}\ \tfrac{53}{360}\ -\tfrac{19}{720})$$

$$y_{n+1}{=}y_n{+}h{\cdot}\big(\tfrac{251}{720}{\cdot}f_{n+1}\ {+}\tfrac{323}{360}{\cdot}f_n{-}\ \tfrac{11}{30}{\cdot}f_{n-1}{+}\ \tfrac{53}{360}{\cdot}f_{n-2} - \tfrac{19}{720}{\cdot}f_{n-3}\big)$$

$$A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&-1&-1&-1\\-2&-4&-6&-8\\-3&-12&-27&-48\\-4&-32&-108&-256\\-5&-80&-405&-1280\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&0&-2&-4&-6&-8\\1&0&-3&-12&-27&-48\\1&0&-4&-32&-108&-256\\1&0&-5&-80&-405&-1280\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

4. Неявний метод Гіра. Формули неявного методу Гіра є найбільш використовуваними для інтегрування жорстких диференціальних рівнянь [2]. Формули Гіра одержуються з формули (4) за умови, що $j1 = 0$, $j2 \in \mathbb{N}$, $b_{-1} = 1$ і $q = 0$, а саме

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_{-1}y'_{n+1} + hb_0 y'_n.$$

Нижче наведено результати роботи програми.

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 1\ x^T = (1\ 1) y_{n+1} = y_n + h \cdot f_{n+1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 1 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 2 \quad x^T = \left(\tfrac{4}{3}\ -\tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\right) \ y_{n+1} = \tfrac{4}{3} \cdot y_n - \tfrac{1}{3} \cdot y_{n-1} + h \cdot \tfrac{2}{3} f_{n+1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 2 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 3 \quad x^T = \left(\tfrac{18}{11}\ -\tfrac{9}{11}\ \tfrac{2}{11}\ \tfrac{6}{11}\right) \ y_{n+1} = \tfrac{18}{11} \cdot y_n - \tfrac{9}{11} \cdot y_{n-1} + \tfrac{2}{11} \cdot y_{n-2} + h \cdot \tfrac{6}{11} \cdot f_{n+1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 3 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 4 \quad x^T = \left(\tfrac{48}{25}\ -\tfrac{36}{25}\ \tfrac{16}{25}\ -\tfrac{3}{25}\ \tfrac{12}{25}\right)$$

$$y_{n+1} = \tfrac{48}{25} \cdot y_n - \tfrac{36}{25} \cdot y_{n-1} + \tfrac{16}{25} \cdot y_{n-2} - \tfrac{3}{25} \cdot y_{n-3} + h \cdot \tfrac{12}{25} \cdot f_{n+1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 4 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 5 \quad x^T = \left(\tfrac{300}{170}\ -\tfrac{300}{137}\ \tfrac{200}{137}\ -\ \tfrac{75}{137}\ \tfrac{12}{137}\ \tfrac{60}{137}\right)$$

$$y_{n+1} = \tfrac{300}{170} \cdot y_n - \tfrac{300}{137} \cdot y_{n-1} + \tfrac{200}{137} \cdot y_{n-2} - \tfrac{75}{137} \cdot y_{n-3} + \tfrac{12}{137} \cdot y_{n-4} + h \cdot \tfrac{60}{137} \cdot f_{n+1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 0 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 0 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 0 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Явний метод Мілна. Відповідні формули одержуються з (4) за умови, що $j1 = j2 = q$:

$$y_{n+1} = a_{j1} y_{n-j1} + h \sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}.$$

Нижче наведено результати роботи програми для $k = 3$ і $k = 5$.

$$j1 := 3 \quad j2 := 3 \quad s = 0 \quad q := 3 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 3 \quad x^T = \left(1\ \tfrac{8}{3} - \tfrac{4}{3}\ \tfrac{8}{3}\right) \quad y_{n+1} = y_{n-3} + h \cdot \left(\tfrac{8}{3} \cdot f_n - \tfrac{4}{3} \cdot f_{n-1} + \tfrac{8}{3} \cdot f_{n-2}\right)$$

$$j1 := 5 \quad j2 := 5 \quad s = 0 \quad q := 5 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 5 \quad x^T = \left(1\ \tfrac{33}{10} - \tfrac{21}{5} - \tfrac{39}{5} - \tfrac{21}{5}\ \tfrac{33}{10}\right)$$

$$y_{n+1} = y_{n-5} + h \cdot \left(\tfrac{33}{10} \cdot f_n - \tfrac{21}{5} \cdot f_{n-1} + \tfrac{39}{5} \cdot f_{n-2} - \tfrac{21}{5} \cdot f_{n-3} + \tfrac{33}{10} \cdot f_{n-4}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}1\\6\\36\\216\\2961\\7776\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\-1&-1&-1&-1&-1\\-2&-4&-6&-8&-10\\-3&-12&-27&y-48&-75\\-4&-32&-108&-256&-500\\-5&-80&-405&-1280&-3125\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\6&-1&-1&-1&-1&-1\\36&-2&-4&-6&-8&-10\\216&-3&-12&-27&-48&-75\\1296&-4&-32&-108&-256&-500\\7776&-5&-80&-405&-1280&-3125\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

6. Неявний метод Мілна. Відповідні формули одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = j2 = s = 1$:

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + hb_{-1} y'_{n+1} + h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}, .$$

Результати роботи програми для $k = 3$ і $k = 5$ наведено нижче.

$$j1 := 1 \quad j2 := 1 \quad s = 1 \quad q := 2 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=3 \quad x^T=(1\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{4}{3}\ \tfrac{1}{3}) \quad y_{n+1}=y_{n-1}+h\cdot\left(\tfrac{1}{3}\cdot f_{n+1}+\tfrac{4}{3}\cdot f_n+\tfrac{1}{3}\cdot f_{n-1}\right)$$

$$j1 := 1 \quad j2 := 1 \quad s = 1 \quad q := 4 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=5 \quad x^T=(1\ \tfrac{29}{90}\ \tfrac{62}{45}\ \tfrac{4}{15}\ \tfrac{2}{45}\ \tfrac{1}{90})$$

$$y_{n+1}=y_{n-1}+h\cdot\left(\tfrac{29}{90}\cdot f_{n+1}+\tfrac{62}{45}\cdot f_n+\tfrac{4}{15}\cdot f_{n-1}+\tfrac{2}{45}\cdot f_{n-2}-\tfrac{1}{90}\cdot f_{n-3}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\\16\\32\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&-1&-1&-1\\-2&-4&-6&-8\\-3&-12&-27&-48\\-4&-32&-108&-256\\-5&-80&-405&-1280\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\2&-1&-1&-1&-1&-1\\4&0&-2&-4&-6&-8\\8&0&-3&-12&-27&-48\\16&0&-4&-32&-108&-256\\32&0&-5&-80&-405&-1280\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

7. Метод Ністрема. Формули методу Ністрема одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = j2 = 1$ і $s = 0$:

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}.$$

Результати роботи програми для різних порядків точності наведено нижче.

$$j1 := 1 \quad j2 := 1 \quad s = 0 \quad q := 2 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k{=}2 \quad x^T{=}(1\ 2\ 0) \quad y_{n+1}{=}y_{n-1}{+}\ 2h{\cdot}f_n$$

$$j1 := 1 \quad j2 := 1 \quad s = 0 \quad q := 3 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k{=}3 \quad x^T{=}(1\ \tfrac{7}{3}\ -\tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{3}) \quad y_{n+1}{=}y_{n-1}{+}h{\cdot}\left(\tfrac{7}{3}{\cdot}f_n - \tfrac{2}{3}{\cdot}f_{n-1} + \tfrac{1}{3}{\cdot}f_{n-2}\right)$$

$$j1 := 1 \quad j2 := 1 \quad s = 0 \quad q := 4 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k{=}4 \quad x^T{=}(1\ \tfrac{8}{3}\ {-}\tfrac{5}{3}\ \tfrac{4}{3}\ \tfrac{1}{3}) \quad y_{n+1}{=}y_{n-1}{+}h{\cdot}\left(\tfrac{8}{3}{\cdot}f_n{-}\tfrac{5}{3}{\cdot}f_{n-1}{+}\tfrac{4}{3}{\cdot}f_{n-2}{-}\ \tfrac{1}{3}{\cdot}f_{n-3}\right)$$

$$A{=}\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\\16\end{pmatrix} \quad B{=}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&-1&-1&-1\\-2&-4&-6&-8\\-3&-12&-27&-48\\-4&-32&-108&-256\end{pmatrix} \quad C{=}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&-1&-1&-1&-1\\4&2&-4&-6&-8\\8&-3&-12&-27&-48\\16&-4&-32&-108&-256\end{pmatrix} \quad d{=}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

8. Інтерполяційний метод Ерміта. Формули цього методу одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = 0$, $j2 \in \mathbb{N}$ і $s = 0$:

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_0 y'_n.$$

Результати роботи програми для $k = \overline{2,5}$ наведено нижче.

$$j1 := 0 \quad j2 := 1 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k{=}2 \quad x^T{=}(0\ 1\ 2) \quad y_{n+1}{=}y_{n-1}{+}\ 2\ {\cdot}h{\cdot}f_n$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 2 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k{=}3 \quad x^T{=}(-\tfrac{3}{2}\ 3 - \tfrac{1}{2}\ 3) \quad y_{n+1}{=}\ -\tfrac{3}{2}y_n{+}\ 3y_n - \tfrac{1}{2}y_{n-2} + 3{\cdot}h{\cdot}f_n$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 3 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k{=}4\ x^T{=}(-\tfrac{10}{3}\ 6\ \ -2\ \tfrac{1}{3}\ 4) \quad y_{n+1}{=}{-}\tfrac{10}{3}y_n{+}\ 6y_{n-1} - 2y_{n-2} + \tfrac{1}{3}y_{n-3} + 4{\cdot}h{\cdot}f_n$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 4 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k{=}5 \quad x^T{=}(-\tfrac{65}{12}\ 10\ \ -5\ \tfrac{5}{3}\ {-}\tfrac{1}{4}\ 5)$$
$$y_{n+1}{=}{-}\tfrac{65}{12}y_n{+}\ 10y_{n-1} - 5y_{n-2} + \tfrac{5}{3}y_{n-3} - \tfrac{1}{4}y_{n-4} + 5h{\cdot}f_n$$

$$A{=}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&4&9&16&25\\1&8&27&64&125\\1&16&81&256&625\\1&32&243&1024&3125\end{pmatrix} \quad B{=}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-3\\-4\\-5\end{pmatrix} \quad C{=}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&2&3&4&5&-1\\1&4&9&16&25&-2\\1&8&27&64&125&-3\\1&16&81&256&625&-4\\1&32&243&1024&3125&-5\end{pmatrix} \quad d{=}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

9. Екстраполяційний метод Ерміта. На відміну від усіх попередніх випадків, для даного методу матриця C складається тільки з матриці A. Формули цього методу одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = 0$, $j2 \in \mathbb{N}$ і $s = 3$:

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j}.$$

Результати роботи програми для $k = \overline{1,4}$ наведено нижче.

$$j1 := 0 \quad j2 := 1 \quad s = 3 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=1 \quad x^T = (2\ \ -1) \quad y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 2 \quad s = 3 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=2 \quad x^T = (3\ \ -3\ 1) \quad y_{n+1} = 3y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 3 \quad s = 3 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=3 \quad x^T = (4\ \ -6\ 4\ \ -1) \quad y_{n+1} = 4y_n - 6y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 4 \quad s = 3 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=4 \quad x^T = (5\ \ -10\ 10\ \ -5\ 1) \quad y_{n+1} = 5y_n - 10y_{n-1} + 10y_{n-2} - 5y_{n-3} + y_{n-4}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 5 \quad s = 3 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=5 \quad x^T = (6\ \ -15\ 20\ \ -15\ 6\ \ -1)$$

$$y_{n+1} = 6y_n - 15y_{n-1} + 20y_{n-2} - 15y_{n-3} + 6y_{n-4} - y_{n-5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 7776 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 0 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 0 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 0 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. *Фельдман Д.В., Петренко А.І., Дмитрієва О.А.* Чисельні методи в інформатиці. - К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
2. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд - во МГУ, 1990. – 336 с.
3. *Хайрер Э., Нёрстрем С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных диффе-ренциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. – 512 с.
4. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И.* Вычислительные методы. Т. II. Гл. ред. физ.-мат.лит. изд-ва "Наука 1977. – 400 с.

Одержано 18.10.2012

УДК 517.9

А.П. Креневич (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

АСИМПТОТИЧНА ВІДПОВІДНІСТЬ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

We obtained sufficient conditions of asymptotic matching of differential system with random perturbation in form $d(x - g(t, x)) = f(t, x)dt + d\xi(t)$ to ordinary differential system.

Для системи диференціальних рівнянь вигляду $d(x - g(t, x)) = f(t, x)dt + d\xi(t)$ наведено достатні умови асимптотичної відповідності розв'язків розв'язкам лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Вступ. Якісна теорія займає значне місце у загальних питаннях дослідження диференціальних рівнянь. Одним із найважливіших розділів цієї теорії є стійкість. Цій проблематиці присвячено безліч робіт, серед яких [1]. Робота присвячена дослідженню якісної поведінки диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної з випадковими збуреннями. Вона присвячена відшуканню системи звичайних диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків якої, подібна до поведінки розв'язків вихідної сингулярної системи. Це дозволяє перейти від асимптотичного дослідження вихідної системи до дослідження значно простішої системи. Згаданий підхід до дослідження асимптотичної поведінки вивчався багатьма авторами. Так, у [1] наведено теорему Левінсона, що встановлює достатні умови асимптотичної еквівалентності для систем звичайних диференціальних рівнянь. У роботах [2–4] це питання досліджено для стохастичних диференціальних систем, а у роботах [5, 6] для детермінованих диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної. У роботі отримано достатні умови асимптотичної відповідності в середньому квадратичному для вищезгаданого класу рівнянь до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Постановка задачі та асимптотична відповідність. Розглядається система диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної

$$d(x - g(t, x)) = (Ax + f(t, x))dt + d\xi(t), \tag{1}$$

де $t \geq 0, x \in \mathbf{R^d}$, з початковою умовою

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Тут A - стала матриця, f, g – неперервні за сукупністю змінних d-вимірні функції такі, що існують додатні сталі L_g, L_f, K, що для всіх $t \geq 0, x, y \in R^d$ виконуються нерівності

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq L_g|x - y|, \tag{3}$$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_f|x - y|, \tag{4}$$

$$|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq K(1 + |x|), \tag{5}$$

причому $L_g^2 < 1/2$, $\xi(t)$ – деякий неперервний випадковий процес, визначений на імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$, такий, що для всіх $t \geq 0$

$$E|\xi(t)|^2 < \infty.$$

Як відомо [7], за наведених вище умов розв'язок системи (1), що задовольняє початковій умові (2), існує і єдиний на додатній півосі.

Поруч із системою (1) розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$dy = Aydt, \tag{6}$$

де $t \geq 0, x \in \mathbf{R^d}$.

Нехай $X = X(t-\tau)$ матрицант системи (6), нормований в 0, тобто такий, що $X(0) = I$, де I – одинична матриця. Тоді розв'язок системи (1) можна представити в інтегральному вигляді, використовуючи матрицант системи (6).

Лема 1. *Розв'язок рівняння (1) з початковою умовою (2) задовольняє інтегральне рівняння*

$$\begin{gathered} x(t) = X(t)(x_0 - g(0,x_0)) + g(t,x(t)) + \\ + \int\limits_0^t X(t-s)Ag(s,x(s))ds + \int\limits_0^t X(t-s)f(s,x(s))ds + \int\limits_0^t X(t-s)d\xi(s). \end{gathered} \tag{7}$$

Доведення. Перепишемо рівність (7) у вигляді

$$\begin{gathered} x(t) - g(t,x(t)) = X(t)(x_0 - g(0,x_0)) + \\ + \int\limits_0^t X(t-s)Ag(s,x(s))ds + \int\limits_0^t X(t-s)f(s,x(s))ds + \int\limits_0^t X(t-s)d\xi(s) \end{gathered}$$

і обчислимо диференціал від обох частин останньої рівності.

$$\begin{gathered} d[x(t) + g(t,x(t))] = dX(t)(x_0 - g(0,x_0)) + \\ -d\left\{\int\limits_0^t X(t-s)Ag(s,x(s))ds\right\} + d\left\{\int\limits_0^t X(t-s)f(s,x(s))ds\right\} + \\ +d\left\{\int\limits_0^t X(t-s)d\xi(s)\right\} =: \sum_{i=1}^4 D_i. \end{gathered}$$

$$D_1 = dX(t)(x_0 + g(0,x_0)) = AX(t)(x_0 + g(0,x_0))dt.$$

$$\begin{gathered} D_2 = d\left\{X(t)\int\limits_0^t X(-s)Ag(s,x(s))ds\right\} = \\ = A\left\{\int\limits_0^t X(t-s)Ag(s,x(s))ds\right\}dt + Ag(t,x(t))dt. \end{gathered}$$

Аналогічно до попереднього, обчислимо

$$D_3 = A\left\{\int_0^t X(t,s)f(s,x(s))ds\right\}dt + f(t,x(t))dt.$$

$$D_4 = A\left\{\int_0^t X(t-s)d\xi(s)\right\}dt + d\xi(t).$$

Таким чином,

$$d[x(t)+g(t,x(t))] =$$

$$= A\left\{X(t)(x_0+g(0,x_0)) + g(t,x(t)) - \int_0^t X(t-s)Ag(s,x(s))ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t X(t-s)f(s,x(s))ds + \int_0^t X(t-s)d\xi(s)\right\}dt + f(t,x(t))dt + \xi(t).$$

Вираз у фігурних дужках – це $x(t)$. Лему доведено.

Означення 1. *Якщо кожному розв'язку $x(t)$ системи (1) відповідає розв'язок $x(t)$ системи (6), такий, що*

$$\lim_{t\to\infty} E|x(t)-y(t)|^2 = 0,$$

то система (1) називається асимптотично відповідною системі (6) у середньому квадратичному.

При доведенні результатів роботи неодноразово буде використовуватися оцінка, котру сформулюємо у вигляді леми.

Лема 2. *Нехай $f(t)$ – невід'ємна, неперервна на $[t_0,\infty)$ функція. Припустимо, що існує додатна стала K_f така, що*

$$\int_{t_0}^{\infty} f(\tau)d\tau \le K_f < \infty.$$

Тоді для довільного $\alpha > 0$

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)d\tau \le e^{-\frac{\alpha t}{2}}K_f + \int_{t/2}^{\infty} f(\tau)d\tau.$$

Доведення.

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t/2} e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)d\tau + \int_{t/2}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)d\tau \le$$

$$\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int\limits_{t_0}^{t/2} f(\tau)d\tau + \int\limits_{t/2}^{t} f(\tau)d\tau \leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} K_f + \int\limits_{t/2}^{\infty} f(\tau)d\tau.$$

Лему 2 доведено.

Теорема, наведена нижче, є узагальненням відомої теореми Левінсона у випадку диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, що збурені випадковим процесом.

Теорема 1. *Нехай розв'язки системи (6) обмежені на* $[0, \infty)$. *Нехай функції* $g(t, y)$, $f(t, y)$ *задовольняють умови*

$$|g(t, y)| \leq q(t)(1 + |y|), |f(t, y)| \leq h(t)(1 + |y|),$$

де $q(t), h(t)$ *– деякі невід'ємні функції, визначені на додатній півосі, і нехай для них виконуються співвідношення*

$$\int\limits_0^{\infty} q(t)dt = M_q < \infty, \int\limits_0^{\infty} h(t)dt = M_h < \infty, \tag{8}$$

причому $q(t) \to 0, t \to \infty$.

Нехай процес $\xi(t)$ *неперервно диференційований для всіх* $t \in [0, \infty)$, *причому*

$$\int\limits_0^{\infty} E|\dot{\xi}(t)|^2 dt = M_\xi < \infty, E\left(\int\limits_t^{\infty} |\dot{\xi}(\tau)| d\tau\right)^2 \to 0, t \to \infty.$$

Тоді система (1) асимптотично відповідна системі (6) у середньому квадратичному.

Доведення. Оскільки розв'язки системи (6) обмежені, то матрицант $X(t-\tau)$ можна представити у вигляді прямої суми

$$X(t-\tau) = X_1(t-\tau) + X_2(t-\tau), \tag{9}$$

причому

$$\|X_1(t)\| \leq e^{-\alpha t}, \|X_2(t)\| \leq b, t \geq 0, \tag{10}$$

де b, α – деякі додатні сталі.

Перепишемо систему (1), що задовольняє початкову умову (2) за допомогою матрицанта $X(t-\tau)$ у вигляді (7). Оцінивши математичне сповідання від квадрата лівої і правої частини цієї рівності, проводячи викладки, подібні до викладок роботи [2], та скориставшись лемою Гронуолла-Беллмана, можемо показати обмеженість на додатній півосі в середньому квадратичному всіх розв'язків системи (1):

$$E|x(t)|^2 \leq K(x_0).$$

Враховуючи (9), перепишемо рівність (7) у такому вигляді

$$\begin{gathered} x(t) = X(t)(x_0 - g(0,x_0)) + g(t,x(t)) + \\ + \int\limits_0^t X_1(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \int\limits_0^t X_2(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \\ + \int\limits_0^t X_1(t-\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_0^t X_2(t-\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau \\ + \int\limits_0^t X_1(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau + \int\limits_0^t X_2(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{11}$$

Використаємо еволюційну властивість матриціанта $X(t-\tau) = X(t-s)X(s-\tau)$ і перепишемо останню рівність у вигляді

$$\begin{gathered} x(t) = X(t)\Bigg\{ x_0 - g(0,x_0) + \int\limits_0^\infty X_2(-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \\ + \int\limits_0^\infty X_2(-\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_0^\infty X_2(-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau \Bigg\} + \\ + g(t,x(t)) + \int\limits_0^t X_1(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \\ + \int\limits_0^t X_1(t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau + \int\limits_0^t X_1(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau - \\ - \int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau - \\ - \int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau - \int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{12}$$

Кожному розв'язку $x(t)$ системи (1) з початковою умовою $x(0) = x_0$ поставимо у відповідність розв'язок $y(t)$ системи (6) з початковою умовою

$$\begin{gathered} y_0 = x_0 - g(0,x_0) + \int\limits_0^\infty X_2(-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \\ + \int\limits_0^\infty X_2(-\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_0^\infty X_2(-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{13}$$

Зауважимо, що всі невласні інтеграли в рівності (13) збігаються в середньому квадратичному. Це випливає з обмеженості в середньому квадратичному розв'язків $x(t)$ системи (1).

Для відповідних розв'язків $x(t)$ та $y(t)$ оцінимо математичне сподівання норми різниці. Очевидно, що

$$x(t) = X(t)x_0,$$

де $x(t_0)$ визначається формулою (13). Тоді з формули (12) маємо

$$
\begin{gathered}
E|x(t)-y(t)|^2 = E\left|g(t,x(t)) + \int\limits_0^t X_1(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \right. \\
+\int\limits_0^t X_1(t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau + \int\limits_0^t X_1(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau - \int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau - \\
\left. -\int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau - \int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau\right|^2 \leq \\
\leq 7E|g(t,x(t))|^2 + 7E\left|\int\limits_0^t X_1(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau\right|^2 + \\
+7E\left|\int\limits_0^t X_1(t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau\right|^2 + 7E\left|\int\limits_0^t X_1(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau\right|^2 + \\
+E\left|\int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau\right|^2 + \\
\leq 7E\left|\int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau\right|^2 + 7E\left|\int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau\right|^2 .
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Покажемо прямування до нуля кожного з доданків правої частини нерівності (14). Для третього і шостого доданків це показано у роботах [2,3]. Прямування до нуля другого і п'ятого доданків можна показати аналогічно, використавши умови, що накладено на функцію $g(t,x)$. Прямування до нуля першого доданку є очевидним фактом з урахуванням умов на функцію $g(t,x)$. Покажемо прямування до нуля четвертого і сьомого доданків. Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$
\begin{gathered}
E\left|\int\limits_0^t X_1(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau\right|^2 \leq E\left(\int\limits_0^t \|X_1(t-\tau)\||\dot{\xi}(\tau)|d\tau\right)^2 \leq \\
\leq \int\limits_0^t \|X_1(t-\tau)\|d\tau \int\limits_0^t \|X_1(t-\tau)\|E|\dot{\xi}(\tau)|^2 d\tau \leq \\
\leq \int\limits_0^\infty \|X_1(t-\tau)\|d\tau \int\limits_0^t e^{\alpha(t-\tau)}E|\dot{\xi}(\tau)|^2 d\tau
\end{gathered}
$$

Використовуючи лему 2, отримуємо, що права частина останньої нерівності прямує до нуля. Нарешті

$$
E\left|\int\limits_t^\infty X_2(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau\right|^2 \leq E\left(\int\limits_t^\infty \|X_2(t-\tau)\||\dot{\xi}(\tau)|d\tau\right)^2 \leq b^2 E\left(\int\limits_t^\infty |\dot{\xi}(\tau)|d\tau\right)^2 .
$$

Таким чином,

$$\lim_{t\to\infty} E|x(t)-y(t)|^2 = 0.$$

Висновки. У роботі розглянуто систему диференціальних рівнянь збурених випадковим процесом, не розв'язаних відносно похідної. Наведено достатні умови асимптотичної відповідності розв'язків такої системи розв'язкам лінійної диференціальної системи зі сталими коефіцієнтами. Ці результати стануть у нагоді при дослідженні якісної поведінки розв'язків вищезгаданих рівнянь, при дослідженні стійкості чи асимптотичної поведінки, а також можуть практично застосовуватися для конкретних задач, що виникають при моделюванні різних фізичних, біологічних чи економічних процесів.

1. Демидович Б.П.Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука. 1967. — 472 с.
2. Креневич А.П. Асимптотична еквівалентність розв'язків лінійних стохастичних систем Іто // Укр.мат.журн.—2006.—58, №10.—С.1368—1384.
3. Креневич А.П. Асимптотична еквівалентність розв'язків квазілінійних стохастичних систем Іто // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. —2006.- №1.—С.69-76.
4. Krenevych Andriy. Asymptotic Equivalence of the solutions of The Linear Stochastic Ito Equations in the Hilbert space // Theory of Stochastic Processes.—2007.—13(29), №1-2.—P.103—109.
5. Креневич А.П., Богоніс А.Р. Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки — 2009. — №1. — С. 55–59.
6. Креневич А.П., Могильова В.В. Асимптотичне дослідження сингулярних диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наукових праць. Вип. 454. Математика. — Чернівці: Рута, 2009. — С. 59 - 63.
7. Креневич А.П. Про розв'язання диференціального рівняння з випадковим збуренням не розв'язаного відносно похідної// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки —2012.- №3.—С.81-84.

Одержано 17.10.2012

УДК 517.9

Ю. В. Ловейкін, А. В. Сукретна (КНУ імені Тараса Шевченка)

ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ ДЛЯ ВІДНОВЛЕННЯ ТОЧОК ОБ'ЄКТУ У КОМП'ЮТЕРНОМУ ЗОРІ

A problem on object points restore in computer vision is considered. Three methods of object points restore by its projections on images are represented. Comparative analysis of presented methods is carried out. Error of each method of object points restore is estimated. Presented methods are illustrated by example.

У роботі розглядається задача про відновлення точок об'єкту в комп'ютерному зорі. Представлено три методи відновлення точок об'єкту по їх проекціях на зображеннях. Проведено порівняльний аналіз методів. Оцінено похибку кожного методу відновлення точок. На прикладі продемонстровано кожен із методів.

Вступ. На теперішній час комп'ютений зір активно розвивається і впроваджується у різноманітних електронних пристроях. Цей напрямок досліджень відноситься до теорії створення штучних систем, які отримують інформацію про об'єкти із зображення. Уявлення про задачі, що розглядаються, та деякі підходи до їх розв'язання можна отримати з [1–3].

Важливим напрямом комп'ютерного зору є відновлення тривимірних моделей об'єктів, що споглядаються (або тривимірних моделей сцени), найпростішою з яких є набір точок тривимірного простору. Ця модель є основою для більш складних, які можуть відтворювати повну тривимірну сцену. Із робіт, в яких розглядались методи відновлення точок об'єкту, відмітимо [4–6].

У роботі запропоновано три методи відновлення точок об'єкту, які базуються на варіаційних принципах, та проведено порівняльний аналіз розглянутих методів.

1. Постановка проблеми. Будемо розглядати задачу відновлення тривимірної точки за її проекціями на двох зображеннях, тобто задачу триангуляції. Для розв'язання цієї задачі потрібно знати проекції точки на кожному зображенні та положення зображення у просторі – центр та орієнтацію у просторі камери, яка це зображення утворює.

З теоретичної точки зору ця задача тривіальна – тривимірну точку можна одержати як перетин променів, кожен з яких утворений проекцією шуканої точки і центром камери. На практиці ж ані проекції шуканої точки, ані положення зображень не можуть бути визначені точно. У результаті промені, за допомогою яких можна було б відновити тривимірну точку, можуть взагалі не перетинатися.

Ми будемо розглядати методи відновлення тривимірної точки, які дозволяють регуляризувати цю задачу.

Нехай у просторі задана нерухома система координат, яку називатимемо глобальною системою координат. Також будемо розглядати локальні системи координат, кожна з яких пов'язана з одним із зображень (камерою): початок координат співпадає з центром камери, дві осі координат паралельні площині зображення, третя – перпендикулярна площині зображення і задає напрям зору камери. Площина зображення у локальній системі координат задається рівнянням $z = 1$ (рис. 1).

Уведемо деякі позначення: $P = (X, Y, Z)$ – шукана тривимірна точка з координатами (X, Y, Z) у глобальній системі координат; $p_i = (x_i, y_i, 1)$ – проекція шуканої точки на i-те зображення $(i = 1, 2)$ у локальній системі координат, пов'язаній з цим зображенням; C_i – оператор переходу із глобальної системи координат у локальну систему координат i-го зображення (C_i – афінний оператор, тобто $C_i p = R_i p + t_i$, де $R_i \in \mathrm{O}(3)$ – оператор повороту, $t_i \in \mathbb{R}^3$ – зсув центра камери); $\pi P = (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}, 1)$ – оператор центрального проектування; $\pi_{C_i} P = \pi(C_i P)$ – оператор проектування точки P, що задана у глобальній системі координат, на i-те зображення (див. рис. 1).

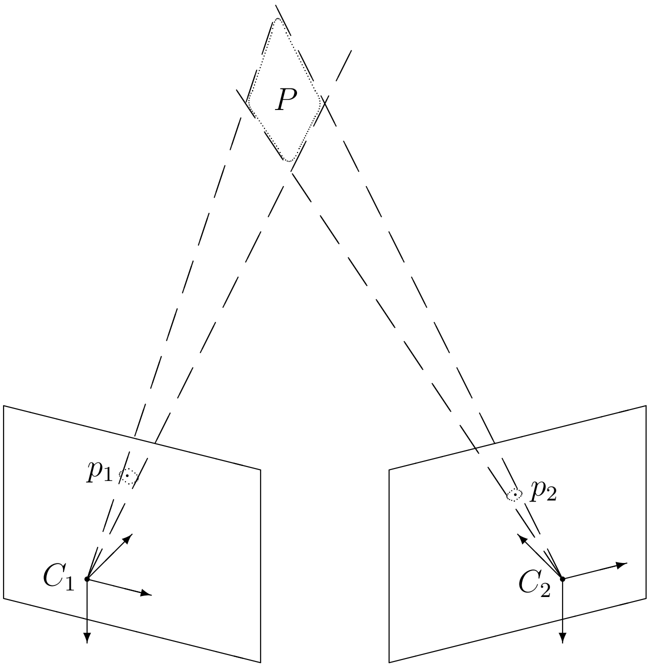


Рис. 1

2. Методи відтворення точок об'єкту. Розглянемо три методи відновлення точок об'єкту. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що локальна система координат, пов'язана з одним із зображень, співпадає з глобальною системою координат, тобто $C_1 = \mathrm{Id}$ – тотожній оператор. При цьому оператор $C_2 = (R|t)$ $(C_2 p = Rp + t)$ – деякий відмінний від тотожного.

Метод 1 *(прямий метод відновлення).* Цей метод полягає у проведенні променів через проекції точки і центри відповідних камер та вибір точки P так, щоб вона лежала найближче до проведених променів.

Критерієм якості в цьому підході відновлення точки об'єкту є: *точку P об'єкту вибираємо як середню точку спільного перпедикуляра двох мимобіжних прямих, кожна з яких проведена через одну проекцію точки і центр відповідної камери.*

Задача відшукання точки P має вигляд

$$P = (1 - \lambda)\alpha p_1 + \lambda C_2^{-1}(\beta p_2),$$

де $\lambda \in [0, 1]$, і величини $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ визначаються із варіаційної задачі

$$\begin{cases} f(\alpha, \beta) = \|C_2(\alpha p_1) - \beta p_2\|^2 \to \inf, \\ \alpha, \beta > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Задача (1) дозволяє знайти кінці спільного перпендикуляра між мимобіжними прямими. Коефіцієнт λ можна брати будь-яким в межах відрізку $[0,1]$. Ми, для визначеності, візьмемо $\lambda = \frac{1}{2}$.

Функція $f(\alpha,\beta)$ є неперервною опуклою функцією. Умова додатності величин α і β виключає можливість розташування точки P "позаду" камери, у такому разі задача не має розв'язку.

Теорема 1. *Якщо розв'язки лінійної алгебраїчної системи*

$$\begin{cases} \alpha\|p_1\|^2 - \beta Rp_1 \cdot p_2 = -t \cdot Rp_1, \\ \alpha Rp_1 \cdot p_2 - \beta\|p_2\|^2 = -t \cdot p_2, \end{cases} \tag{2}$$

де "$\cdot$" – стандартний скалярний добуток, додатні, вони співпадають з розв'язками задачі (1)*. У протилежному випадку задача* (1) *розв'язків не має.*

Без умови додатності α і β система (2) має єдиний розв'язок при виконанні нерівності $\|p_1\|\|p_2\| - Rp_1 \cdot p_2 \neq 0$, яка означає, що прямі не є паралельними.

Доведення теореми 1 легко одержується з необхідних і достатніх умов локального екстремуму.

Метод 2 *(метод напівпроектування).* У цьому методі критерієм якості для відшукання точки P є: *точку P шукаємо на промені, проведеному через одну проекцію і центр відповідної камери, таку, щоб проекція точки P на друге зображення найменше відхилялась від заданої проекції на цьому зображенні.*

Задача знаходження точки P має вигляд:

$$P = \alpha p_1,$$

де α визначається як розв'язок задачі

$$\begin{cases} f(\alpha) = \|\pi_{C_2}(\alpha p_1) - p_2\|^2 \to \inf, \\ \alpha > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 2. *Задача* (3) *еквівалентна задачі*

$$\begin{cases} g(\alpha) = \|C_2(\alpha p_1) - (C_2(\alpha p_1))_z p_2\|^2 \to \inf, \\ \alpha > 0, \end{cases} \tag{4}$$

де індекс z означає останню координату вектора.

Неважко впевнитись, що розв'язки задач (3) і (4) шукаються з одного і того ж лінійного алгебаїчного рівняння

$$\alpha\|Rp_1 - (Rp_1)_z p_2\|^2 + \big(t - t_z p_2\big) \cdot \big(Rp_1 - (Rp_1)_z p_2\big) = 0.$$

Метод 3 *(метод проектування).* Критерій якості у цьому методі такий: *точку P вибираємо так, щоб сума квадратів відстаней від проекцій точки P на зображення до заданих проекцій на цих зображеннях була мінімальна.*

Точка P шукається із задачі

$$f(P) = \|\pi P - p_1\|^2 + \|\pi_{C_2} P - p_2\|^2 \to \inf. \tag{5}$$

Неважко впевнитись, що задача (5) еквівалентна задачі

$$f(P) = \|P - P_z p_1\|^2 + \|C_2 P - (C_2 P)_z p_2\|^2 \to \inf. \tag{6}$$

Оператор $C_2 = (R|t)$ – афінний $(C_2 p = Rp + t)$, позначимо $R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{pmatrix}$. Також уведемо позначення: $a_1 = r_1 - r_7 x_2$, $a_2 = r_4 - r_7 y_2$, $a_3 = r_2 - r_8 x_2$, $a_4 = r_5 - r_8 y_2$, $a_5 = r_3 - r_9 x_2$, $a_6 = r_6 - r_9 y_2$, $b_1 = x_2 t_z - t_x$, $b_2 = y_2 t_z - t_y$.

Теорема 3. *Якщо система*

$$\begin{aligned}
(1 + a_1^2 + a_2^2)X + (a_1 a_3 + a_2 a_4)Y + (a_1 a_5 + a_2 a_6 - x_1)Z &= b_1 a_1 + b_2 a_2, \\
(a_1 a_3 + a_2 a_4)X + (1 + a_3^2 + a_4^2)Y + (a_3 a_5 + a_4 a_6 - y_1)Z &= b_1 a_3 + b_2 a_4, \\
(x_1 + a_1 a_5 + a_2 a_6)X + (y_1 + a_3 a_5 + a_4 a_6)Y + (a_5^2 + a_6^2 - x_1^2 - y_1^2)Z &= b_1 a_5 + b_2 a_6
\end{aligned}$$

відносно $P = (X, Y, Z)$ *має єдиний розв'язок, він є розв'язком задачі* (6). *У протилежному випадку задача* (6) *розв'язку не має.*

Доведення теореми одержується з використанням необхідних і достатніх умов локального екстремуму.

3. Приклад застосування представлених методів. Застосуємо методи 1–3 до конкретного прикладу. Розглянемо два зображення, які тільки зсунуті одне відносно іншого на відстань 0.05, повороту немає. Така відстань між зображеннями є природною. Координати точок на зображеннях можуть змінюватись у межах $[-0.5, 0.5]$ по осі x, $[-0.375, 0.375]$ по осі y. На кожному зображенні задані проекції точок, які лежать на прямій перпендикулярній до зображень. У результаті підрахунків були одержані результати, які наведені у таблиці.

Справжні точки P	**Метод 1**		**Метод 2**		**Метод 3**	
	Точки P	Похибка	Точки P	Похибка	Точки P	Похибка
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\1.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019998\\0.010000\\1.499948\end{pmatrix}$	5.211904e-5	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\1.500000\end{pmatrix}$	1.192275e-7	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\1.500000\end{pmatrix}$	1.192275e-7
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\3.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019999\\0.010000\\3.499920\end{pmatrix}$	7.963874e-5	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\3.500000\end{pmatrix}$	2.384277e-7	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\3.499999\end{pmatrix}$	9.537052e-7
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\5.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019953\\0.009990\\5.494241\end{pmatrix}$	5.759442e-3	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\5.500000\end{pmatrix}$	4.768417e-7	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\5.500000\end{pmatrix}$	4.768517e-7
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\7.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019979\\0.009995\\7.496522\end{pmatrix}$	3.477639e-3	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\7.500000\end{pmatrix}$	4.768417e-7	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\7.499999\end{pmatrix}$	1.430514e-6
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\9.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019879\\0.009973\\9.474371\end{pmatrix}$	2.562935e-2	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\9.500000\end{pmatrix}$	4.768417e-7	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\9.499999\end{pmatrix}$	9.536761e-7
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\11.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019880\\0.009973\\11.469248\end{pmatrix}$	3.075243e-2	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\11.499999\end{pmatrix}$	9.536743e-7	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\11.499999\end{pmatrix}$	9.536766e-7
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\13.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.020027\\0.010006\\13.508226\end{pmatrix}$	8.226443e-3	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\13.499999\end{pmatrix}$	9.536766e-7	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\13.500000\end{pmatrix}$	1.862645e-9
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\15.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019637\\0.009919\\15.375013\end{pmatrix}$	1.249872e-1	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\15.500000\end{pmatrix}$	3.569312e-7	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\15.500001\end{pmatrix}$	9.536761e-7
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\17.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019660\\0.009924\\17.367718\end{pmatrix}$	1.322827e-1	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\17.499998\end{pmatrix}$	1.907350e-6	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\17.500000\end{pmatrix}$	3.725290e-9

$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\19.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.020124\\0.010028\\19.553869\end{pmatrix}$	5.386940e-2	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\19.499998\end{pmatrix}$	1.907350e-6	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\19.500000\end{pmatrix}$	3.725290e-9
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\21.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019382\\0.009863\\21.204769\end{pmatrix}$	2.952316e-1	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\21.500000\end{pmatrix}$	1.192275e-7	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\21.499998\end{pmatrix}$	1.907352e-6
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\23.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019970\\0.009993\\23.484341\end{pmatrix}$	1.565936e-2	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\23.500002\end{pmatrix}$	1.907350e-6	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\23.499998\end{pmatrix}$	1.907358e-6
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\25.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.018979\\0.009773\\24.921595\end{pmatrix}$	5.784063e-1	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\25.499998\end{pmatrix}$	1.907350e-6	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\25.500000\end{pmatrix}$	3.839941e-9
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\27.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.021218\\0.010271\\28.244469\end{pmatrix}$	7.444697e-1	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\27.500000\end{pmatrix}$	2.082501e-9	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\27.500000\end{pmatrix}$	3.725290e-9
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\29.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.018377\\0.009639\\28.435957\end{pmatrix}$	1.064044	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\29.499998\end{pmatrix}$	1.907349e-6	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\29.500000\end{pmatrix}$	3.259084e-9
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\31.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.022554\\0.010568\\33.288132\end{pmatrix}$	1.788134	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\31.500000\end{pmatrix}$	2.082501e-9	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\31.499998\end{pmatrix}$	1.907350e-6
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\33.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019259\\0.009835\\32.948181\end{pmatrix}$	5.518194e-1	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\33.500004\end{pmatrix}$	3.814698e-6	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\33.500008\end{pmatrix}$	7.629403e-6
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\35.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.021802\\0.010400\\36.921692\end{pmatrix}$	1.421693	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\35.500004\end{pmatrix}$	3.814698e-6	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\35.500008\end{pmatrix}$	7.629395e-6
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\37.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.019739\\0.009942\\37.282703\end{pmatrix}$	2.172968e-1	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\37.500000\end{pmatrix}$	2.082501e-9	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\37.499992\end{pmatrix}$	7.629395e-6
$\begin{pmatrix}0.02\\0.01\\39.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.018204\\0.009601\\37.923180\end{pmatrix}$	1.576821	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\39.500000\end{pmatrix}$	2.082501e-9	$\begin{pmatrix}0.020000\\0.010000\\39.500004\end{pmatrix}$	3.814698e-6

При віддалені точки P від зображень похибка у другому та третьому методах змінюється несуттєво. У першому методі при віддалені точки P похибка значно зростає. Це пояснюється тим, що при малих кутах між променями обумовленість матриці системи (2) значно погіршується, що негативно впливає на точність розв'язку цієї системи.

Висновки. У роботі представлено три методи відновлення точок об'єкту за проекціями цих точок, заданих на двох зображеннях. Ці методи базуються на варіаційних принципах, що дозволяє регуляризувати задачу відновлення точок об'єкту при неточних вхідних даних. На основі ілюстративного прикладу проведено порівняльний аналіз представлених методів.

1. *Hartley R., Zisserman A.* Multiply view geometry in computer vision. – Cambrige: Cambrige University Press, 2003. – 655 p.
2. *Szeliski R.* Computer vision. Algorithms and Applications. – Springer, 2011. – 812 p.
3. *Шапиро Л., Стокман Дж.* Компьютерное зрение. – М.: БИНОМ, 2006. – 752 с.
4. *Longuet-Higgins H.C.* A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections // Nature. – 1981. – V. 293. – P. 133–135.
5. *Lee S., Park F.C.* Cyclic optimization algorithms for simultaneous structure and motion recovery in computer vision // Engineering Optimization. – 2008. – V. 40, No 5. – P. 403 – 419.
6. *Kamberova G., Bajcsy R.* Precision in 3-D points reconstructed from stereo. – Philadelphia: University of Pennsylvania, 1997. – 14 p.

Одержано 01.10.2012

УДК 517.956.4

В. М. Лучко, М. І. Матійчук, В. С. Лучко (Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

Розглянуто задачу Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння вищого порядку по t зі змінним символом. Для такої задачі методом Е. Леві побудовано фундаментальну систему розв'язків та вивчено її властивості.

The problem of Cauchy is considered for parabolic pseudodifferential equation of higher order for t with variable character. For such problem by the method of E. Levi the fundamental system of solution is constructed and its properties are studied.

Дослідження параболічного псевдодиференціального рівняння з сталим однорідним символом було розпочато С.Д. Ейдельманом і Я.М. Дрінем в [1]. Для такого символа фундаментальний розв'язок задачі Коші вираховується за допомогою перетворення Фур'є. М.В. Федорюком у праці [2] була знайдена точна асимптотика фундаментального розв'язку при $|x| \to \infty$, яка виявилася не експоненціальною, як для диференціальних рівнянь параболічного типу [3], а степеневою. Для побудови фундаментального розв'язку задачі Коші у загальному випадку змінного символа були зроблені спроби використати класичний метод Е. Леві. Перші результати в цьому напрямку отримані в працях С.Д. Ейдельмана і Я.М. Дріня [4], де побудований параметрикс – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння з "замороженими"коефіцієнтами і доведена розв'язність інтегрального рівняння, яке визначає фундаментальний розв'язок. У 1988 році вийшла праця А.Н. Кочубея [5], яка присвячена побудові і дослідженню фундаментального розв'язку задачі Коші, де псевдодиференціальні оператори трактуються як гіперсингулярні інтеграли.

У шарі $\Pi_T = \{(t,x)|t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$ розглядається рівняння довільного порядку

$$L(t,x,A,D_t)u(t,x) \equiv \frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m} - Au(t,x) = 0 \tag{1}$$

з початковими умовами

$$\left.\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

тут

$$Au(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}\left(\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)\frac{d^{k_0}V}{dt^{k_0}}\right), \quad V(t,\sigma) = F_{x\to\sigma}u(t,x),$$

$\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \geq 1$, $k_0 < m$, $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^m$ – відомі функції, що допускають перетворення Фур'є.

Метою даної роботи є побудова фундаментальної системи розв'язків (ф.с.р.) $\Gamma(t,x,\tau,\xi) = \{\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)\}_{j=1}^m$

$$L(t,x,A,D_t)\Gamma_j(t,x,\tau,\xi) = 0, \tag{3}$$

$$
\begin{gathered}
\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)|_{t=\tau}=0,\\
\dots\\
\tfrac{\partial^{j-2}\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)}{\partial t^{j-2}}|_{t=\tau}=0,\\
\tfrac{\partial^{j-1}\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)}{\partial t^{j-1}}|_{t=\tau}=\delta(x-\xi),\\
\tfrac{\partial^{j}\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)}{\partial t^{j}}|_{t=\tau}=0,\\
\dots\\
\tfrac{\partial^{m-1}\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)}{\partial t^{m-1}}|_{t=0}=0,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

$\delta(t)$ – дельта функція Дірака.

Функції $\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)$ можуть бути побудовані по методу Е. Леві, який полягає в тому, що вони шукаються у вигляді суми двох доданків: головного доданку, який має потрібну особливість при $t=\tau$, $x=\xi$, і деякого додаткового доданку.

В якості головного доданка вибираються функції $Z_j(t-\tau,x-\xi,\xi,\tau)$ – компоненти ф.с.р. рівняння (1), в яке входить псевдодиференціальна операція (п.д.о.) з символами $P_{\nu k_0}(\tau,\xi,\sigma)$, зафіксовані в точці (τ,ξ). Другий доданок шукається у вигляді інтегрального оператора з ядром Z_j, щільність якого визначається з інтегрального рівняння.

Нехай символи $P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)$ задовольняють умовам:

1) рівномірно по (t,x) символи $P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)$ однорідні по аргументу σ степеня ν, тобто виконується співвідношення $P_{\nu k_0}(t,x,\mu\sigma)=\mu^{\nu}P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)$, $\mu>0$.

2) $P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)$ мають N неперервних похідних по σ при $\sigma\neq 0$, причому

$$|D^{x}_{\sigma}P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)|\le C_N|\sigma|^{\gamma-|\chi|},$$

$$|D^{x}_{\sigma}[P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)-P_{\nu k_0}(\tau,y,\sigma)]|\le C_N\left(|t-\tau|^{\frac{\lambda}{\gamma}}+|x+y|^{\lambda}\right)|\sigma|^{\gamma-|\chi|},$$

для всіх $|\chi|\le N$, $\sigma,x,y\in\mathbb{R}^n$, $(\sigma\neq 0)$, $t,\tau\in[0,T]$, $(\lambda\in(0,1)$ – константа).

Означення 1. *Рівняння (1) будемо називати рівномірно параболічним в області* Π_T*, якщо для довільної точки* (t,x) *дійсні частини* λ *- коренів рівняння*

$$\lambda^m-\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma}P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)\lambda^{k_0}=0 \tag{5}$$

задовольняють нерівність

$$Re\lambda_j(t,x,\sigma)\le -a_0|\sigma|^{\gamma},$$

$a_0>0$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $j=\overline{1,m}$.

Спочатку побудуємо функції $Z_j(t–\tau,x–\xi,\tau,\xi)$. Зафіксуємо символ $P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)$ в точці $t=\beta$, $x=p$ і розглянемо задачу про знаходження обмеженого розв'язку псевдодиференціального рівняння (п. д. р.) зі сталим символом

$$L(\beta,p,A,D_t)u(t,x)=0 \tag{6}$$

і початковими умовами (4). В образах Фур'є задача (6), (2) набуде вигляду

$$\frac{d^m v(t,\sigma)}{dt^m}=\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma}P_{\nu k_0}(\beta,p,\sigma)\frac{d^{k_0}v(t,\sigma)}{dt^{k_0}}, \tag{7}$$

$$\left.\frac{d^{j-1}v(t,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=0} = \widetilde{\varphi}_j(\sigma), \quad j = \overline{1,m}, \tag{8}$$

а її розв'язком є функція

$$v(t,\sigma) = \sum_{j=1}^{m} K_j(\beta,p,t,\sigma)\widetilde{\varphi}_j(\sigma),$$

де $\widetilde{\varphi}_j(\sigma) \equiv F_{x\to\sigma}(\varphi_j(x)) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,x)}\varphi(\xi)d\xi$, при цьому необхідно припускати, що перетворення Фур'є функцій $u(t,x)$ і $\varphi_j(x)$ існує. Отже,

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-\xi,\sigma)}K_j(\beta,p,t,\sigma)d\sigma\right)\varphi_j(\xi)d\xi.$$

Позначимо

$$Z_j(t-\tau,x-\xi,\beta,p) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-\xi,\sigma)}K_j(\beta,p,t,\sigma)d\sigma. \tag{9}$$

Функції $K_j(\beta,p,t,\sigma)$ є розв'язками задачі Коші

$$\frac{d^m K_j}{dt^m} = \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\beta,p,\sigma)\frac{d^{k_0}K_j}{dt^{k_0}},$$

$$\left.\frac{d^{l-1}K_j}{dt^{l-1}}\right|_{t=0} = \delta_{l,j},$$

де $\delta_{l,j} = \begin{cases} 0, l \neq j, \\ 1, l = j. \end{cases}$

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння (7) $P_{\nu k_0}(\beta,p,\sigma)$ мають N неперервних похідних по σ при $\sigma \neq 0$ та виконуються умови 1), 2), тоді корені характеристичного рівняння (5) є однорідними функціями аргументу σ степеня γ і для їх похідних справедлива нерівність*

$$|D_\sigma^l \lambda_j(\beta,p,\sigma)| \leq C_N|\sigma|^{\gamma-|l|}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{10}$$

де C_N не залежить від β, p.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, тоді для функцій $\{K_j(\beta,p,t,\sigma)\}_{j=1}^m$ справедливі такі зображення*

$$K_j(\beta,p,t,\sigma) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{t^{j-1}}{(j+1)!}\frac{\widetilde{W}_j^*(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)}{W(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)}, \tag{11}$$

у випадку $j < m$, та при $j = m$

$$K_m(\beta,p,t,\sigma) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{t^{m-1}}{(m)!}\frac{\widetilde{W}_m(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)}{W(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)} + \frac{t^{m-1}}{(m+1)!}\frac{\widetilde{W}_m^*(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)}{W(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)}, \tag{12}$$

де введено такі позначення

$$\widetilde{W}_m^*(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 \\ \lambda_1(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ ... & ... & ... \\ \lambda_1^{j-2}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{j-2}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ \lambda_1^{j+1}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)h_{1,j+1}(\lambda_1) & ... & \lambda_m^{j+1}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)h_{m,j+1}(\lambda_m) \\ \lambda_1^{j}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{j}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ ... & ... & ... \\ \lambda_1^{m-1}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{m-1}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{W}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & \lambda_2(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{m-2}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & \lambda_2^{m-2}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{m-2}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ \lambda_1^{m}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & \lambda_2^{m}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{m}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \end{vmatrix},$$

$$W(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 \\ \lambda_1(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ ... & ... & ... \\ \lambda_1^{m-1}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{m-1}(\beta, p, t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \end{vmatrix},$$

$$h_{l,j}(a_l) = j!a_l^{-j}\left(e^{a_l} - 1 - a_l - \frac{a_l^2}{2!} - ... - \frac{a_l^{j-1}}{(j-1)!}\right).$$

Нехай виконуються умови 1), 2) з $k_0\gamma + \nu = m\gamma$, $N \geq 2n + [\gamma] + 1$, то для функцій $\{Z_j(t, x, \beta, p)\}_{j=1}^m$ справджуються оцінки рівномірно по параметрам β, p

$$|Z_j(t, x, \beta, p)| \leq C\frac{t^j}{(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|)^{n+\gamma}}, \tag{13}$$

$$|D_t^{k_0} Z_j(t, x, \beta, p)| \leq C\frac{t^{j-1}}{(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|)^{n+\gamma k_0}}, \quad k_0 \geq 1, \tag{14}$$

$$|Z_j(t, x, \beta, p_1) - Z_j(t, x, \beta, p_2)| \leq C \cdot |p_1 - p_2|^\lambda \frac{t^j}{(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|)^{n+\gamma}}, \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} Z_j(t, x, \beta, p_1) - \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} Z_j(t, x, \beta, p_2)\right| \leq C \cdot |p_1 - p_2|^\lambda \frac{t^{j-1}}{(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|)^{n+2\gamma k_0}}. \tag{16}$$

Розглянемо задачу Коші (1)–(2). Будемо припускати, що функції $\{\varphi_j\}_{i=1}^m$ неперервні і обмежені. Під розв'язком задачі (1)–(2) будемо розуміти обмежену функцію $u(t, x)$, неперервну на $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ за сукупністю змінних, яка задовольняє рівняння (1) і початкові умови (2).

Теорема 3. *Розв'язок задачі Коші (1)–(2) існує і записується у вигляді*

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^m \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_j(t, x, 0, \xi)\varphi_j(\xi)d\xi, \tag{17}$$

де ф.с.р. $\{\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)\}_{j=1}^m$, $x,\xi\in\mathbb{R}^n$, $0\le t\le T$ *має вигляд*

$$\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)=Z_j(t,x,\tau,\xi)+W_j(t,x,\tau,\xi), \tag{18}$$

$$|W_j(t,x,\tau,\xi)|\le C\frac{t^{\frac{\gamma_j+\lambda}{\gamma}}}{(t^{\frac{1}{\gamma}}+|x|)^{n+\gamma}}, \tag{19}$$

а для Z_j *мають місце оцінки (13)–(16).*

Доведення. У відповідності з звичайною схемою методу Леві, компоненти фундаментальної системи розв'язків задачі Коші шукаються у вигляді (18), де

$$W_j(t,x,\tau,\xi)=\int\limits_\tau^t d\mu\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_j(t-\mu,x-\eta,\mu,\eta)\Phi_j(\mu,\eta,\tau,\xi)d\eta,$$

а функції Φ_j визначаються із інтегрального рівняння

$$\Phi_j(t,x,\tau,\xi)=P_j(t,x,\tau,\xi)+\int\limits_\tau^t d\mu\int\limits_{\mathbb{R}^n} P_j(t,x,\mu,\eta)\Phi_j(\mu,\eta,\tau,\xi)d\eta, \tag{19}$$

у якому

$$P_j(t,x,\tau,\xi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma}[P_{\nu k_0}(\tau,\xi,\sigma)-$$

$$-P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)]\,e^{i(x-\xi)\sigma}\frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}}K_j(\tau,\xi,t,\sigma)d\sigma.$$

Згідно теореми 1 отримуємо

$$|P_j(t,x,\tau,\xi)|\le c\left((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma}}+|x-\xi|\right)^{-n-\gamma-\lambda}.$$

Таким чином, інтегральне рівняння (19) може бути розв'язане і досліджене за допомогою методики, наведеної при доведенні теореми 1 у [6].

1. *Эйдельман С. Д.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений / С. Д. Эйдельман, Я. М. Дринь // Приближенные методы математического анализа.— Киев, 1974. — С. 60—69.
2. *Федорюк М. В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального уравнения / М. В. Федорюк // Дифференц. уравнения. — 1978. — № 7. — С. 1296—1301.
3. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / С.Д. Эйдельман // – М.: Наука, 1964. – 444 с.
4. *Дрінь Я. М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій / Я. М. Дрінь // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1974. — № 1. — С. 19—21.
5. *Эйдельман С. Д.* Построение и исследование класических фундаментальных решений задачи Коши для равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / С. Д. Эйдельман, Я. М. Дринь // Математические исследования.— Кишинев, 1981. — Вып. 63.— С. 18—33.
6. *Кочубей А. Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А. Н. Кочубей // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 5. — С. 909—934.

Одержано 06.10.2012

УДК 517.9

O. K. Mazur (National University of Food Technologies)

OPTIMAL CONTROL IN NON-SELF-ADJOINT ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH TERMINAL CRITERION

We obtain precise solution of the optimal control problem for elliptic equation with nonlocal boundary conditions in a circular sector with terminal quadratic cost functional in the class of controls that depend only on the angular variable.

В роботі одержано точний розв'язок задачі оптимального керування для еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі та з квадратичним термінальним критерієм якості, в класі керувань, що залежать лише від кутової змінної.

Introduction.

The theory of linear-quadratic optimal control problems for distributed systems is well researched [1, 2] and for many cases with the help of Fourier method it can be reduced to countable number of finite-dimensional problems [3]. In this paper we consider control problem for elliptic equation with non-local boundary conditions in circular sector [4, 5] with terminal quadratic cost functional. This problem does not allow total splitting and using L^2-theory. For resolving this problem in the class of controls that depend only on the angular variable we use apparatus of specially constructed biorthonormal basis systems of function [6].

1. Setting of the problem.

In circular sector $Q = \{(r,\theta)|r \in (0,1),\ \theta \in (0,\pi)\}$ we consider the optimal control problem

$$\begin{cases} \Delta y := \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = u(\theta),\ (r,\theta) \in Q, \\ y(1,\theta) = p(\theta),\ p(0) = 0, \\ y(r,0) = 0,\ r \in (0,1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\pi),\ r \in (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

$$J(y,u) = \|y(\alpha)\|_D^2 + \|u\|_D^2 \to \inf, \tag{2}$$

where $p \in C^1([0,\pi])$ is given function, $\alpha \in (0,1)$ is given number, $\|\cdot\|_D$ is norm in $L^2(0,\pi)$, which is equivalent to standard one and is given by the equality

$$\|v\|_D = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2\right)^{1/2}, \text{ where } v_n = \int_0^{\pi} v(\theta)\psi_n(\theta)d\theta,$$

$$\psi_0(\theta) = \frac{2}{\pi^2},\ \psi_{2n}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}(\pi-\theta)\sin 2n\theta,\ \psi_{2n-1}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}\cos 2n\theta.$$

The aim of the paper is to find optimal process of the problem (1), (2) in classical sense, that is, to find optimal among admissible processes

$$\{u,y\} \in C([0,\pi]) \times \left(C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)\right).$$

For the application of the spectral method we use biorthonormal and complete in $L^2(0,\pi)$ well-known Samarsky-Ionkin systems of functions [6] $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ and

$$\Phi = \{\varphi_0(\theta) = \theta,\ \varphi_{2n}(\theta) = \sin 2n\theta,\ \varphi_{2n-1}(\theta) = \theta\cos 2n\theta\}_{n=1}^{\infty}. \tag{3}$$

Then $\forall u \in L^2(0,\pi)$

$$u(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot \varphi_n(\theta), \tag{4}$$

where $u_n = \int_0^{\pi} u(\theta)\psi_n(\theta)d\theta$. So we seek solution of the problem (1) in the form

$$y(r,\theta) = y_0(r)\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(y_{2n-1}(r)\theta\cos 2n\theta + y_{2n}(r)\sin 2n\theta\right), \tag{5}$$

where functions $\{y_k(r)\}_{k=0}^{\infty}$ are solutions of the system of ordinary differential equations

$$\frac{d}{dr}(r\frac{dy_0}{dr}) = r \cdot u_0,\ y_0(1) = p_0, \tag{6}$$

$$r \cdot \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dy_{2k-1}}{dr}\right) - (2k)^2 y_{2k-1} = r^2 \cdot u_{2k-1},\ y_{2k-1}(1) = p_{2k-1}, \tag{7}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dy_{2k}}{dr}\right) - (2k)^2 y_{2k} - 4k \cdot y_{2k-1} = r^2 \cdot u_{2k},\ y_{2k}(1) = p_{2k}, \tag{8}$$

where $p_k = \int_0^{\pi} p(\theta) \cdot \psi_k(\theta)d\theta$.

Thus the original problem (1), (2) is reduced to the following one: among admissible pairs $\{u_n(r), y_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ of the problem (6) - (8) one should minimize the cost functional

$$J(y,u) = y_0^2(\alpha) + u_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(y_{2k-1}^2(\alpha) + y_{2k}^2(\alpha) + u_{2k-1}^2 + u_{2k}^2\right) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} J_k, \tag{9}$$

and for obtained process $\{\tilde{u}_n, \tilde{y}_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ one should prove that the formula (4) defines function from $C([0,\pi])$, and the formula (5) defines function from $C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$.

2. The main result.

For fixed set $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ after integration of (6) - (8) and using conditions at $r = 1$ and conditions $\lim\limits_{r\to 0} y_n(r) = 0$ we obtain the following formula

$$y_0(r) = p_0 - \frac{u_0}{4} + \frac{r^2}{4}u_0, \tag{10}$$

$$y_1(r) = p_1 r^2 + \frac{u_1}{4} r^2 \ln r. \tag{11}$$

$$y_2(r) = p_2 r^2 + r^2\left(\frac{u_1}{8}\ln^2 r + (\frac{u_2}{4} + p_1 - \frac{u_1}{16})\ln r\right), \tag{12}$$

and for $k \geq 2$:

$$y_{2k-1}(r) = \left(p_{2k-1} - \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2}\right) r^{2k} + r^2\frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2}, \tag{13}$$

$$y_{2k}(r) = p_{2k}r^{2k} - \frac{1}{4-(2k)^2}\left(u_{2k} + \frac{4k\cdot u_{2k-1}}{4-(2k)^2}\right)r^{2k} +$$

$$+\frac{1}{4-(2k)^2}\left(u_{2k} + \frac{4k\cdot u_{2k-1}}{4-(2k)^2}\right)r^2 + \left(p_{2k-1} - \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2}\right)r^{2k}\ln r. \quad (14)$$

Then admissible set $\{\tilde{y}_k(r), \tilde{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ minimizes (9) if and only if when $\tilde{u}_0$ is solution of

$$J_0 \to \inf, \quad (15)$$

and for $\forall k \geq 1$ $\{\tilde{u}_{2k-1}, \tilde{u}_{2k}\}$ is solution of the problem

$$J_k \to \inf. \quad (16)$$

From formula (10) – (14) we can deduce that J_0 and J_k are quadratic forms on variables u_0 and $\{u_{2k-1}, u_{2k}\}$, and, additionally, $J_0 \geq u_0^2$, $J_k \geq u_{2k-1}^2 + u_{2k}^2$. So the problems (15), (16) have unique solution $\{\tilde{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$, where for $k \geq 2$

$$\tilde{u}_{2k-1} = \Delta_k^{-1}\Big(-(a_k^2+1)(a_k p_{2k-1}\alpha^{2k} + d_k(a_k b_k - c_k)) + a_k^2 d_k(a_k b_k - c_k)\Big), \quad (17)$$

$$\tilde{u}_{2k} = \Delta_k^{-1}\Big(-a_k d_k(a_k^2 + (a_k b_k - c_k)^2 + 1) +$$

$$+a_k(a_k b_k - c_k)(a_k p_{2k-1}\alpha^{2k} + d_k(a_k b_k - c_k))\Big), \quad (18)$$

where

$$\Delta_k = (1+a_k^2)^2 + (a_k b_k - c_k)^2,$$

$$a_k = \frac{\alpha^2 - \alpha^{2k}}{4-4k^2},\ b_k = \frac{4k}{4-4k^2},\ c_k = \frac{\alpha^{2k} ln\alpha}{4-4k^2},\ d_k = \alpha^{2k}(p_{2k-1} ln\alpha + p_{2k}).$$

As $\Delta_k \sim 1$, $k \to \infty$, so for all sufficiently large $k \geq 1$ we have

$$|\tilde{u}_{2k-1}| + |\tilde{u}_{2k}| \leq \alpha^{2k-1}k^{-1}(|p_{2k-1}| + |p_{2k}|). \quad (19)$$

Functions $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ from (3) are bounded, $|\varphi_k'(\theta)| \leq M\cdot k$, so formula

$$\tilde{u}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k \cdot \varphi_k(\theta) \quad (20)$$

defines function from the class $C^1([0,\pi])$.

The following theorem guarantees, that the formula (20) defines optimal control of our problem in classical sense and, moreover, the class of admissible controls includes smooth on $[0,\pi]$ functions.

Theorem 1. *For every $u \in C^1([0,\pi])$, $u(0) = 0$ the formula (5) with coefficients $\{y_k(r)\}_{k=0}^{\infty}$ from (10) – (14) defines classical solution of the problem (1).*

Proof Let us prove that the formula (5) defines function $y(r,\theta)$, for which

$$y \in C([0,1]\times[0,\pi]),\ y \in C^2([0,1]\times[0,\pi]). \quad (21)$$

Let us denote

$$F_1(r,\theta) = \sum_{k=2}^{\infty}\left(p_{2k-1}\cdot r^{2k}\cdot\theta\cos 2k\theta + p_{2k}\cdot r^{2k}\sin 2k\theta + p_{2k-1}\cdot r^{2k}\ln r\sin 2k\theta\right).$$

Then F_1 satisfies condition (21). Indeed, functions $r^{2k} \cdot \sin 2k\theta$ and $r^{2k}(\theta \cos 2k\theta + \ln r \sin 2k\theta)$ are harmonic, so for (21) it is sufficient to prove the uniform convergence of series F_1 on $[0,1] \times [0,\pi]$, which follows from [5]. For remainder of the series $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot r^{2k} \cdot \theta \cos 2k\theta$ due to Bessel inequality $\sum\limits_{k=2}^{\infty} u_k^2 < \infty$ and Cauchy-Schwarz inequality we have

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} r^{2k} \cdot \theta \cos 2k\theta \right| \leq$$

$$\leq \pi \left(\sum_{k=N}^{\infty} u_{2k-1}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{((2k)^2-4)^2} \right)^{1/2} < \varepsilon, \tag{22}$$

beginning from some $N \geq 1$ uniformly on $[0,1] \times [0,\pi]$.

Moreover, because of the multiplier $\frac{r^{2k}}{4-(2k)^2}$ the partial derivatives of this series on r and θ up to second order are uniformly convergent series on every compact in $(0,1) \times (0,\pi)$.

Let us conduct a similar argument for the series $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4-(2k)^2} \left(u_{2k} + \frac{4k \cdot u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \right) \cdot r^{2k} \sin 2k\theta$.

For remainder of the series $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot r^{2k} \cdot \ln r \sin 2k\theta$ we have:

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot r^{2k} \cdot \ln r \sin 2k\theta \right| \leq \left(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{u_{2k-1}^2}{(4-(2k)^2)^2} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=N}^{\infty} r^{4k} \cdot \ln^2 r \right)^{1/2} < \left(\sum_{k=N}^{\infty} u_{2k-1}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{r^{4N} \cdot \ln^2 r}{1-r^4} \right)^{1/2}$$

for every $\theta \in [0,\pi]$, $r \in (0,1)$. Then $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \geq 1$

$$\sup_{r \in [0,1], \theta \in [0,\pi]} \left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot r^{2k} \cdot \ln r \sin 2k\theta \right| < \varepsilon.$$

Let us consider the series $F_2(r,\theta) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot r^k \cdot \theta \cos 2k\theta$. It is uniformly convergent on $[0,1] \times [0,\pi]$ due to Cauchy-Schwarz inequality.

In the same way one can prove convergence of the series $\frac{\partial F_2}{\partial r}$, $\frac{\partial F_2}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 F_2}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 F_2}{\partial r \partial \theta}$. Convergence of the series $\frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta^2}$ will follow from convergence of the series $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot (2k)^2 \cdot r^2 \cdot \theta \cos 2k\theta$, which is convergent with the series

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_{2k-1} \cdot r^2 \cdot \theta \cos 2k\theta. \tag{23}$$

For $u \in C^1([0,\pi])$ we obtain

$$u_{2k-1} = \int\limits_0^{\pi} u(\theta) \cdot \frac{4}{\pi^2} \cos 2k\theta d\theta = -\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} u'(\theta) \sin 2k\theta d\theta = -\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k} v_{2k}.$$

As for $v = u' \in C([0,\pi]) \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n^2 < \infty,\ \ v_n = \int\limits_0^{\pi} v(\theta)\varphi_n(\theta)d\theta$, then $\sum\limits_{k=2}^{\infty} v_{2k}^2 < \infty$ and from Cauchy-Schwarz inequality the series (23) converges uniformly on $[0,1]\times[0,\pi]$.

Applying the previous discussion to the series

$$F_3(r,\theta) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4-(2k)^2}\left(u_{2k} + \frac{4k\cdot u_{2k-1}}{4-(2k)^2}\right)\cdot r^2 \sin 2k\theta,$$

we need to prove the convergence of the series

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_{2k}\cdot r^2 \cdot \sin 2k\theta. \tag{24}$$

For $u \in C^1([0,\pi])$, $u(0) = 0$ we have:

$$u_{2k} = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} u(\theta)(\pi-\theta)\sin 2k\theta d\theta = \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi} u'(\theta)(\pi-\theta)\cos 2k\theta d\theta -$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi} u(\theta)\cos 2k\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi} u'(\theta)\cos 2k\theta d\theta -$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi} u'(\theta)\theta\cos 2k\theta d\theta - \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi} u(\theta)\cos 2k\theta d\theta = \frac{1}{k}(\alpha_k+\beta_k+\gamma_k),$$

where $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2) < \infty$, as $u' \in C([0,\pi])$. Then from Cauchy-Schwarz inequality the series (24) converges uniformly on $[0,1]\times[0,\pi]$. Theorem is proved.

1. *Lions J.-L.* Optimal problem in PDE systems. — M.: Mir, 1972. — 414 p.
2. *Egorov A.I.* Optimal control in heat and diffusion processes. — M.: Nauka, 1978. — 463 p.
3. *Kapustyan V.E., Belozerov V.E.* Geometrical methods of modal control. — K.: Naukova Dumka, 1999. — 259 p.
4. *Kapustyan V.E., Lazarenko I.S.* Optimal stabilization by distributed control of solutions of parabolic equations with non-local boundary-value conditions // Computer Math. — 2010. — № 2. — P. 149 – 155.
5. *Moiseev E.I., Ambarzumyan V.E.* About resolvability of non-local boundary-value problem with equality of fluxes // Differential equations.— 2010. — vol. 46, № 5. — P. 718 – 725.
6. *Ionkin N.I.* Solution of boundary-value problem from heat theory with non-classical boundary conditions // Differential equations. — 1977. — vol. 13, № 2. — P. 294 – 304.

Одержано 08.10.2012

УДК 519.64, 519.718

І. В. Малик (Чернівецький нац. ун-т)

НАПІВМАРКОВСЬКІ ВИПАДКОВІ ЕВОЛЮЦІЇ У СХЕМІ УСЕРЕДНЕННЯ

The sufficient conditions for weak convergence of semi-Markov random evolutions in averaging scheme to the solution of ordinary differential equations with restrictions in local characteristics of "basic" processes are obtained.

Одержано достатні умови слабкої збіжності напівмарковських випадкових еволюцій у схемі усереднення до розв'язку звичайного диференціального рівняння при обмеженнях на локальні характеристики "базових"процесів.

Вступ. Випадкові еволюції з марковськими переключеннями у схемі усереднення з параметром $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) досліджено в монографії [1] (Розділ 3-6) з використанням компенсуючого оператора(КО), введеного у роботах [1,2]. Загальна схема збіжності випадкових еволюцій (див. [1], Передмова) основана на вивченні збіжності КО з використанням розв'язків проблеми сингулярного збурення ([1], Розділ 5) та мартингальної характеризації марковських процесів [1, 3]. Слабку збіжність найпростішої напівмарковської випадкової еволюції(однорідного руху з випадковою швидкістю) у схемі усереднення досліджено в роботі [4].

У даній роботі розглядаються напівмарковські випадкові еволюції(НМВЕ), що задаються напівмарковськими випадковими процесами в евклідовому просторі [1,5] з марковськими переключеннями [1,5,6].

З'ясовано, що загальна схема збіжності випадкових еволюцій, розвинута в монографії [1], забезпечує асимптотичний аналіз НМВЕ у схемі усереднення.

Не має сумніву в тому, що аналогічна схема збіжності може бути застосована у схемі дифузійної апроксимації при додаткових умовах балансу (див. [1]).

1. Постановка задачі та позначення. Отже, розглянемо НМВЕ у R^d, що задається стохастичним адитивним функціоналом

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \eta(ds; x(s)) + \int_0^t \gamma(ds; x(s)), t \geq 0. \tag{1}$$

Однорідний ергодичний марковський стрибковий процес перемикань $x(t)$, $t \geq 0$ розглядається у стандартному просторі $(E, \mathcal{E})$ зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{E}$ та визначений напівгрупою $Q_t\varphi(x) := \int_E \varphi(y)P_t(x, dy), t \geq 0$ [1, 6], де $P_t(x, A) := \mathbb{P}\{x(t) \in A | x(0) = x\}$. Напівгрупа $Q_t, t \geq 0$ породжується генератором $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}\varphi(x) := q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $P(x, A) := \mathbb{P}\{x_{k+1} \in A | x_k = x\}$ – ймовірність переходу для вкладеного ланцюга Маркова $x_k, k \geq 0$; $q(x)$ – інтенсивність стрибків. Позначимо через Π –

проектор марковського процесу $x(t), t \geq 0$, R_0 – його потенціал(див. [1,6]):

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \pi(dx)\varphi(x),$$

$$R_0\varphi(x) := \int_0^\infty (Q_t - \Pi)\varphi(x)dt.$$

Напівмарковські процеси $\eta(t;x), t \geq 0, x \in E$ в евклідовому просторі $R^d, d \geq 1$ породжуються процесами марковського відновлення(ПМВ) $(\eta_n, \tau_n), n \geq 0$, де $\eta_n := \eta(\tau_n; x_n)$, $x_n := x(\tau_n)$. ПМВ задаються напівмарковськими ядрами [1,5]:

$$G(u, dv, t; x) := G(u, dv; x)F_u(t), u \in R_d, dv \in \mathcal{R}^d, t \geq 0, x \in E, \tag{2}$$

де умовні розподіли приростів вкладеного ланцюга Маркова $\eta_n, n \geq 0$ визначаються співвідношенням:

$$G(u, dv; x) := \mathbb{P}\{\Delta\eta_{n+1} \in dv | \eta_n = u, x_n = x\}, \Delta\eta_{n+1} := \eta_{n+1} - \eta_n;$$

умовна функція розподілу часу перебування в станах $\theta_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n$:

$$F_u(t) := \mathbb{P}\{\theta_{n+1} \leq t | \eta_n = u\} = P(\theta_u \leq t), t \geq 0,$$

$\tau_n, n \geq 0$ – моменти відновлення напівмарковського процесу. Позначимо через $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}$ – рахуючий процес, $\tau(t) := \tau_{\nu(t)}$.

Випадковий процес (1), враховуючи означення $\eta(t), t \geq 0$ та $\theta_n, n \geq 1$, запишемо у розгорнутому вигляді:

$$\xi(t) = \xi(0) + \sum_{n=1}^{\nu(t)} \eta(\theta_n, x(\tau_{n-1})) + \eta(t - \tau(t), x(t)) + \sum_{n=1}^{\nu(t)} \gamma(\theta_n, x(\tau_{n-1})) + \gamma(t - \tau(t), x(t)).$$

Введемо позначення

$$m_k(u) := \int_0^\infty t^k dF_u(t), k = 1, 2; \lambda(u) := 1/m_1(u);$$

$$\eta(t) := \int_0^t \eta(ds; x(s)), \gamma(t) := \int_0^t \gamma(ds; x(s))ds;$$

$$G(x)\varphi(u) := \int_{R^d} G(u, dv; x)\varphi(u + v), u \in R^d.$$

Неперервна складова еволюції $\gamma(t), t \geq 0$ між моментами відновлення τ_n та τ_{n+1}, за умови $x(\tau_n) = x, x \in E$, задається напівгрупами $\Gamma_t(x), t \geq 0$ з генераторами

$$\Gamma(x)\varphi(u) := a(u; x)\varphi'(u) + \int_{R^d} (\varphi(u + v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\Gamma(u, dv; x). \tag{3}$$

Згідно введених вище позначень

$$\xi(t) = \xi(0) + \eta(t) + \gamma(t). \tag{4}$$

Надалі буде важливим той факт, що випадкові процеси $\eta(t)$ та $\gamma(t)$ є однорідними.

2. Компенсуючий оператор. Обчислимо КО розширеного ПМВ

$$\zeta_n := (\xi_n, x_n, \tau_n),$$

де $\xi_n := \xi(\tau_n)$, $x_n := x(\tau_n)$:

Лема 1. *КО* $\zeta_n, n \geq 0$ *задається формулою*

$$L\varphi(u,x,t) = \lambda(u)\left[\int_0^\infty F_u(ds)Q_s\Gamma_s(x)G(x)\varphi(u,x,t+s) - \varphi(u,x,t)\right],$$

для $u \in R^d, x \in E, t \geq 0$.

Доведення. Згідно означення КО [1]:

$$L\varphi(u,x,t) := \lambda(u)\mathbb{E}[\varphi(\xi_{n+1}, x_{n+1}, \tau_{n+1}) - \varphi(\xi_n, x_n, \tau_n) \,|\, (\xi_n, x_n, \tau_n) = (u,x,t)] =$$

$$\lambda(u)\mathbb{E}[\varphi(u + \Delta\xi_{n+1}, x + \Delta x_{n+1}, t + \Delta\tau_{n+1}) - \varphi(u,x,t) \,|\, (\xi_n, x_n, \tau_n) = (u,x,t)],$$

де $\Delta\xi_{n+1} := \xi_{n+1} - \xi_n$, $\Delta x_{n+1} := x_{n+1} - x_n = x(\theta_{n+1})$, $\Delta\tau_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n = \theta_{n+1}$. Згідно (4) приріст $\Delta\xi_{n+1}$ рівний

$$\Delta\xi_{n+1} = \Delta\eta_{n+1} + \Delta\gamma_{n+1},$$

де $\Delta\eta_{n+1} := \eta(\tau_{n+1}) - \eta(\tau_n) = \eta(\theta_{n+1})$, $\Delta\gamma_{n+1} := \gamma(\tau_{n+1}) - \gamma(\tau_n) = \gamma(\theta_{n+1})$.

Тоді

$$L\varphi(u,x,t) = \lambda(u)\left[\int_0^\infty F_u(ds)Q_s\Gamma_s(x)G(x)\varphi(u,x,t+s) - \varphi(u,x,t)\right].$$

Пояснимо дану формулу. Найперше потрібно вказати, що напівгрупа Q_s діє по $x \in E$, напівгрупи $\Gamma_s(x)$ та оператори $G(x)$ – по $u \in R^d$. При фіксованих $\tau_n = t, \tau_{n+1} = t + s$, одержимо фіксований час перебування у стані $\theta_{n+1} = s$. Обчислимо умовне математичне сподівання для приростів $\Delta\xi(s)$ та $\Delta x(s)$:

$$\mathbb{E}[\varphi(u + \xi(s), x + x(s), t + s) - \varphi(u,x,t) \,|\, (\xi_n, x_n, \tau_n) = (u,x,t)] =$$

$$\mathbb{E}[\varphi(u + \eta(s) + \gamma(s), x + x(s)) - \varphi(u,x,t) \,|\, (\xi_n, x_n, \tau_n) = (u,x,t)] =$$

$$= Q_s\Gamma_s(x)G(x)\varphi(u,x,t+s) - \varphi(u,x,t).$$

Усереднюючи останню формулу за розподілом θ_{n+1}, отримаємо твердження леми. Лема 1 доведена.

3. Випадкові еволюції у схемі усереднення. Специфіка задачі усереднення полягає в тому, щоб забезпечити усереднення НМВЕ на зростаючих інтервалах часу нормуванням моментів стрибків напівмарковського процесу та величини стрибків малим параметром серії $\varepsilon \to 0 (\varepsilon > 0)$. При цьому необхідно нормувати марковський процес переключень так, щоб кількість переключень зростала при $\varepsilon \to 0$, а також так, щоб кількість стрибків напівмарковського процесу між двома сусідніми моментами переключень також зростала при $\varepsilon \to 0$.

До того ж, проблему сингулярного збурення для компенсуючого оператора легко розв'язувати, коли нормування здійснюється малим параметром у цілих степенях $\varepsilon^k, k \in \mathbb{Z}$. Так виникає нормування часу: t/ε^3, а разом з тим і величини стрибків у схемі усереднення: ε^3.

Отже, НМВЕ розглядається у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ у такому нормуванні:

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi(0) + \varepsilon^3[\eta^\varepsilon(t) + \gamma^\varepsilon(t)], \tag{5}$$

$$\eta^\varepsilon(t) := \int\limits_0^{t/\varepsilon^3} \eta(ds; x(\varepsilon s)),\ \gamma^\varepsilon(t) = \int\limits_0^{t/\varepsilon^3} \gamma(ds; x(\varepsilon s)).$$

Для обчислення КО, розглянемо супроводжуючі процеси $\eta(t; x), x \in E$, що задаються напівмарковськими ядрами (2) та $\gamma(t; x), x \in E$ з генераторами (3).

Тоді

$$\Delta\xi_n^\varepsilon := \xi_{n+1}^\varepsilon - \xi_n^\varepsilon = \varepsilon^3[\Delta\eta_n^\varepsilon + \Delta\gamma_n^\varepsilon].$$

Тут, за означенням,

$$\xi_n^\varepsilon := \xi^\varepsilon(\varepsilon^3\tau_n),\ \eta_n^\varepsilon := \eta^\varepsilon(\varepsilon^3\tau_n),\ \gamma_n^\varepsilon := \gamma^\varepsilon(\varepsilon^3\tau_n).$$

Ведемо позначення

$$b(u; x) := \int\limits_{R^d} vG(u, dv; x),$$

$$c(u; x) := a(u; x) + \lambda(u)b(u; x).$$

Розглянемо умови слабкої збіжності для НМВЕ у схемі усереднення, що задається стохастичним адитивним функціоналом (5):

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) *марковський процес переключень є рівномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{E}$;*

2) *функція $c(u; x)$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця з константою* L, *що не залежить від x;*

3) *справедлива оцінка*

$$\sup_{x \in E, u \in R^d} \left(\left| \int\limits_{R^d} v^2 G(u, dv; x) \right| + \left| \int\limits_{R^d} v^2 \Gamma(u, dv; x) \right| + \int\limits_0^\infty s^2 F_u(ds) \right) < \infty;$$

4) має місце збіжність початкових умов та їх обмеженість:

$$\xi^\varepsilon(0) \to \xi^0(0), \sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}|\xi^\varepsilon(0)| \le K < \infty.$$

Тоді стохастичний адитивний функціонал $\xi^\varepsilon(t), t \ge 0$ (5) слабко збігається при $\varepsilon \to 0$ до розв'язку диференціального рівняння

$$d\xi^0(t) = \widehat{c}(\xi^0(t))dt, \tag{6}$$

що задовольняє початкову умову

$$\xi^0(0) = \xi_0, \tag{7}$$

де

$$\widehat{c}(u) := \int\limits_E \pi(dx)(a(u;x) + \lambda(u)b(u;x)).$$

Визначимо випадковий процес $\zeta^\varepsilon(t)$, породжений сім'єю розширеного ПМВ

$$\zeta_n^\varepsilon := (\xi_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon). \tag{8}$$

де $\xi_n^\varepsilon := \varepsilon^3\xi(\tau_n), x_n^\varepsilon := x(\varepsilon^2\tau_n), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^3\tau_n$.

Лема 2. *КО (8) задається формулою*

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[\int\limits_0^\infty F_u(ds)Q_{\varepsilon^2 s}G^\varepsilon(x)\Gamma_s^\varepsilon(x)\varphi(u,x,t+\varepsilon^3 s) - \varphi(u,x,t)\right],$$

де I – одиничний оператор, оператори $G^\varepsilon(x), x \in E$ визначені наступним чином:

$$G^\varepsilon(x)\varphi(u) := \int\limits_{R^d} G(u,dv;x)\varphi(u+\varepsilon^3 v),$$

напівгрупи $\Gamma_s^\varepsilon(x), x \in E$ породжуються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) := \varepsilon^3 a(u;x)\varphi'(u) + \int\limits_{R^d}(\varphi(u+\varepsilon^3 v) - \varphi(u) - \varepsilon^3 v\varphi'(u))\Gamma(u,dv;x). \tag{9}$$

Доведення. Згідно означення, КО для (8) рівний

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) := \mathbb{E}\{\varphi(\zeta_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(\zeta_n^\varepsilon)|\zeta_n^\varepsilon = (u,x,t)\}/E\theta_u^\varepsilon =$$

$$\mathbb{E}\{\varphi(\xi_n^\varepsilon + \Delta\xi_{n+1}^\varepsilon, x_n^\varepsilon + \Delta x_{n+1}^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon + \Delta\tau_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(\xi_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon)|\zeta_n^\varepsilon = (u,x,t)\}/E\theta_u^\varepsilon.$$

Оскільки $\tau_n^\varepsilon = \varepsilon^3\tau_n$, то час перебування у станах рівний $\theta_n^\varepsilon = \varepsilon^3\theta_n$, тобто

$$E\theta_u^\varepsilon = \varepsilon^3 m_1(u).$$

Зауважимо, що справедливі рівності

$$\Delta\xi_{n+1}^\varepsilon = \varepsilon^3\Delta\xi_{n+1} = \varepsilon^3(\eta(\theta_{n+1}) + \gamma(\theta_{n+1})),$$

$$\Delta x^\varepsilon_{n+1} = x^\varepsilon_{n+1} - x^\varepsilon_n = x(\varepsilon^2\tau_{n+1}) - x(\varepsilon^2\tau_n) = x(\varepsilon^2\theta_{n+1}).$$

Тоді

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) =$$
$$= \mathbb{E}\{\varphi(u+\varepsilon^3(\eta(\theta_{n+1})+\gamma(\theta_{n+1})), x + x(\varepsilon^2\theta_{n+1}), t+\varepsilon^3\theta_{n+1}) - \varphi(u,x,t)|\zeta^\varepsilon_n =$$
$$= (u,x,t)\}/E\theta^\varepsilon_u = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[\int\limits_0^\infty F_u(ds)Q_{\varepsilon^2 s}G^\varepsilon(x)\Gamma^\varepsilon_s(x)\varphi(u,x,t+\varepsilon^3 s) - \varphi(u,x,t)\right],$$

що і потрібно було довести. Лема 2 доведена.

Розглянемо асимптотичне зображення КО L^ε:

Лема 3. *Компенсуючий оператор L^ε на тест-функціях $\varphi \in C^2(R^d \times E)$ має асимптотичне зображення*

$$L^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}\mathbb{Q}\varphi(\cdot,x) + C(x)\varphi(u,\cdot) + l^\varepsilon\varphi(u,x), \tag{10}$$

де

$$C(x)\varphi(u) := c(u;x)\varphi'(u),$$
$$\sup_{u\in R^d, x\in E} |l^\varepsilon\varphi(u,x)| \to 0 \text{ \textit{при} } \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Скористаємося лемою 1 та алгебраїчною тотожністю

$$ab - 1 = (a-1) + (b-1) + (a-1)(b-1). \tag{11}$$

Тоді

$$L^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[\int\limits_0^\infty F_u(ds)Q_{\varepsilon^2 s}G^\varepsilon(x)\Gamma^\varepsilon_s(x) - I\right]\varphi(u,x) =$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\left[Q_{\varepsilon^2 s}\Gamma^\varepsilon_s(x) - I\right]\varphi(u,x) + \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[G^\varepsilon(x) - I\right]\varphi(u,x) +$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\left[G^\varepsilon(x) - I\right]\left[Q_{\varepsilon^2 s}\Gamma^\varepsilon_s(x) - I\right]\varphi(u,x).$$

Розглянемо перший доданок. Використаємо знову алгебраїчну тотожність (11):

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\left(\Gamma^\varepsilon_s(x)Q_{\varepsilon^2 s} - I\right) = F^\varepsilon_\Gamma + F^\varepsilon_Q + l^\varepsilon_2(x),$$

де

$$F^\varepsilon_\Gamma := \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\left(\Gamma^\varepsilon_s(x) - I\right),$$

$$F^\varepsilon_Q := \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\left(Q_{\varepsilon^2 s} - I\right),$$

$$l_1^\varepsilon := \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\left(\Gamma_s^\varepsilon(x)-I\right)\left(Q_{\varepsilon^2 s}-I\right).$$

Тоді згідно означення напівгрупи $\Gamma_s^\varepsilon(x)$ та генератора $\Gamma^\varepsilon(x)$:

$$F_\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\Gamma^\varepsilon(x)\int\limits_0^s \Gamma_{s_1}^\varepsilon(x)ds_1\varphi(u) =$$

$$= \varepsilon^{-3}\lambda(u)\Gamma^\varepsilon(x)\int\limits_0^\infty \overline{F}_u(s)\Gamma_s^\varepsilon(x)ds\varphi(u) = a(u;x)\varphi'(u) + l_2^\varepsilon(x)\varphi(u),$$

де $\overline{F}_u(s) := 1 - F_u(s)$ та

$$l_2^\varepsilon(x)\varphi(u) := \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left(\int\limits_{R^d}\left(\varphi(u+\varepsilon^3 v)-\varphi(u)-\varepsilon^3 v\varphi'(u)\right)\Gamma(u,dv;x)+\right.$$

$$\left.+\Gamma^\varepsilon(x)\int\limits_0^\infty \overline{F}_u(s)(\Gamma_s^\varepsilon(x)-I)ds\varphi(u)\right) =$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\left(\frac{1}{2}\int\limits_{R^d}\varepsilon^6 v^2\varphi''(u+k(v)\varepsilon v)\Gamma(u,dv;x)+\right.$$

$$\left.+(\Gamma^\varepsilon(x))^2\int\limits_0^\infty \overline{F}_u(s)\int\limits_0^s \Gamma_{s_1}^\varepsilon(x)\varphi(u)ds_1 ds\right) =$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\left(\frac{1}{2}\int\limits_{R^d}\varepsilon^6 v^2\varphi''(u+k(v)\varepsilon v)\Gamma(u,dv;x) + (\Gamma^\varepsilon(x))^2\int\limits_0^\infty \overline{F}_u^{(2)}(s)\Gamma_s^\varepsilon(x)\varphi(u)ds\right),$$

$|k(v)| \le 1$, $\overline{F}_u^{(2)}(s) := \int\limits_s^\infty \overline{F}_u(s_1)ds_1$. При виконанні умови 3 теореми для функції $\varphi \in C^2(R^d)$

$$\sup_{u\in R^d, x\in E}|l_2^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Розглянемо F_Q^ε:

$$F_Q^\varepsilon\varphi(x) = \varepsilon^{-1}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\mathbb{Q}\int\limits_0^s Q_{\varepsilon^2 s_1}ds_1\varphi(x) =$$

$$\varepsilon^{-1}\lambda(u)\mathbb{Q}\int\limits_0^\infty \overline{F}_u(s)Q_{\varepsilon^2 s}ds\varphi(x) = \varepsilon^{-1}\mathbb{Q}\varphi(x) + l_3^\varepsilon(u)\varphi(x),$$

де

$$l_3^\varepsilon(u)\varphi(x) := \varepsilon^{-1}\lambda(u)\mathbb{Q}\int\limits_0^\infty \overline{F}_u(s)\left(Q_{\varepsilon^2 s} - I\right) ds\varphi(x) =$$

$$\varepsilon\lambda(u)\mathbb{Q}^2\int\limits_0^\infty F_u^{(2)}(s)Q_{\varepsilon^2 s}ds\varphi(x).$$

За умов 1 та 3 теореми для функції $\varphi \in C(E)$ справедливе співвідношення:

$$\sup_{u\in R^d, x\in E} |l_3^\varepsilon(u)\varphi(x)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Розглянемо знехтуючий член l_1^ε на тест функціях $\varphi \in C^2(R^d \times E)$:

$$l_1^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}\lambda(u)\Gamma^\varepsilon(x)\mathbb{Q}\int\limits_0^\infty F_u(ds)\int\limits_0^s \Gamma_t^\varepsilon(x)dt\int\limits_0^s Q_{\varepsilon^2 t}(x)dt\varphi(u,x).$$

Використовуючи означення $\Gamma^\varepsilon(x)$ (9) та умови 1, 3 теореми для тест функцій $\varphi \in C^2(R^d \times E)$ одержимо співвідношення

$$\sup_{u\in R^d, x\in E} |l_1^\varepsilon\varphi(x)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Скориставшись формулою Тейлора, отримаємо:

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[G^\varepsilon(x) - I\right]\varphi(u,x) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_{R^d} G(u,dv;x)(\varphi(u+\varepsilon^3 v,x) - \varphi(u,x)) =$$

$$\lambda(u)b(u;x)\varphi'(u,x) + l_4^\varepsilon(x)\varphi(u,x),$$

де

$$l_4^\varepsilon(x)\varphi(u,x) := \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_{R^d} G(u,dv;x)(\varphi(u+\varepsilon^3 v,x) - \varphi(u,x) - \varepsilon^3 v\varphi'(u,x)).$$

Для тест функцій $\varphi \in C^2(R^d \times E)$ вірна оцінка:

$$|l_1^\varepsilon(x)\varphi(u,x)| \le \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left|\int\limits_{R^d} G(u,dv;x)\varepsilon^6 v^2\varphi''(u+k_v\varepsilon^3 v,x)\right| \le$$

$$\le \varepsilon^3 K\lambda(u)\int\limits_{R^d} v^2 G(u,dv;x),$$

де $|k_v| \le 1, K := \sup\limits_{u\in R^d, x\in E} |\varphi''(u,x)|$

Згідно побудови напівгруп $\Gamma_\varepsilon^t(x), Q_{\varepsilon^2 t}, t \ge 0, x \in E$ та операторів $G^\varepsilon(x), x \in E$ зрозуміла оцінка

$$\sup_{u\in R^d, x\in E}\left|\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\left[G^\varepsilon(x) - I\right]\left[Q_{\varepsilon^2 s}\Gamma_s^\varepsilon(x) - I\right]\varphi(u,x)\right| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

для тест функцій $\varphi \in C^2(R^d \times E)$.

Лема 3 доведена.

Доведення теореми 1. Для $\varphi \in C(E)$ зрозуміле співвідношення

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \varphi(x)\pi(dx) =: \widehat{\varphi}.$$

Позначимо для $\varphi \in C^1(R^d)$ усереднений оператор

$$\widehat{C}\varphi(u) := \widehat{c}(u)\varphi'(u), \tag{12}$$

що породжує усереднене диференціальне рівняння (6).

Проблема сингуляргого збурення (див. [1], Розділ 5) для оператора $L_0^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\mathbb{Q} + C(x)$ розв'язується на збурених тест функціях $\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\varphi_1$:

$$L_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q\varphi + [C(x)\varphi + Q\varphi_1] + \varepsilon C(x)\varphi_1.$$

Згідно твердження 5.6. [1] розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора L_0^ε має вигляд

$$L_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = \widehat{C}\varphi(u) + \varepsilon l^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

на збурених функціях $\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u,x)$, $\varphi \in C^2(R^d)$, де усереднений оператор $\widehat{C}$ визначений (12),

$$l^\varepsilon(x) = C(x)R_0(C(x) - \widehat{C}).$$

Таким чином, розв'язок проблеми сингулярного збурення для L_0^ε та розклад (10) дозволяє зробити висновок, що НМВЕ $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0$ (5) у схемі усереднення слабко збігається до розв'язку диференціального рівняння (6), що задається генератором $\widehat{C}$ (12) та початковою умовою (7).

Теорема 1 доведена.

Автор висловлює щиру подяку академіку НАН України Королюку В.С. за постановку задачі та цінні зауваження щодо методів її розв'язання.

1. *Koroliuk V.S., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space. – Singapore: World Scientific Publishers, 2005. – 331 p.
2. *Королюк В.С.* Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии // Укр. матем. журн. – 2010. – 57, №6. – С. 22-26.
3. *Sviridenko M.N.* Martingale characterization of limit distributions in the space of functions without discontinuities of second kind // Math. Notes. – 1998. – 43, No 5. – P. 398-402.
4. *Pinsky M.A.* Lectures on Random Evolutions. – Singapore: World Scientific Publishers, 1991. – 135 p.
5. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1976. – 184 с.
6. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М. Физматгиз, 1967. – 860 с.

Одержано 10.10.2012

УДК 517.957

Л. М. Мамай (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

In this paper was cited some nonlinear functional equations which are mathematical models of real physical processes.

В роботі наведені та розв'язані деякі нелінійні функціональні рівняння, які є математичними моделями реальних фізичних процесів.

Одним з основних методів дослідження багатьох складних явищ і процесів у фізиці, хімії, біології, економіці та екології є математичне моделювання. Ефективним математичним описом багатьох задач часто служать нелінійні функціональні рівняння: системи нелінійних скалярних рівнянь, диференціальні, інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння.

Важливим моментом при виборі тих або інших видів рівнянь чи інших математичних залежностей є пошук вдалої метематичної моделі, яка би відображала реальне явище і разом з тим яку можна було б дослідити та отримати чисельний результат. Наприклад, звичайні диференціальні рівняння чи рівняння з частинними похідними стали традиційними математичними моделями для багатьох фізичних та ряду інших явищ, а інтегральні рівняння в якості математичних моделей реальних процесів почали застосовуватися пізніше диференціальних, причому загальних рекомендацій для їх застосування існує значно менше. В більшості випадків, для побудови таких моделей служать відповідні загальні фізичні закони. Зокрема, застосування відомих законів збереження маси, імпульсу і енергії приводять до моделей конкретних явищ і процесів у вигляді інтегральних рівнянь. Використання вказаних моделей має ряд переваг: вони не містять похідних від функцій і тим самим не накладають обмежень на їх гладкість, крім цього такі моделі допускають існування розривних розв'язків. Важливе значення інтегральних рівнянь в розв'язуванні задач дослідження різного роду полів і середовищ, задач електродинаміки та моделювання динамічних об'єктів і систем.

Наведемо декілька прикладів, які ілюструють застосування нелінійних функціональних рівнянь для моделювання фізичних процесів. Розглянемо модельний приклад детонації твердої вибухової речовини [1].

Рівняння енергії, якому задовольняє розподіл температури при детонації твердої вибухової речовини може бути записане у вигляді рівняння

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{t}\frac{d\theta}{dt} + \alpha \cdot e^{\frac{\theta}{1+\frac{\theta}{\gamma}}} = 0. \tag{1}$$

Воно доповнюється крайовими умовами для $t = 0$ і $t = 1$

$$\frac{d\theta(0)}{dt} = 0, \quad N_{nu}\theta(1) + \frac{d\theta(1)}{dt} = 0, \tag{2}$$

де N_{nu} – число Нуссельта.

Для розв'язання (1), (2) застосуємо метод інтегральних рівнянь [1], який полягає в заміні крайової задачі еквівалентним їй інтегральним рівнянням. Для побудови такого рівняння використовують функцію Гріна, яка породжується лінійною частиною рівняння (1) та крайовими умовами (2). Дана функція має вигляд

$$G(t,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi} - 1 + \dfrac{1}{N_{nu}}, & t < \xi, \\ \\ \dfrac{1}{t} - 1 + \dfrac{1}{N_{nu}}, & t > \xi, \end{cases}$$

а розв'язування крайової задачі (1), (2) зводиться до розв'язування нелінійного інтегрального рівняння

$$\theta(t) = \int\limits_0^1 G(t,\xi)\alpha\xi^2 e^{\frac{\gamma\theta}{\gamma+\theta}} d\xi. \tag{3}$$

Розглянемо випадок, коли $N_{nu} = 1$; $\alpha = 1$; $\gamma = 0,1$. Тоді задача (1), (2) та функція Гріна $G(t,\xi)$ відповідно будуть мати вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{2}{t}\dfrac{d\theta}{dt} + \alpha \cdot e^{\frac{\theta}{1+10\cdot\theta}} = 0, \\ \dfrac{d\theta(0)}{dt} = 0, \quad \theta(1) + \dfrac{d\theta(1)}{dt} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$G(t,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi}, & t < \xi, \\ \\ \dfrac{1}{t}, & t > \xi. \end{cases} \tag{5}$$

Замінюючи інтеграл у правій частині рівняння (3) при вказаних значеннях параметрів N_{nu}, α, γ його наближеним значенням за формулою Сімпсона з числом вузлів $n = 4$, будемо мати для значень розв'язків $\theta(t_i) = \theta_i$ у вузлах $t_i = 0,25i$, $i = \overline{1,4}$ наступну систему нелінійних скалярних рівнянь

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{12}\left(e^{\frac{\theta_1}{1+10\theta_1}} + e^{\frac{\theta_2}{1+10\theta_2}} + 3e^{\frac{\theta_3}{1+10\theta_3}} + e^{\frac{\theta_4}{1+10\theta_4}}\right), \\ \theta_2 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\theta_1}{1+10\theta_1}} + e^{\frac{\theta_2}{1+10\theta_2}} + 3e^{\frac{\theta_3}{1+10\theta_3}} + e^{\frac{\theta_4}{1+10\theta_4}}\right), \\ \theta_3 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{\theta_1}{1+10\theta_1}} + \frac{2}{3}e^{\frac{\theta_2}{1+10\theta_2}} + 3e^{\frac{\theta_3}{1+10\theta_3}} + e^{\frac{\theta_4}{1+10\theta_4}}\right), \\ \theta_4 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}e^{\frac{\theta_1}{1+10\theta_1}} + \frac{1}{2}e^{\frac{\theta_2}{1+10\theta_2}} + \frac{9}{4}e^{\frac{\theta_3}{1+10\theta_3}} + e^{\frac{\theta_4}{1+10\theta_4}}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Для розв'язування системи (6) використано εs-алгоритм [2] та, з точністю $\eta = 0,0001$ за нев'язкою, отримано один розв'язок: $\theta_1 = 0,54270$, $\theta_2 = 0,49737$, $\theta_3 = 0,45206$, $\theta_4 = 0,36158$.

Системи нелінійних скалярних рівнянь безпосередньо можуть служити математичними моделями реальних природничих процесів. Серед них існує клас задач з параметрами, де є функціональна залежність фізичних величин від набору параметрів. В залежності від значень параметрів вони будуть визначати певний конкретний стан фізичного процесу. Результатом обчислення математичної моделі будуть множини розв'язків, які відповідатимуть множинам значень параметрів. Розглянемо систему нелінійних скалярних рівнянь [3], в якій фігурують три множини параметрів. Наступна система визначає швидкості різних стадій хімічної реакції:

$$\begin{cases} r_1 = 1 - x_1 - k_1 x_1 x_6 + kr_1 x_4, \\ r_2 = 1 - x_2 - k_2 x_2 x_6 + kr_2 x_5, \\ r_3 = -x_3 + 2k_3 x_4 x_5, \\ r_4 = k_1 x_1 x_6 - kr_1 x_4 - k_3 x_4 x_5, \\ r_5 = 1,5(k_2 x_2 x_6 - kr_2 x_5) - k_3 x_4 x_5, \\ r_6 = 1 - x_4 - x_5 - x_6, \end{cases} \tag{7}$$

де k_1, kr_1, k_2, kr_2, k_3 — визначені коефіцієнти швидкості реакції (параметри), $x_1, \ldots, x_6$ — число молів компонентів, які приймають участь у хімічній реакції, а $r_1, \ldots, r_6$ — швидкості реакції.

У стаціонарному стані швидкості стадій хімічного процесу досягають рівноважного стану, тобто зміна їх r_i рівна нулю $(i = \overline{1,6})$. Використовуючи εs-алгоритм [2] було знайдено всі ізольовані розв'язки системи (7) при $r_i = 0$, $i = \overline{1,6}$ для трьох різних множин коефіцієнтів швидкості реакції (таблиця 1).

Таблиця 1

Множини параметрів

Параметр	Множина 1	Множина 2	Множина 3
k_1	31,24	17,721	17,721
kr_1	2,062	3,483	6,966
k_2	0,272	0,118	0,118
kr_2	0,02	0,033	333,333
k_3	303,03	505,051	505,051

Отримані розв'язки для кожної множини параметрів наведені у таблиці 2.

Таблиця 2

Наближені розв'язки системи нелінійних скалярних рівнянь (7)

	Множина 1		Множина 2		Множина 3	
i	1	2	1	2	1	2
x_1	0,973898	1,030740	0,971359	1,051102	0,978726	-0,170347
x_2	0,982821	1,020285	0,980375	1,033431	0,986220	0,219778
x_3	0,052169	-0,060063	0,057867	-0,100286	0,042464	2,340585
x_4	0,935638	-0,000099	0,830269	-0,000099	0,712534	-1,062925
x_5	0,000092	1,001060	0,0000069	1,002861	0,000059	-0,002180
x_6	0,06427	-0,000961	0,169662	-0,002762	0,287407	2,065105
η	0,000316	0,000814	0,000582	0,000960	0,000564	0,000068

Хоч при кожній, з наведених в таблиці 2, множині параметрів система (7) має два розв'язки, проте фізичний зміст має тільки перший, оскільки допустимими є розв'язки, у яких $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,6}$.

До розв'язування систем нелінійних склярних рівнянь також приводить задача теоретичного визначення рівноважного складу суміші реагуючих газів, яка часто зутрічається у різних областях техніки. Одна з таких задач описана в [1]. Нехай нагрівається один моль CO_2 при сталому тиску 10 атм. Потрібно знайти рівноважні складові в інтервалі температур від 1000 до 6000 K в припущенні, що рівноважний склад містить CO_2, CO та O_2. Виходячи з умови запишемо рівняння

$$CO_2 \to \alpha CO_2 + \beta CO + \gamma O_2,$$

де в лівій частині вказано початковий стан, а в правій — хімічний склад при рівновазі. Шукані параметри α, β, γ — числа молів компонентів. З останнього рівняння, враховуючи баланс елементів C і O, отримаємо співвідношення

$$\begin{gathered} \alpha + \beta = 1, \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = 2. \end{gathered} \tag{8}$$

Опишемо спосіб, який дозволяє отримати ще одне рівняння для визначення трьох невідомих величин α, β, γ, використовуючи закон діючих мас.

В загальному вигляді рівняння хімічної реакції записується за допомогою стехіометричної формули [4]:

$$v_1 A_1 + v_2 A_2 + \cdots \leftrightarrow v_1' A_1' + v_2' A_2' + \cdots ,$$

де v_i, v_i', $i = 1, 2, \ldots$ — стехіометричні коефіцієнти відповідно вихідних і кінцевих речовин, A_i, A_i', $i = 1, 2, \ldots$ — вихідні і кінцеві речовини. Запишемо закон діючих мас

$$\prod_i p_i^{v_i} = K_p,$$

де K_p — константа хімічної рівноваги, виражена через парціальні тиски реагентів в ідеальній газовій суміші і є функцією тільки температури $K_p(T)$. Використаємо формулу для константи рівноваги

$$K_p = \frac{n_{A_1}^{v_1} \cdot n_{A_2}^{v_2} \cdots}{n_{A_1'}^{v_1'} \cdot n_{A_2'}^{v_2'} \cdots} \left(\frac{p}{\sum\limits_i n_i} \right)^{\Delta n}, \tag{9}$$

де n_{A_i} та $n_{A_i'}$, $i = 1, 2, \ldots$ — число молів відповідно вихідних і кінцевих речовин, v_i, v_i', $i = 1, 2, \ldots$ — стехіометричні коефіцієнти відповідно вихідних і кінцевих речовин, p — тиск, n_i, $i = 1, 2, \ldots$ — число молів реагента у стані рівноваги, $\Delta n = v_1 + v_2 + + \cdots - v_1' + v_2' - \cdots$ — зміна числа молів реагентів за стехіометричним рівнянням.

Розглянемо рівняння хімічної реакції

$$CO_2 \rightleftarrows CO + \frac{1}{2} O_2 \tag{10}$$

і використаємо для нього формулу (9). В нашому випадку $n_{A_1'}^{v_1'} = \beta$, $n_{A_2'}^{v_2'} = \gamma^{\frac{1}{2}}$, $n_{A_1}^{v_1} = \alpha$, $\sum\limits_{i=1}^{3} n_i = \alpha+\beta+\gamma$, а $\Delta n = 1+\dfrac{1}{2}-1 = \dfrac{1}{2}$. Тоді, згідно (9), для реакції (10) справедлива формула

$$\frac{\beta\sqrt{\gamma}}{\alpha}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\alpha+\beta+\gamma}} = K_p,$$

або

$$\beta^2\gamma p - K_p^2\alpha^2(\alpha+\beta+\gamma) = 0. \tag{11}$$

Для визначення α, β, γ при заданій температурі, враховуючи рівняння (8) та (11), одежимо систему нелінійних скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha+\beta-1=0, \\ 2\alpha+\beta+2\gamma-2=0, \\ \beta^2\gamma p - K_p^2\alpha^2(\alpha+\beta+\gamma)=0. \end{cases}$$

В роботі [5] наведено розвязки даної СНСР, отримані використовуючи εs-алгоритм, при різних значеннях K_p.

Описані приклади ілюструють можливість ефективного застосування нелінійних функціональних рівнянь при вивченні багатьох складних природничих явищ та процесів.

1. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – М.: Мир, 1982. – 294 с.
2. *Бабич М. Д., Шевчук Л. Б.* Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных интегральных уравнений // Кибернетика. – 1982. – №2. – С. 74–79.
3. *Shacham M.* Numerical solution of constrained non-linear algebraic equations / Mordechai Shacham //Internatinal journal for numerical methods in engineering. – 1986. – vol. 23. – С. 1455–1481.
4. *Гомонай В.І., Гомонай О.В.* Фізична хімія: Підручник. – Ужгород: ВАТ "Патент 2004. - 217 с.
5. *Бабич М.Д., Гецко О.М.* Математичне моделювання і обчислювальний експеримент //Науковий вісник Ужгородського університету. – Сер. Математика і інформатика. – 2005. – вип. 10-11. – С. 4–8.

Одержано 08.09.2012

УДК 519.21, 519.718

Ю. М. Перестюк (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

ПРО РОЗРИВНІ КОЛИВАННЯ В ОДНІЙ ІМПУЛЬСНІЙ СИСТЕМІ

We study the existence of oscillatory solutions of a system of differential equations with impulse perturbation.

В роботі досліджується існування коливних розв'язків однієї системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням.

Розглянемо двовимірну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\dot{x_1} = Ax + \epsilon f_0(x), \qquad x_2 \neq kx_1; \quad \Delta x\Big|_{x_2=kx_1} = Bx, \tag{1}$$

в якій $x = col(x_1, x_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad f_0(x) = \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

В роботі [1] досліджено достатні умови існування одно- і двоімпульсних циклів у випадку, коли особлива точка відповідної лінійної диференціальної системи є сідлом. Виявляється, що аналогічні дослідження можна провести, коли ця точка є вузлом. Тут ми розглядаємо випадок виродженого вузла, причому вважатимемо цей вузол асимптотично стійким, тобто вважатимемо, що $\lambda < 0$.

Зауважимо, що лінійне однорідне відображення $(E + B) : x \quad \to \quad (E + B)x$ площини (x_1Ox_2) в себе переводить пряму $x_2 = kx_1$ в пряму $x_2 = \mu x_1$, де коефіцієнти k і μ пов'язані між собою рівністю

$$\mu = \frac{k(1 + b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}}.$$

В лінійному випадку, тобто коли $\epsilon = 0$ система (1) досліджена нами в [2].

Зокрема, тут встановлено, що поведінка розв'язків визначається числом

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda}.$$

Якщо це число за модулем менше від одиниці, то всі розв'язки, що виходять із точок прямої $x_2 = \mu x_1$, з часом прямують до нуля, коли $t \to \infty$. Якщо ж $|\gamma| > 1$, то всі такі розв'язки прямують до нескінченності, коли $t \to \infty$.

Значенню $|\gamma| = 1$ відповідають періодичні розв'язки. Коли $\gamma = 1$, то в системі є однопараметрична сім'я одноімпульсних циклів, кожен з яких - кусок кривої

$$x_2 = x_1\left(\mu + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{x_1}{x_1^0}\right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1.$$

Рух фазової точки по такому циклу є періодичним з періодом $T = k - \mu$.

Якщо ж

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = -1,$$

то в системі є однопараметрична сім'я двоімпульсних циклів, відмінних від одноімпульсних.

Двоімпульсний цикл задається двома кусками фазових кривих:

$$x_2 = x_1\left(\mu + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{x_1}{x_1^0}\right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \le \frac{x_1}{x_1^0} \le 1,$$

і

$$x_2 = -x_1\left(\mu + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{-x_1}{x_1^0}\right), \quad -1 \le \frac{x_1}{x_1^0} \le -e^{(k-\mu)\lambda}.$$

Рух фазової точки по кожному двоімпульсному циклу є періодичним з періодом $T = 2(k-\mu)$.

При $\epsilon \neq 0$ траєкторія системи (1), що вийшла з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$ не обов'язково перетне пряму $x_2 = kx_1$ в точці (x_1^*, kx_1^*)

$$x_1^* = x_1^0 e^{\lambda(k-\mu)}.$$

Вона може перетнути цю пряму в точці, абсциса якої по модулю менша від $|x_1^*|$ (фазова точка наближається до початку координат), або ж в точці, абсциса якої по модулю більша від $|x_1^*|$ (фазова точка віддаляється від початку координат). Щоб з'ясувати, який з цих випадків має місце розглянемо приріст величини

$$E(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{\lambda}\ln|x_1|$$

за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$ досягне прямої $x_2 = kx_1$, рухаючись по траєкторії системи (1). Виведемо наближену формулу для приросту величини $E(x_1, x_2)$.

Обчислимо повну похідну функції $E(x_1, x_2)$ вздовж розв'язків системи (1)

$$\frac{d}{dt}E(x_1, x_2) = \frac{\epsilon}{x_1^2}[x_1 g(x_1, x_2) - (x_2 + \frac{x_1}{\lambda})f(x_1, x_2)].$$

Траєкторія системи (1), що виходить з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, на величину порядка ϵ відрізняється від куска лінії

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^0}(\mu x_1^0 + \frac{x_1^0}{\lambda}\ln\frac{x_1}{x_1^0}),$$

а тому приріст функції $E(x_1, x_2)$ з точністю до величини $O(\epsilon)$ дорівнює значенню інтеграла від $\dot{E}(x_1, x_2)$, обчисленого по куску цієї лінії, що знаходиться між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$, тобто

$$\Delta E = \epsilon \int\limits_0^{k-\mu} \frac{e^{-2\lambda\tau}}{(x_1^0)^2}[x_1^0 e^{\lambda\tau} g(x_1^0 e^{\lambda\tau}, (x_2^0 + x_1^0\tau)e^{\lambda\tau}) -$$

$$-(x_2^0 + x_1^0\tau + \frac{x_1^0}{\lambda})e^{\lambda\tau} f(x_1^0 e^{\lambda\tau}, (x_2^0 + x_1^0\tau)e^{\lambda\tau}]d\tau + \epsilon^2 =$$

$$= \epsilon F(x_1^0) + 0(\epsilon^2),$$

де

$$F(x_1^0) = \frac{1}{x_1^0}\int\limits_0^{k-\mu} e^{-\lambda\tau}[g(x_1^0e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau}) -$$

$$(\mu+\tau+\frac{1}{\lambda})f(x_1^0e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau})]d\tau.$$

За властивостями функції $F(x_1^0)$ можна робити висновок про поведінку розв'язків системи (1) (при достатньо малих значеннях параметра $\epsilon > 0$). Якщо ця функція додатна при $x > 0$ і від'ємна при $x < 0$, то в секторі між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$ відбувається коливання з наростаючою амплітудою, а якщо ця функція від'ємна при $x > 0$ і додатна при $x < 0$, то ці коливання загасаючі. Точки x_1^*, в яких $F(x_1^*) = 0$ породжують при малих ϵ ізольовані одноімпульсні цикли в системі (1).

Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Нехай в системі* (1) $\lambda < 0$, *функції* $f(x_1, x_2)$ *і* $g(x_1, x_2)$ *є неперервно диференційовними в деякому крузі* $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ *і параметри системи такі, що* $\mu < k$ *і виконується рівність*

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = 1.$$

Якщо рівняння $F(x_1) = 0$ *має ізольований корінь* x_1^*, *такий, що* $F'(x_1^*) \neq 0$ *то при достатньо малих значеннях параметра* $\epsilon > 0$ *система* (1) *має розривний одноімпульсний цикл і цей цикл є асимптотично стійким, якщо* $F'(x_1^*) < 0$ *і* $x_1^* > 0$, *або ж* $F'(x_1^*) > 0$, *а* $x_1^* < 0$, *і нестійким, якщо* $F'(x_1^*) > 0$ *і* $x_1^* > 0$ *або ж* $F'(x_1*) < 0$ *і* $x_1^* < 0$. *Цей цикл міститься в деякому* $U(\epsilon)$*-околі* ($U(\epsilon) \to 0$, *коли* $\epsilon \to 0$) *лінії*

$$x_2 = x_1(\mu + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{x_1}{x_1^*}), \qquad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq 1.$$

З'ясуємо питання існування двоімпульсних циклів в системі рівнянь (1). В лінійній системі (при $\epsilon = 0$) такі цикли є, коли параметри системи задовольняють рівність $\gamma = -1$.

Як і при дослідженні одноімпульсних циклів розглянемо приріст величини $E(x_1, x_2)$ за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$ досягне прямої $x_2 = kx_1$, рухаючись по траєкторії системи (1), а після результату імпульсної дії, рухаючись по траєкторії системи (1), знову попаде на пряму $x_2 = kx_1$. Використовуючи вираз повної похідної від $E(x_1, x_2)$, складеної в силу системи (1), обчислюємо приріст $E(x_1, x_2)$:

$$\Delta E = \epsilon F_1(x_1^0) + O(\epsilon^2),$$

де

$$F_1(x_1^0) = \frac{1}{x_1^0}\int\limits_0^{k-\mu} e^{-\lambda\tau}((g(x_1^0e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau}) - g(-x_0e^{\lambda\tau}, -x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau})$$

$$-(\mu+\tau+\frac{1}{\lambda})(f(x_1^0e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau}) - f(-x_1^0e^{\lambda\tau}, -x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau})))d\tau.$$

А тому справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Нехай в системі* (1) $\lambda < 0$, *функції* $f(x_1, x_2)$ *і* $g(x_1, x_2)$ *неперервно диференційовні в деякому крузі* $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ *і параметри системи такі, що* $\mu < k$ *і виконується рівність*

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = -1.$$

Якщо рівняння $F_1(x_1) = 0$ *має ізольований корінь* x_1^*, *такий, що* $F_1'(x_1^*) \neq 0$ *то при достатньо малих значеннях параметра* $\epsilon > 0$ *система* (1) *має розривний двоімпульсний цикл і цей цикл є асимптотично стійким, якщо* $F_1'(x_1^*) < 0$ *і* $x_1^* > 0$, *або ж* $F'(x_1^*) > 0$ *і* $x_1^* < 0$ *і нестійким, якщо* $F_1'(x_1^*) > 0$ *і* $x_1^* > 0$ *або ж* $F'(x_1^*) < 0$ *і* $x_1^* < 0$. *Цей цикл належить деякому* $U(\epsilon)$*-околу* ($U(\epsilon) \to 0$, *коли* $\epsilon \to 0$ *ліній:*

$$x_2 = x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^*} \right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq 1.$$

і

$$x_2 = -x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{-x_1}{x_1^*} \right), \quad -1 \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq -e^{(k-\mu)\lambda}.$$

Як приклад розглянемо можливість коливних рухів в системі маятникового типу з великим тертям:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \epsilon f(x, \dot{x})$$

Зрозуміло, що при достатньо малих значеннях параметра $\epsilon > 0$ ніяких коливних рухів в такій системі не буде, бо при $\epsilon = 0$ (лінійний випадок) маятник не здійснює коливань, а зразу прямує до нульового положення рівноваги: його швидкість $\dot{x}(t)$ з часом змінює знак не більше одного разу. Разом з тим за рахунок імпульсного збурення в системі можливі коливання.

Нехай маятник піддається імпульсному збуренню в момент проходження ним положення $\dot{x} = 0$ в фазовій площині $(xO\dot{x})$. Відносно імпульсного збурення вважатимемо, що воно приводить до збільшення (зменшення) швидкості руху на величину, пропорційну положенню x, з коефіцієнтом пропорційності α.

Таким чином, маємо систему з імпульсним збуренням:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \epsilon f(x, \dot{x}), \quad \dot{x} \neq 0; \ \Delta\dot{x}\Big|_{\dot{x}=0} = \alpha x. \tag{2}$$

При $\epsilon = 0$ ця система досліджена нами в [2], де показано, що при $\alpha = \alpha^*$, тут α^* - від'ємний корінь рівняння

$$(1 + \alpha)e^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} = -1, \tag{3}$$

в системі є однопараметрична сім'я двоімпульсних циклів, тобто маятник з імпульсним збуренням здійснює періодичні коливання з періодом

$$T = \frac{2\alpha^*}{1 + \alpha^*}.$$

З'ясуємо можливість коливання в системі (2) при $\epsilon > 0$, за умови, що $\alpha = \alpha^*$. Заміна змінних

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

зводить систему (1) до вигляду

$$\dot{u} = -u - \epsilon f(-u - v, v), \quad v \neq 0, \quad \dot{v} = u - v + \epsilon f(-u - v, v),$$

$$\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Bigg|_{v=0} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \alpha^* \\ -\alpha^* & -\alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Безпосередньо переконуємося, що

$$\mu = \frac{b_{21} + k(1 + b_{22})}{1 + b_{11} + kb_{12}} = \frac{b_{21}}{1 + b_{11}} = \frac{-\alpha^*}{1 + \alpha^*},$$

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = (1 + \alpha^*)e^{-\frac{\alpha^*}{1+\alpha^*}},$$

а

$$F_1(u_0) = \frac{1}{u_0} \int\limits_0^{-\mu} e^\tau ([f((1 - \mu - \tau)u_0 e^{-\tau}, \quad (\mu + \tau)u_0 e^{-\tau}) -$$

$$-f(-(1 - \mu - \tau)u_o e^{-\tau}, \quad -(\mu + \tau)u_0 e^{-\tau})] +$$

$$+(\mu + \tau - 1)[f(-(1 + \mu + \tau)u_0 e^{-\tau}, \quad (\mu + \tau)u_0 e^{-\tau}) -$$

$$-f((1 + \mu + \tau)u_0 e^{-\tau}, \quad -(\mu + \tau)u_0 e^{-\tau})].)d\tau$$

Цей вираз спрощується, коли функція $f(x, \dot{x})$ задовольняє додаткову умову:

$$f(-x, -\dot{x}) = -f(x, \dot{x})$$

У цьому випадку

$$F_1(u_0) = \frac{2}{u_0} \int\limits_0^{-\mu} e^\tau [f((1 - \mu - \tau)u_0 e^{-\tau}, (\mu + \tau)u_0 e^{-\tau}) -$$

$$-(1 - \mu - \tau)f(-(1 + \mu + \tau)u_0 e^{-\tau}, (\mu + \tau)u_0 e^{-\tau})]d\tau,$$

і ізольовані нулі функції $F_1(u_0)$ при достатньо малих значеннях параметра $\epsilon > 0$ породжують двоімпульсні цикли в системі (2).

Розглянемо конкретну систему з імпульсним збуренням

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}, \quad \dot{x} \neq 0,$$

$$\Delta\dot{x}\Bigg|_{\dot{x}=0} = \alpha^* x,$$

в якій α^* - від'ємний корінь рівняння (3).

Обчислюємо функцію $F_1(u_0)$, враховуючи, що

$$f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x}, \quad f(-u - v, v) = (1 - (u + v)^2)v.$$

Маємо

$$F_1(u_0) = \frac{2}{u_0} \int\limits_0^{-\mu} e^\tau (\mu + \tau)[1 - (1 + \mu + \tau)^2 u_0^2 e^{-2\tau}](\mu + \tau)u_0 e^{-\tau} 2\tau =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{-\mu}(\mu+\tau)^2[1-(1+\mu+\tau)^2u_0^2e^{-2\tau}]d\tau =$$

$$= 2\int\limits_{\mu}^{0}[s^2-s^2(1+s)^2e^{-2s}e^{2\mu}u_0^2]d\tau = -\frac{2}{3}\mu^3 - bu_0^2,$$

де через b позначено додатну величину

$$b = 2e^{\mu}\int\limits_{\mu}^{0}s^2(1+s)^2e^{-2s}ds.$$

Таким чином, рівняння $F_1(u_0) = 0$ має два ізольовані корені

$$u_1^* = \sqrt{-\frac{2}{3}\frac{\mu^3}{b}} \quad \text{і} \quad u_2^* = -\sqrt{-\frac{2}{3}\frac{\mu^3}{b}},$$

причому

$$F_1'(u_1^*) < 0, \quad \text{а} \quad F'(u_2^*) > 0.$$

Кожен з цих коренів породжує при достатньо малих значеннях $\epsilon > 0$ один і той самий двоімпульсний асимптотично стійкий цикл.

1. *Перестюк Ю.М.* Розривні коливання в одній імпульсній системі// Нелінійні коливання. – 2012. – Том. 15, №4. – С. 494-503.
2. *Kateryna Mamsa, Yuriy Perestyuk,* A certain class of discontinuous dynamical systems in the plane, Mathematical analysis, differential equations and their applications, Sofia, 2011, 121-128 p.
3. *A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk,* Impulsive Differential Equations, Singapore, World Scientific, 1995, 462 p.
4. *Nikolai A. Perestyuk, Viktor A. Plotnikov, Anatolii M. Samoilenko, Natalia V. Skripnik,* Differential Equations With Impulse effects, Multivalued Right-Hand Sides With Discontinuities, De Gruyter, 2011, 307 p.

Одержано 11.10.2012

УДК 517.9

М. В. Прохоренко (Національний ун-т "Львівська політехніка")
А. Я. Вус (Львівський національний ун-т імені Івана Франка)

ПРОЦЕС ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СТЕРЖНЯ З ІМПУЛЬСНИМ ПІДПОМПОВУВАННЯМ У НЕФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

We study the process of heat conduction in a bar with the continuously distributed sources of heat and with impulsive pumping in moments, where the regulative functional amounts to critical level. The solutions, for which a pulse action takes place infinitely often are found. Conditions of existence of these solutions are established. The equation for finding the moment of pulse action is obtained.

У роботі розглянуто процес поширення тепла в стержні з неперервно розподіленими джерелами тепла та з імпульсним підпомповуванням у моменти, коли заданий регулюючий функціонал досягає критичного рівня. Встановлено умови існування розв'зків, для яких імпульсна дія відбувається нескінченну кількість разів, побудовано ці розв'язки, записано рівняння для відшукання моменту імпульсної дії.

Вступ. При побудові математичної моделі існуючих фізичних, технічних, біологічних та ін. процесів із швидкозмінними збуреннями виникає необхідність вивчення диференціальних рівяннь з імпульсною дією. Розглядають вплив імпульсної дії як на звичайні диференціальні рівняння [1, 2], так і на рівняння в частинних похідних [3–7]. У [3, 4] розглянуто поширення тепла в обмеженому стержні з неперервно розподіленими джерелами тепла, здатними у фіксовані моменти часу "миттєво"змінити температуру. Процес охолодження стержня з підвищенням температури в нефіксовані моменти часу, а саме в моменти коли заданий теплорегулюючий функціонал досягне критичного рівня, досліджено в [6, 7].

У цій роботі продовжено дослідження розпочаті в [7]. Розглянуто процес поширення тепла в стержні з неперервно розподіленими джерелами тепла, а імпульсна дія регулюється заданим функціоналом. Встановлено умови існування розв'зків, для яких імпульсна дія відбувається нескінченну кількість разів, побудовано ці розв'язки, записано рівняння для відшукання моменту імпульсної дії.

1.Формулювання задачі. Розглянемо задачу для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x,t\right), \quad (x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

з початковою і граничними умовами

$$u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$u\left(0,t\right) = u\left(l,t\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

де $u\left(x,t\right)$ - температура стержня в точці з абсцисою x в момент часу t; a, l - додатні сталі, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; функція $u_0 \in C\left([0,l]\right)$, має кусково-неперервну похідну для $x \in [0,l]$ та виконується умова узгодженості $u_0\left(0\right) = u_0\left(l\right) = 0$;

функція f неперервна в області $[0, l] \times \mathbb{R}_{+}$, має кусково-неперервні похідні по x для $x \in [0, l]$ та $f(0, t) = f(l, t) = 0$.

За регулюючий функціонал візьмемо

$$I_u(t) = \int\limits_0^l \beta(x)\, u(x, t)\, dx, \tag{4}$$

де $\beta \in C[0, l]$, має кусково-неперервну похідну для $x \in [0, l]$. В моменти, коли $I_u(t)$ досягає заданого "критичного значення" $I_0 > 0$, в середовище миттєво надходить додаткова кількість тепла за законом

$$\left[u(x, t+0) - u(x, t-0)\right]\big|_{I_u(t-0)=I_0} = \alpha(x), \tag{5}$$

де $x \in [0, l]$, $\alpha \in C[0, l]$ та має кусково-неперервну похідну першого порядку для $x \in [0, l]$, крім того $\alpha(0) = \alpha(l) = 0$.

Через $t_k, k \in \mathbb{N}$ позначимо моменти імпульсної дії, тобто моменти коли $I_u(t_k) = I_0$.

Під розв'язком задачі (1) – (2), (5) розуміємо функцію $u = u(x, t)$ двічі неперервно диференційовну за змінною x та неперервно диференційовну за змінною t в кожній області $D_k = \{(x, t)\, | x \in [0, l], t \in (t_k, t_{k+1}),$
$I_u(t) \neq I_0, t_0 = 0\}, k = 0, 1, 2, \ldots$, крім того функція u та її похідна u_t неперервні зліва в точках $t = t_k, k \in \mathbb{N}$.

Розв'язок задачі (1) – (2), (5) існує, єдиний та визначений в області $D = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k$ як розв'язок задачі (1), (3) для рівняння теплопровідності в кожній області $D_k = \{(x, t)\, | x \in [0, l],\ t \in (t_k, t_{k+1}), I_u(t) \neq I_0, t_0 = 0\}, k = 0, 1, 2, \ldots$ з початковою умовою:

– (2), якщо $k = 0$ і $I_u(0) \neq I_0$;

– $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) + \alpha(x),\ x \in [0, l]$, якщо $k = 0$ і $I_u(0) = I_0$;

– $u_k(x) = u(x, t_k - 0) + \alpha(x),\ x \in [0, l]$, якщо $k = 1, 2, \ldots$ і $I_u(t_k - 0) = I_0$.

2. Асимптотична поведінка моментів імпульсної дії.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:* $I_u(0) \geqslant I_0$, $\int\limits_0^l \alpha(x)\beta(x)\, dx > 0$ *та існує стала* $M_0 > 0$, *що функція* f *задовольняє співвідношення*

$$|f(x, t)| \leqslant M_0 e^{-t}.$$

Тоді $t_k \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$.

Доведення. Розв'язок задачі (1) – (2) шукаємо у вигляді:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) \sin\frac{j\pi}{l}x. \tag{6}$$

Функції $T_j(t)$ для кожного $j = 1, 2, \ldots$ визначаються як розв'язки диференціального рівняння

$$T_j'(t) + \left(\frac{a\pi j}{l}\right)^2 T_j(t) = f_j(t),$$

з початковою умовою

$$T_j\left(0\right)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0\left(x\right)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx=u_j$$

та мають вигляд

$$T_j\left(t\right)=u_je^{-bj^2t}+\int\limits_0^t f_j\left(\tau\right)e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau, \tag{7}$$

$$f_j\left(t\right)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f\left(x,t\right)\sin\frac{j\pi}{l}xdx, b=\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2.$$

Підставивши (7) у (6), знаходимо розв'язок задачі (1) – (2) для $(x,t)\in[0,l]\times\mathbb{R}_+$, а саме

$$u\left(x,t\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{u_je^{-bj^2t}+\int\limits_0^t f_j\left(\tau\right)e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau\right\}\sin\frac{j\pi}{l}x. \tag{8}$$

При підстановці (8) в (4) одержуємо вигляд регулюючого функціоналу

$$I_u\left(t\right)=\frac{l}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{u_je^{-bj^2t}+\int\limits_0^t f_j\left(\tau\right)e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau\right\}\beta_j, \tag{9}$$

де $\beta_j=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \beta\left(x\right)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx.$

Оскільки $\left|f\left(x,t\right)\right|\leqslant M_0e^{-t}$, то вірною є оцінка

$$\left|\int\limits_0^t f_j\left(\tau\right)e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau\right|\leqslant\frac{M_0e^{-t}}{bj^2}\left(1-e^{-bj^2t}\right)\leqslant\frac{M_0e^{-t}}{bj^2}.$$

Таким чином, справджується $\lim\limits_{t\to+\infty}I_u\left(t\right)=0$. Отже, при заданому I_0 можливі наступні випадки:

а) $I_0>I_u\left(0\right)$, тоді імпульси відсутні і $I_u\left(t\right)\to0$ при $t\to+\infty$;

б) $I_0\leqslant I_u\left(0\right)$, тоді існує момент часу $t=t_1\geqslant0$, коли здійснюється перший імпульс. Момент t_1 шукаємо з рівняння

$$\frac{l}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{u_je^{-bj^2t}+\int\limits_0^t f_j\left(\tau\right)e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau\right\}\beta_j=I_0.$$

Крім того

$$I_u\left(t_1+0\right)=\int\limits_0^l\left(u\left(x,t_1-0\right)+\alpha\left(x\right)\right)\beta\left(x\right)dx=I_0+\int\limits_0^l\alpha\left(x\right)\beta\left(x\right)dx>I_0. \tag{10}$$

Для $t > t_1$ розв'язуємо задачу (1), (3), а замість (2), з урахуванням (5), маємо умову

$$u\left(x,t_1\right)=u_1\left(x\right)+\alpha\left(x\right),$$

де $u_1\left(x\right)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left\{u_je^{-bj^2t_1}+\int\limits_0^{t_1}f_j\left(\tau\right)e^{-bj^2\left(t_1-\tau\right)}d\tau\right\}\sin\frac{j\pi}{l}x.$

Розв'язок задачі (1) – (2), (5) для $(x,t)\in[0,l]\times[t_1,t_2)$ набуде вигляду

$$u\left(x,t\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{u_je^{-bj^2t}+\int\limits_0^{t}f_j\left(\tau\right)e^{-bj^2\left(t-\tau\right)}d\tau+\right.$$

$$\left.+\alpha_je^{-bj^2\left(t-t_1\right)}\right\}\sin\frac{j\pi}{l}x,\ \alpha_j=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l}\alpha\left(x\right)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx.$$

Для регулюючого функціоналу

$$I_u\left(t\right)=\frac{l}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{u_je^{-bj^2t}+\int\limits_0^{t}f_j\left(\tau\right)e^{-bj^2\left(t-\tau\right)}d\tau++\alpha_je^{-bj^2\left(t-t_1\right)}\right\}\beta_j \qquad (11)$$

справджується $\lim\limits_{t\to+\infty}I_u\left(t\right)=0$. Тому, з урахуванням (10), існує наступний момент часу $t_2\left(t_2>t_1\right)$, коли $I_u\left(t_2\right)=I_0$. Крім того

$$I_u\left(t_2+0\right)=\int\limits_0^{l}\left(u\left(x,t_2-0\right)+\alpha\left(x\right)\right)\beta\left(x\right)dx=I_0+\int\limits_0^{l}\alpha\left(x\right)\beta\left(x\right)dx>I_0.$$

Таким чином, виконання умов $\int\limits_0^{l}\alpha\left(x\right)\beta\left(x\right)dx>0$ та $f\left(x,t\right)=O\left(e^{-t}\right)$ при $t\to+\infty$ забезпечують для заданих функцій $\alpha\left(x\right),\beta\left(x\right),f\left(x,t\right)$ існування нескінченної послідовності імпульсів задачі (1) – (2), (5), моменти виникнення яких позначаємо $(0\leqslant)\,t_1<t_2<t_3<\ldots$.

Продовжуючи аналогічно міркування, одержимо розв'язок задачі (1) – (2), (5) для $(x,t)\in[0,l]\times[t_k,t_{k+1}),(k=0,1,\ldots;\ t_0=0)$, а саме

$$u\left(x,t\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{u_je^{-bj^2t}+\int\limits_0^{t}f_j\left(\tau\right)e^{-bj^2\left(t-\tau\right)}d\tau+\alpha_j\sum_{i=1}^{k}e^{-bj^2\left(t-t_i\right)}\right\}\sin\frac{j\pi}{l}x. \qquad (12)$$

Регулюючий функціонал при $t_k\leqslant t<t_{k+1}$ має вигляд

$$I_u\left(t\right)=\frac{l}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{u_je^{-bj^2t}+\int\limits_0^{t}f_j\left(\tau\right)e^{-bj^2\left(t-\tau\right)}d\tau+\alpha_j\sum_{i=1}^{k}e^{-bj^2\left(t-t_i\right)}\right\}\beta_j \qquad (13)$$

і $\lim\limits_{t\to+\infty}I_u\left(t\right)=0$. Цим і доводиться твердження теореми.

Теорема 2. *Нехай існує стала* $M_1 > 0$ *така, що функція* f *задовольняє співвідношення* $|f(x,t)| \leqslant M_1$, *виконуються умови* $\int\limits_0^l \alpha(x)\beta(x)\,dx > 0$ *та* $I_u(0) \geqslant I_0 \geqslant \dfrac{2M_1 l^2}{a^2\pi^2}$. *Тоді* $t_k \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$.

Доведення. Проводимо його аналогічно до доведення теореми 1, здійснивши заміну сталої M_0 на M_1. Тоді у співвідношеннях (9), (11) та (13) справджується нерівність $\lim\limits_{t\to+\infty} I_u(t) \leqslant 2M_1/b$, оскільки

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_j(\tau)\,e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\frac{M_1}{bj^2}\left(1-e^{-bj^2t}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\frac{M_1}{bj^2} \leqslant \frac{2M_1}{b}, \qquad b = \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2.$$

Цим і доводимо твердження теореми.

Оскільки функції u_0 та α неперервні, мають кусково-неперервну похідну та перетворюються в нуль на кінцях відрізка $[0,l]$, то ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^l u_0(x)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx\right)\sin\frac{j\pi}{l}x, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^l \alpha(x)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx\right)\sin\frac{j\pi}{l}x$$

збігаються для $x \in [0,l]$ абсолютно і рівномірно [8, с.201].

Оскільки для $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$, маємо $t - t_i \geqslant 0$. Звідси, справедливі нерівності $0 < e^{-bj^2(t-t_i)} \leqslant 1$ та, відповідно, тригонометричні ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^l u(x)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx\right)e^{-bj^2t}\sin\frac{j\pi}{l}x,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^l \alpha(x)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx\right)e^{-bj^2(t-t_i)}\sin\frac{j\pi}{l}x$$

також збігаються в області $\Omega = \left\{(x,t) : x \in [0,l], t \in \bigcup\limits_{i=0}^{\infty}(t_i, t_{i+1})\right\}$ абсолютно і рівномірно для кожного $i = 1, 2, \ldots$ [3].

З умов, накладених на функцію $f(x,t)$, випливає оцінка

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(x,\tau)\sin\frac{j\pi}{l}xe^{-bj^2(t-\tau)}dxd\tau\right| \leqslant \frac{M}{j^2}.$$

Тоді ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(x,\tau)\sin\frac{j\pi}{l}xe^{-bj^2(t-\tau)}dxd\tau\right)\sin\frac{j\pi}{l}x \tag{14}$$

мажорується збіжним рядом $M \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}$. Ряд (14) збігається абсолютно і рівномірно для $(x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}_+$.

Таким чином, функція u, визначена формулою (12), неперервна в області Ω, має розриви першого роду при $t = t_i \;\; (i = 1, 2, \ldots)$, задовольняє початкову і граничні умови (3) – (2) та умову імпульсної дії (5). Крім того, функція u задовольняє рівняння (1) в області $(0,l) \times [0,+\infty)$, оскільки ряди, одержані із (12) почленним диференціюванням за x два рази та за t один раз, збігаються абсолютно і рівномірно в області $(0,l) \times [0,+\infty)$. Цей факт випливає з того, що для довільного $t \in (t_i, t_{i+1})\,,\;\; (i = 1, 2, \ldots)$, і досить великого натурального j справедливі нерівності

$$0 < j^2 e^{-bj^2 t} < 1,\; 0 < j^2 e^{-bj^2 (t-t_i)} < 1,\; i = 1, 2, \ldots .$$

Відповідно, формула (12) описує процес розповсюдження тепла в обмеженому стержні, що знаходиться під дією джерел тепла, на кінцях стержня підтримується нульова температура і, коли температура стержня знижується до рівня I_0, відбувається миттєве збільшення температури стержня в точці з абсцисою x на величину $\alpha\,(x)$.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием – К. : Вища шк. – 1987. – 287 с.
2. *Laksmikantam V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific. – 1989. – 273 p.
3. *Елгондиев К. К., Пильтяй М. М., Хомченко Л. В.* Распространение тепла в однородном стержне с импульсным воздействием // Крайовізадачі для диф. р-нь : зб.наук.пр. – Чернівці: Прут. – 2002. – Вип. 10. – С. 59 - 65.
4. *Елгондыев К. К., Самойленко В. Г.* Периодические колебания струны с импульсным воздействием // Крайові задачі для диф. р-нь : зб. наук. пр. – Чернівці: Прут. – 2006. – Вип. 14. – С. 53 - 61.
5. *Кирилич В. М., Мышкис А. Д., Прохоренко М. В.* Колебания мембраны под воздействием импульсных сил / // Укр. матем. журн. – 2009. – Т. 61, № 8. – С. 1148 - 1153.
6. *Мышкис А. Д.* Процес теплопроводности с авторегулируемой импульсной поддержкой // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 2. – С. 35–43.
7. *Мороз М. В.* Одна задача для рівняння теплопровідності з імпульсною дією // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб.наук.пр. – К. : Ін-т математики НАН України. – 1998. – Вип. 1(17). – С. 170 - 177.
8. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики – М. : Наука, 1966.– 724 с.

Одержано 02.10.2012

УДК 519.17

М. Ф. Семенюта (Кіровоградська льотна академія НАУ)

Циклічні розклади графа K_{19}

In this article considers the tasks of construction and enumeration of cyclic decompositions of graph K_{19} on 9-edges graphs. The lower valuations for the number of nonisomorphic (K_{19}, G)-decompositions are found, when G is the prism and $G = B$ is the periwinkle.

В даній роботі розглядаються задачі побудови і переліку циклічних розкладів графа K_{19} на 9-реберні графи. Знайдено нижню оцінку числа неізоморфних циклічних (K_{19}, G)-розкладів, де G=П - призма, G=В - барвінок.

Вступ. Розклади графів знаходять застосування при побудові ефективних кодів, плануванні експериментів і комунікаційних схем та в багатьох інших задачах [1]. Наприклад, такі практичні задачі [2], як відбір оптимального, у певному розумінні, комбінаторного об'єкта з множини існуючих; побудова та перевірка гіпотез про комбінаторні конструкції; цілеспрямований пошук хімічних сполук, найкращих механічних систем, ефективних кодів і т. ін., пов'язані з конструктивним переліком комбінаторних конфігурацій.

Дослідження розкладів повних графів на графи малих порядків розпочалося в середині минулого сторіччя з робіт А. Котціга, А. Роса та продовжуються до теперішнього часу. Найбільшого успіху досягнуто, якщо в якості компонент розкладу виступають цикли, зірки, колеса, дерева. В статті розглянуто задачі побудови і переліку циклічних розкладів графа K_{19} на 9-реберні графи. За мету поставлено знайти нижню оцінку числа неізоморфних розкладів K_{19} на графи, ізоморфні 9-реберному графу G та їх списки для випадків, коли G=П - трикутна призма і $G = B$ - барвінок.

Постановка проблеми та попередні відомості. Будемо розглядати скінченні неорієнтованні графи. Під (H, Q)-розкладом графа H на графи із сукупності $Q = \{q_1, q_2, ..., q_k\}$ розуміємо розбиття множини ребер графа H на такі підмножини, що породжені ними підграфи (компоненти розкладу) попарно пореберно не перетинаються і кожний з них ізоморфний одному з елементів множини Q. Загальна кількість компонент у розкладі - це розмір (або ранг) розкладу.

У 70-х роках минулого століття розпочалося вивчення розкладів графів на підграфи із заданої множини. Серед основних дослідників можна назвати Н.деБрьойна, П.Ердьоша, Л.Байнеке, Д.Босака, А.Роса, С.Знама, Р.Вільсона [3], [4] та багатьох інших. В теорії розкладів виділяють три види задач: 1) визначення умов існування, 2) знаходження способів побудови 3) розробка методів переліку розкладів. Перші результати пов'язані із знаходженням умов існування розкладів та методів їх побудови. Найбільш досліджені розклади повних графів. Існування розкладів повних графів на графи малих порядків підсумовані в роботах [5], [6]. Розробка методів комп'ютерного переліку разом з рекурсивними методами, методами породження комбінаторних об'єктів та із застосуванням інваріантів дозволила одержати значні досягнення в розв'язанні задач 2 та 3. Автором ці задачі розглянуто в наступному розділі відносно циклічних розкладів повного графа на 9-реберні графи.

Означення 1. *Розкладом графа K_n на графи, ізоморфні графові G, називають розбиття множини ребер графа K_n на підмножини, кожна з яких породжує підграф (компоненту розкладу), ізоморфний G, і кожне ребро K_n належить одній і тільки одній компоненті розкладу. Такий розклад називатимемо (K_n, G)-розкладом.*

Означення 2. *(K_n, G)-розклад називають циклічним, якщо всі його компоненти одержуються з однієї базової (або кількох базових) дією на неї степенями деякої циклічної підстановки α вершин графа K_n. Вказана циклічна підстановка називається твірною розкладу, а її степені суть автоморфізми (K_n, G)-розкладу.*

Кожна базова компонента циклічного (K_n, G)-розкладу під дією степенів підстановки α породжує орбіту, причому дві різні орбіти не перетинаються. Для існування такого розкладу, де $G = (V, E)$, $|E| = q$ необхідно виконання умови $n(n-1) \equiv 0(mod2q)$.

Означення 3. *Два (K_n, G)-розклади R_1 та R_2 називаються ізоморфними, якщо існує взаємно однозначна відповідність між множинами вершин цих розкладів, яка переводить кожну компоненту розкладу R_1 у деяку компоненту розкладу R_2.*

При ізоморфізмі двох циклічних (K_n, G)-розкладів існує підстановка множини вершин графа K_n, яка здійснює відображення орбіт цих розкладів. Автоморфізм (K_n, G)-розкладу - це його ізоморфізм на себе. Таким чином, кожний автоморфізм (K_n, G)-розкладу є підстановкою множини вершин графа K_n, під дією якої кожна компонента цього розкладу переходить в себе або в іншу, зберігаючи відношення інцидентності.

Нехай $D(\sigma)$ непорожня множина D, на якій задана еквівалентність σ; $S(\tau)$ непорожня множина S з визначеною на ній еквівалентністю τ. Нехай f функція, яка задана на D і набуває значень в S. Функція f є інваріантом над $D(\sigma)$, якщо з $d_1(\sigma)d_2$ випливає $f(d_1)(\tau)f(d_2)$ для довільних d_1, d_2 з D. Надалі використовуємо поняття інваріанта у випадках, коли D скінченна множина комбінаторних конфігурацій (зокрема розкладів графів), σ ізоморфність у цій множині. Розрізнююча спроможність інваріанта полягає у наступному: якщо $f(d_1)(\tau)f(d_2)$ не виконується, маємо, що d_1, d_2 не σ-еквівалентні.

Для розрізнення комбінаторних конфігурацій використовують числові інваріанти (наприклад, такі, як хроматичне число, діаметр, радіус, порядок групи автоморфізмів графів), специфікаційні, графічні та інші інваріанти. Опишемо один із специфікаційних інваріантів, який застосовано при розв'язуванні задач ототожнення-розрізнення в множині (K_n, G)-розкладів наступного розділу. Нехай K_n - граф з множиною вершин V і множиною ребер E; R - один з його розкладів на копії, що ізоморфні графу G, а P_i та P_j - деякі компоненти цього розкладу.

Означення 4. *Граф $\varGamma_{ij}$ з множиною вершин $V(\varGamma_{ij}) = V(P_i) \cup V(P_j) \subseteq V$ і множиною ребер $E(\varGamma_{ij}) = E(P_i) \cup E(P_j) \subseteq E$ називають графом переплетень компонент P_i та P_j деякого (K_n, G)-розкладу.*

Розглянемо список усіх можливих попарно неізоморфних графів переплетень цього розкладу, записаних у певному порядку. Позначимо потужність одержаного списку k. Складові цього списку називаються типами переплетення компонент розкладу.

Означення 5. *Індексом компоненти* P *деякого розкладу* R *називають вектор* $(s_1, s_2, ..., s_k)$, *де* s_i *- кількість таких компонент у розкладі, які утворюють тип переплетення* i *з компонентою* P. *Очевидно,* $s_1 + s_2 + ... + s_k = t - 1$, *де* t *- число компонент у розкладі.*

Тоді таблиця

$$T(R) = \begin{pmatrix} s_1(1) & s_2(1) & \dots & s_k(1) & | & m_1 \\ s_1(2) & s_2(2) & \dots & s_k(2) & | & m_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1(p) & s_2(p) & \dots & s_k(p) & | & m_p \end{pmatrix}$$

в якій m_j означає число компонент у розкладі R, що мають індекс $(s_1(j), s_2(j), ..., s_k(j))$, є специфікаційним інваріантом у множині (K_n, G)-розкладів відносно ізоморфності розкладів. Індекси компонент у цій таблиці попарно різні і розташовані в порядку лексикографічного зростання.

Означення 6. *Якщо всі пари компонент розкладу мають тип переплетення* i, *то такий розклад називають* i*-гомогенним, індекси всіх його компонент однакові і мають вигляд* $(0, 0, \dots, 0, s_i, 0, ..., 0)$.

Для циклічного розкладу R всі його компоненти мають один і той самий індекс, а тому $p = 1$ і $T(R)$ - таблиця-рядок.

Методи побудови в сукупності із застосуванням інваріантів у багатьох випадках приводять до розв'язання задач переліку комбінаторних об'єктів. Під конструктивним переліком комбінаторних об'єктів деякого виду розуміють конструктивну побудову повного списку попарно неізоморфних об'єктів цього виду, наприклад, (K_n, G)-розкладів. Формою розв'язку задачі переліку комбінаторних конфігурацій є список, в якому всі перелічувані конфігурації розташовані в порядку лексикографічного зростання. Для отримання такого списку (K_{19}, G)-розкладів нами розроблено алгоритм на основі шаблонного представлення графа G порядку n. Граф G задається за допомогою двох об'єктів, перший з них є перестановкою $a_1, a_2, \dots, a_n$ стандартної множини вершин, а другий об'єкт являє собою шаблон графа G, тобто список пар номерів ij, $i < j$, де вказана пара належить шаблону тільки у випадку, коли $a_i a_j$ - ребро заданого графа. Якщо граф G має нетотожній автоморфізм, то його шаблонне представлення не єдине; тоді обирають одне, яке називають стандартним шаблонним представленням. Для забезпечення однозначності шаблонного запису графа G будемо застосовувати умови стандартності, які мають вигляд системи строгих нерівностей та призначені забезпечити певний порядок нумерації вершин у вершинних орбітах графа G.

Неізоморфні циклічні розклади графа K_{19} на компоненти певних видів. Подамо результати, що стосуються (K_{19}, G)-розкладів, де G=П та $G = B$ 9-реберні графи (призма та барвінок, відповідно). Розмір циклічного (K_n, G)-розкладу дорівнює $n(n-1)/2q$, а число його базових компонент обчислюється за формулою $(n-1)/2q$, де $q = V(G)$. За множину вершин графа K_{19} вибираємо стандартну множину 1, 2, …, 19 , а за циклічну підстановку - стандартну підстановку $\alpha = (1, 2, \ldots, 19)$. Застосуємо наступні міркування: розглянемо коло з 19 точками, що поділяють його на рівні дуги. Занумеруємо ці точки числами від 1 до 19, які будемо вважати вершинами графа K_{19}. Впишемо граф G у коло, одержимо конфігурацію, названу проекцією G в коло або базовою компонентою, яка відповідає підстановці α. Щоб одержати циклічний (K_{19}, G)-розклад, довжини всіх ребер базової компоненти повинні бути попарно різні. Під довжиною ребра (i, j) тут розуміємо число $d(i, j) = min(|i - j|, 19 - |i - j|)$.

Нехай граф G=П. Будемо позначати через $(abc–def)$ призму П, де a, b, c, d, e, f – вершини призми, abc, def її основи, вершини різних основ з'єднані ребрами ad, be, cf. Шаблон представимо наступним чином: $(ab, ac, ad, bc, be, cf, de, df, ef)$. Нехай P - довільна компонента циклічного розкладу R графа K_{19} на копії призми П. Розглянемо інваріант $T(R)$, описаний у попередньому розділі. Індексом компоненти P є вектор $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, де x_s - кількість таких компонент у певному розкладі R, які з компонентою P мають s спільних вершин, $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, і $T(R) = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, при цьому $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$. Для знаходження різних циклічних $(K_{19}, \text{П})$-розкладів R автором розроблено алгоритм 1.

Алгоритм 1. Знаходження різних циклічних (K_{19},П)-розкладів.

Вхідні дані. Граф П, заданий своїм шаблоном.

Вихідні дані. Список вершин компоненти циклічного (K_{19},П)-розкладу; кортеж довжин; список чисел, які є кількістю спільних вершин даної компоненти з іншими в розкладі; інваріант $T(R)$.

Крок 1. Заповнюємо масив m елементами $m[i] = i$, де $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Крок 2. Будуємо шаблон mn графа П.
$mn[1] := 1$; $mn[2] := 2$; $mn[3] := 1$; $mn[4] := 3$; $mn[5] := 1$; $mn[6] := 4$;
$mn[7] := 2$; $mn[8] := 3$; $mn[9] := 2$; $mn[10] := 5$; $mn[11] := 3$; $mn[12] := 6$;
$mn[13] := 4$; $mn[14] := 5$; $mn[15] := 4$; $mn[16] := 6$; $mn[17] := 5$; $mn[18] := 6$.

Крок 3. Будуємо кортеж довжин mg відповідно до шаблону. Для $i = 1, 2, \ldots, 9$ покладаємо $mg[i] = m[mn[2i - 1]] - m[mn[2i]]$. Якщо $mg[i] < 0$, то покладаємо $mg[i] = -mg[i]$, якщо ж $mg[i] > 9$, тоді $mg[i] := 19 - mg[i]$.

Крок 4. Якщо кортеж довжин mg містить однакові елементи, то методом перебору шукаємо масив m, елементи якого задовольняють умову $mg[i] \neq mg[j]$ для будь-яких i, j, що набувають значення від 1 до 9 і $i \neq j$. Якщо такий масив m знайдено, то m - базова компонента циклічного (K_{19},П)-розкладу, інакше переходимо до кроку 8.

Крок 5. Будуємо орбіту компоненти m і шукаємо число спільних вершин компоненти m з іншими компонентами орбіти.

Крок 6. Знаходимо специфікаційний інваріант - масив $T(R)$.

Крок 7. Виводимо одержані результати.

Крок 8. Вихід.

Алгоритм реалізовано з використанням програмного середовища Delphi. Результатом роботи програми є список з 1024 різних циклічних (K_{19},П)-розкладів, кожний з них представлено базовою компонентою, набором довжин ребер у відповідності до шаблону, числом спільних вершин базової компоненти з кожною компонентою її орбіти, інваріантом $T(R)$. На основі цього спуску складено таблицю 1, в якій подано розклади з різними значеннями $T(R)$.

Таблиця 1. Список (K_{19},П)-розкладів з різними значеннями $T(R)$

Базова призма	Набір довжин	Число спільних вершин	$T(R)$
1 2 4 - 5 11 16	1,3,4,2,9,7,6,8,5	212221212212122212	0 6 12 0 0 0
1 2 4 - 6 10 16	1,3,5,2,8,7,4,9,6	121322112211223121	0 8 8 2 0 0
1 2 5 - 6 8 17	1,4,5,3,6,7,2,8,9	213311211112113312	0 10 4 4 0 0
1 2 9 - 10 8 13	1,8,9,7,6,4,2,3,5	311111331133111113	0 12 0 6 0 0

З проведеного дослідження одержано наступний результат.

Теорема 1. *З точністю до ізоморфізму існують не менше, ніж чотири циклічних (K_{19},П)-розклади.*

Стандартний запис компоненти (K_{19}, B)-розкладу, являє собою кортеж $(aefg\ bcd)$, де a, b, c, d, e, f, g - вершини компоненти, $ac, ae, ag, bc, bg, cd, de, ef, fg$ - ребра використані у шаблоні. За результатами роботи програми, яка побудована за модифікацією алгоритму 1 (змінено довжина масиву m на одиницю та шаблон відповідно до графа B), одержано 3548 різних циклічних (K_{19}, B)-розкладів, на яких інваріант $T(R)$ набуває 11 різних значень, поданих у таблиці 2. Інваріант $T(R)$ вводиться аналогічно відповідному інваріанту для призм.

Таблиця 2. Список (K_{19}, B)-розкладів з різними індексами.

Базова призма	Набір довжин	Число спільних вершин	$T(R)$
1 2 4 9 19 12 6	1,3,8,2,4,5,9,7,6	233222232232222233	0 0 12 6 0 0
1 2 4 9 15 19 12	1,3,8,2,9,5,6,4,7	223222242242222322	0 0 14 2 2 0 0
1 2 4 8 13 19 10	1,3,7,2,8,4,5,6,9	232213233332312232	0 2 8 8 0 0 0
1 2 4 8 18 10 16	1,3,7,2,5,4,4,9,8,6	142223232232322241	0 2 10 4 2 0 0
1 2 5 10 4 11 19	1.4,9,3,2,5,6,7,8	422222124421222224	0 2 12 0 4 0 0
1 2 4 8 18 10 15	1,3,7,2,6,4,9,8,5	133133232232331331	0 4 4 10 0 0 0
1 2 4 8 14 19 10	1,3,7,2,8,4,6,5,9	231314223322413132	0 4 6 6 2 0 0
1 2 4 15 9 18 6	1,3,5,2,4,8,6,9,7	134142222222241431	0 4 8 2 4 0 0
1 2 5 12 10 16 11	1,4,8,3,9,7,2,6,5	311332134431233113	0 6 2 8 2 0 0
1 2 4 9 5 17 8	1,3,8,2,6,5,4,7,9	314412321123214413	0 6 4 4 4 0 0
1 2 6 14 4 16 18	1,5,6,4,3,8,9,7,2	152331312213133325	0 6 4 6 0 2 0

Представлені в таблиці 2 списки обґрунтовують наступну теорему.

Теорема 2. *З точністю до ізоморфізму існують не менше, ніж одинадцять циклічних (K_{19}, B)-розкладів.*

Для розв'язання задачі конструктивного переліку (K_{19}, G)-розкладів, де $G =$ П та $G = B$ треба мінімізувати знайдені списки. Тому перейдемо до опису ще одного специфікаційного інваріанту $\tilde{T}(R)$, більш чутливого ніж $T(R)$. Породження $\tilde{T}(R)$ відбувається з використанням таких характеристик, як число спільних вершин k, двох компонент розкладу R. Якщо $k = 0$, то кажуть, що має місце тип 1, при $k = 1$ - тип 2. Якщо $k = 2$, то маємо типи 3, 4, 5, при $k = 3$ - типи 6, 7, а при $k = 4$ - тип 8. Тоді $\tilde{T}(R) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$, де x_i - кількість компонент в розкладі R, що мають тип i з деякою компонентою P, крім того $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 18$. В [7] знайдено список 2-упаковок барвінків B в K_{19}, який дає всі можливі типи взаєморозташувань двох компонент (K_{19}, B)-розкладу. З цього результату випливає, що для барвінкових розкладів специфікаційний інваріант $\tilde{T}(R)$ має вигляд семикомпонентного вектора $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ і $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 18$. Надалі плануємо застосувати інваріант $\tilde{T}(R)$, що надасть можливість одержати більш високу оцінку знизу числа неізоморфних призматичних та барвінкових розкладів і наблизить до розв'язання задачі їх конструктивного переліку.

Висновок. Автором створено алгоритми і програмні реалізації, за допомогою яких одержано нижню оцінку числа неізоморфних циклічних призматичних та барвінкових розкладів графа K_{19}. Алгоритми мають чітко виражений універсальний характер. Це означає, що їх легко пристосувати для побудови списків циклічних розкладів графа K_{19} на будь-які 9-реберні графи. Також запропоновано специфікаційний інваріант $\tilde{T}(R)$ для наближення до повного вирішення задачі конструктивного переліку циклічних призматичних та барвінкових розкладів графа K_{19}.

1. *Colbourn C. J., Dinitz J. H., Stinson D. R.* Applications of combinatorial designs to communications, cryptography and networking// Surveys in combinatorics. - Cambridge University Pres, – 1999. – P. 37-100.
2. *Іванов А. В., Фараджев И.* Конструктивное перечисление систем инцидентности I// Rostock. Math. Kolloq. – 1983. – Vol. 24. –P. 4-22.
3. *Bosak J., Rosa A., Znam S.* On decompositions of complete graphs into factors with given diameters// In: Theory of graphs, Proc. Colloq. Tihany. – 1966, Akad. Kiado – 1968. – P. 37-56.
4. *Wilson R. M.* Decomposition of complete graphs into subgraphs isomorphis to a given graph// Proc. of the Fifth British Comb. Conference. - Utilitas Math., Winnipeg, 1976. – P. 647-659.
5. *Bermond J. C., Schonheim J.* G-decompositions of K_n, where G has four vertices or less // // Discrete Math. – 1977. – Vol. 19, №2. – P. 113–120.
6. *Bermond J. C., Huang C., Rosa A., Sotteau D.* Decomposition of complete graphs into isomorphic subgraphs with five vertices// Ars Combinatoria. – 1980. – Vol. 10. – P. 211–254.
7. *Петренюк Л. П.* О барвинках в полном графе// Материалы VII Международного семинара "Дискретная математика и её приложения"Часть II / Под ред. О. Б. Лупанова. - М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. –2001. С. 241– 242.

Одержано 08.09.2012

УДК 517.9:519.46

М.І. Сєров, М.М. Сєрова, Т.О. Карпалюк (Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка)

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПІВ СИМЕТРІЇ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ НАВ'Є–СТОКСА

There was conducted a generalization of the three–dimensional system of convection–diffusion equations, invariant with respect to a generalized Galilean algebra, to the system of type Navier–Stokes preserving invariance relatively generalized Galilean algebra (in the case of one and two spatial variables).

Проведено узагальнення тривимірної системи рівнянь конвекції дифузії, інваріантної відносно узагальненої алгебри Галілея, до системи типу Нав'є–Стокса зі збереженням інваріантності відносно узагальненої алгебри Галілея (у випадку однієї та двох просторових змінних).

Вступ Система рівнянь Нав'є–Стокса, названа за іменами французького фізика Клода–Луї Нав'є та британського математика Джорджа Габріеля Стокса, є однією з найважливіших у гідродинаміці. Вона застосовується у математичному моделюванні багатьох природних явищ і технічних задач. Варіації системи рівнянь Нав'є–Стокса використовують для опису руху повітряних мас атмосфери, зокрема, при формуванні прогнозу погоди. Одним із застосувань цієї системи є опис течій у мантії Землі. На сьогоднішній день багато математичних моделей використовують для моделювання нестаціонарних режимів магістральних газопроводів, але всі вони базуються на системі рівнянь Нав'є–Стокса. Ми розглянемо одну з модифікацій системи Нав'є–Стокса:

$$\begin{aligned} &\vec{u_0} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \Delta\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \\ &\rho_t + div(\rho\vec{u}) = 0, \\ &p = f(\rho), \end{aligned} \tag{1}$$

де $\vec{u} = (u^1, u^2, ..., u^n)$ — векторне поле швидкостей, $u^a = u^a(x)$, $\rho = \rho(x)$ — густина, $p = p(x)$ — тиск рідини, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $a = \overline{1, n}$, $f(\rho)$ — довільна гладка функція.

1. Постановка задачі та позначення Важко переоцінити значимість системи (1) у математичному моделюванні різних явищ гідродинаміки, але, незважаючи на численні переваги, система рівнянь Нав'є–Стокса має один суттєвий недолік: використовуватись вона може лише для опису процесів, де розмірність векторного поля $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ співпадає з кількістю незалежних просторових змінних $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Звичайно, в природі існують гідродинамічні процеси, в яких ці дві величини не співпадають, тобто $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, а $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, де $m \neq n$. Тоді для моделювання таких процесів система Нав'є–Стокса не може бути застосована, і треба використовувати якісь інші рівняння чи системи. Як же отримати такі системи? У цій роботі ми пропонуємо метод, оснований на принципах симетрії, при якому у якості моделі, що має різну розмірність векторного поля і простору незалежних змінних, вибираємо такі узагальнення системи Нав'є–Стокса, які повторюють її симетрійні властивості.

Слід зазначити, що основу системи рівнянь Нав'є–Стокса складає система рівнянь Бюргерса

$$\vec{u_0} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \Delta\vec{u} = 0, \tag{2}$$

де $\vec{u} = \vec{u}(x) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Ця система інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея вигляду

$$\begin{aligned} &\partial_0, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial_a}, \quad G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a}, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a + (x_a - x_0u^a)\partial_{u^a}. \end{aligned} \tag{3}$$

Як відомо, система рівнянь Бюргерса (2) є узагальненням скалярного рівняння Бюргерса

$$u_0 + uu_1 - u_{11} = 0, \tag{4}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, індекси внизу означають диференціювання за відповідною змінною; і її алебра інваріантності (3) відповідає алгебрі $AG_2(1,1)$ рівняння Бюргерса (4):

$$\begin{aligned} &\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_u, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u)\partial_u. \end{aligned} \tag{5}$$

У свою чергу, скалярне рівняння Бюргерса можна отримати при дослідженні максимальної алебри інваріантності нелінійного рівняння конвекції дифузії

$$u_0 + f(u)u_1 - u_{11} = 0. \tag{6}$$

Як відомо, це рівняння інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея тільки тоді, коли воно еквівалентне рівнянню Бюргерса.

2. Узагальнення рівняння (6) **на випадок системи та її інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея.** У літературі спостерігалися спроби замінити систему рівнянь Нав'є –Стокса іншою системою, в якій $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, а $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, де m і n не обов'язково рівні. На нашу думку, це потрібно робити так. Спочатку розглянемо узагальнення скалярного рівняння (6) системою рівнянь конвекції дифузії

$$U_0 = \Delta U + F^a(U)U_a, \tag{7}$$

де $U \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $U_a = \dfrac{\partial U}{\partial x_a}$, $F^a(U)$ — довільні функціональні матриці розмірності $m \times m$, $a = \overline{1,n}$, та дослідимо її симетрійні властивості. Система (7) при конкретних нелінійностях та значеннях n, m знаходить широке застосування при описі різноманітних фізичних, хімічних, біологічних процесів. Так, математичні моделі, що базуються на цій системі, застосовуються у макрокінетиці, основний зміст якої є вивчення ролі дифузії, теплопередачі та конвекції в протіканні хімічних реакцій. Розв'язання широкого кола науково–технічних проблем передбачає дослідження явища вільної конвекції. Процес тепломасообміну має велике практичне значення для інтенсифікації теплоенергетичних і хімікотехнологічних процесів у різних сферах промисловості. Для нас ця система важлива ще й тому, що кількість просторових змінних і розмірність векторного поля U тут може бути як однаковою, так і різною.

Спочатку перед нами була поставлена задача: знайти такі матриці $F^a(U)$, при яких система (7) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея. Цю задачу ми розв'язали для випадків $m \leq 3$ і $n \leq 3$. Зокрема нами встановлено, що при $m \leq n$ система (7) галілеївськи неінваріантна, при $m = n$ у класі систем (7) лише система Бюргерса (2) інваріантна відносно алгебри $AG_2(1, n)$ (для випадку $m = n = 2$ див. роботу [1]). Якщо ж $m > n$, то тут ситуація наступна:

a) $(m, n) = (2, 1)$. Встановлено, що існує 5 локально нееквівалентних систем класу (7), інваріантних відносно алгебри $AG_2(1, 1)$ (див. роботу [2]);

b) $(m, n) = (3, 1)$. Нами встановлено, що існує 18 локально нееквівалентних систем класу (7), інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, 1)$;

c) $(m, n) = (3, 2)$. У цьому випадку існує 4 локально нееквівалентні системи класу (7), інваріантні відносно алгебри $AG_2(1, 2)$.

Справедливі наступні твердження.

Теорема 1. *Система (7) при $m = 3$, $n = 1$ інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея*

$$\begin{gathered} AG_2\,(1,1) =< \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + Q_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2, \\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1Q_1 + x_0Q_2 + Q_3 > \end{gathered} \tag{8}$$

тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд:

$$\begin{aligned} & w_0^1+w^1w_1^1=w_{11}^1+\lambda_{12}w_1^2+\lambda_{13}(w^3)^{2l-1}w_1^3+G^1, \\ & w_0^2+w^1w_1^2=w_{11}^2-2w^2w_1^1+\lambda_{22}(w^3)^lw_1^2+\lambda_{23}(w^3)^{3l-1}w_1^3+G^2, \\ & w_0^3+w^1w_1^3=w_{11}^3-\frac{w^3}{l}w_1^1+\lambda_{32}(w^3)^{1-l}w_1^2+\lambda_{33}(w^3)^lw_1^3+G^3, \end{aligned} \tag{9}$$

при $Q_1 = \partial_{w^1}$, $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2} - \dfrac{1}{l}w^3\partial_{w^3}$, $Q_3 = \partial_{w^2}$, λ_{ij} — довільні сталі, $l \neq 0$ — стала, значення якої, а також функцій w^a, G^a подані у таблиці 1; або

$$\begin{aligned} & w_0^1+w^1w_1^1=w_{11}^1+\psi(w^3)w_1^2+G^1, \\ & w_0^2+w^1w_1^2=w_{11}^2-2w^2w_1^1+G^2, \\ & w_0^3+w^1w_1^3=w_{11}^3+G^3, \end{aligned} \tag{10}$$

при $Q_1 = \partial_{w^1}$, $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2}$, $Q_3 = \partial_{w^2}$, $\psi(w^3)$ — довільна функція, значення w^a, G^a подані у таблиці 2; або

$$\begin{aligned} & w_0^1+w^1w_1^1=w_{11}^1+(w^2)^{2l-1}\psi^{12}w_1^2+(w^2)^{2l}\psi^{13}w_1^3+G^1, \\ & w_0^2+w^1w_1^2=w_{11}^2-\frac{w^2}{l}w_1^1+(w^2)^l\psi^{22}w_1^2+(w^2)^{l+1}\psi^{23}w_1^3+G^2, \\ & w_0^3+w^1w_1^3=w_{11}^3+(w^2)^{l-1}\psi^{32}w_1^2+(w^2)^l\psi^{33}w_1^3+G^3, \end{aligned} \tag{11}$$

при $Q_1 = \partial_{w^1}$, $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - \dfrac{1}{l}w^2\partial_{w^2}$, $Q_3 = 0$, $\psi^{ab}(w^3)$ — довільні функції, $a, b = \overline{1,3}$, $l \neq 0$ — стала, значення якої, а також функцій w^a, G^a подані в таблиці 3.

Таблиця 1. Набір значень l, w^a, G^a для системи (9).

№	l	w^a	G^a
1.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = u^3$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = 0$
2.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = e^{u^3}$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = -\frac{(w^3_1)^2}{w^3}$
3.	$\frac{l}{2}$	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}+$ $+u^3 \ln \sqrt{u^3}$ $w^3 = u^3$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2 - \frac{(w^3_1)^2}{2w^3}$ $G^3 = 0$
4.	l	$w^1 = \frac{u^2}{u^1}$ $w^2 = \frac{u^3}{u^1} - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2$ $w^3 = u^1$	$G^1 = \frac{2w^1_1 w^3_1}{w^3} - \frac{2w^2}{w^3} w^3_1$ $G^2 = (w^1_1)^2 + \frac{2w^2_1 w^3_1}{w^3}$ $G^3 = 0$
5.	$\frac{1}{3}$	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = u^3 - u^1 u^2 + \frac{(u^1)^3}{3}$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = 2w^1_1 w^2_1 - 2w^2 w^2_1$
6.	$-\frac{1}{2}$	$w^1 = \frac{u^2}{u^1}$ $w^2 = \frac{u^3}{u^1} - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2 -$ $-\frac{1}{2u^1} \ln u^1$ $w^3 = u^1$	$G^1 = \frac{2w^1_1 w^3_1}{w^3} - \frac{2w^2}{w^3} w^3_1$ $G^2 = (w^1_1)^2 + \frac{2w^2_1 w^3_1}{w^3} - \frac{(w^3_1)^2}{2(w^3)^3}$ $G^3 = 0$

Таблиця 2. Набір значень w^a, G^a для системи (10).

№	w^a	G^a
1.	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = u^3$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = 0$
2.	$w^1 = \frac{u^2}{u^1}$ $w^2 = \frac{u^3}{u^1} - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2$ $w^3 = u^1$	$G^1 = \frac{2w^1_1 w^3_1}{w^3} - \frac{2w^2}{w^3} w^3_1$ $G^2 = (w^1_1)^2 + \frac{2w^2_1 w^3_1}{w^3}$ $G^3 = 0$

Таблиця 3. Набір значень l, w^a, G^a для системи (11).

№	l	w^a	G^a
1	2	3	4
1.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{-u^2}$ $w^3 = u^3 e^{-ku^2}$	$G^1 = 0$ $G^2 = -\frac{(w^2_1)^2}{w^2}$ $G^3 = -\frac{2kw^2_1 w^3_1}{w^2} + \frac{k^2 w^3 (w^2_1)^2}{(w^2)^2}$
2.	1	$w^1 = u^1 + u^3 \ln u^3$ $w^2 = u^3$ $w^3 = u^2 + \ln u^3$	$G^1 = -\frac{(w^2_1)^2}{w^2}$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{(w^2_1)^2}{(w^2)^2}$
3.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{-u^2}$ $w^3 = u^3 - \frac{(u^2)^2}{2}$	$G^1 = 0$ $G^2 = -\frac{(w^2_1)^2}{w^2}$ $G^3 = \frac{(w^2_1)^2}{(w^2)^2}$
4.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2$ $w^3 = u^3 (u^2)^k$	$G^1 = 0$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{k(k+1) w^3 (w^2_1)^2}{(w^2)^2} - \frac{2kw^2_1 w^3_1}{w^2}$
5.	1	$w^1 = u^1 + u^3 \ln u^3$ $w^2 = u^3$ $w^3 = u^2 (u^3)^k$	$G^1 = -\frac{(w^2_1)^2}{w^2}$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{k(k+1) w^3 (w^2_1)^2}{(w^2)^2} - \frac{2kw^2_1 w^3_1}{w^2}$
6.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2$	$G^1 = 0$ $G^2 = 0$

1	2	3	4
		$w^3 = \dfrac{u^3}{u^2} + l \ln u^2$	$G^3 = \dfrac{2w_1^2 w_1^3}{w^2} - \dfrac{l(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
7.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{\frac{u^3}{u^2}}$ $w^3 = u^2$	$G^1 = 0$ $G^2 = \dfrac{2w_1^2 w_1^3}{w^3} - \dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3 = 0$
8.	1	$w^1{=}u^1{+}u^2 \ln u^2{+}u^3 \ln u^3$ $w^2 = u^3$ $w^3 = \dfrac{u^2}{u^3}$	$G^1{=}{-}\dfrac{w^3(w_1^2)^2}{w^2}{-}\dfrac{w^2(w_1^3)^2}{w^3}{-}$ ${-}\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}{-}2w_1^2 w_1^3,$ $G^2 = 0 \quad G^3 = \dfrac{2w_1^2 w_1^3}{w^2}$
9.	1	$w^1{=}u^1{+}u^3 \ln u^2{+}\dfrac{1}{2}u^2 \ln^2 u^2$ $w^2 = u^2$ $w^3 = \dfrac{u^3}{u^2} + \ln u^2$	$G^1{=}{-}\dfrac{w^3(w_1^2)^2}{w^2}{-}2w_1^2 w_1^3{+}\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^2 = 0$ $G^3 = \dfrac{2w_1^2 w_1^3}{w^2} - \dfrac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
10.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{-\frac{1}{p}\arctan\frac{u^3}{u^2}}$ $w^3{=}\ln\left((u^2)^2{+}(u^3)^2\right){-}\dfrac{2k}{p}\arctan\dfrac{u^3}{u^2}$	$G^1 = 0$ $G^2 = w_1^2 w_1^3 - (2k+1)\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3 = \dfrac{(w_1^3)^2}{2}{-}2(p^2{+}k^2)\dfrac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$

У таблиці 3 $p \neq 0$, k — довільні сталі.

Доведення. Для доведення застосуємо алгоритм С. Лі (див., наприклад, [3]– [5]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (7) (у випадку $m = 3$, $n = 1$) має вигляд:

$$X = \xi^{\mu}(x,u)\partial_{\mu} + \eta^{a}(x,u)\partial_{u^a}, \tag{12}$$

де $\mu = 0, 1$, $a = \overline{1,3}$.

З умови інваріантності системи (7) відносно оператора (12)

$$\tilde{X}[u_0^a - u_{11}^a - F^{ab}u_1^b] \,|_{u_0^a = u_{11}^a + F^{ab}u_1^b} = 0,$$

де $\tilde{X}$ — продовження оператора X, маємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат оператора X та уточнення невідомих функцій:

$$\xi_1^0 = \xi_{u^a}^{\mu} = 0, \quad \xi_0^0 - 2\xi_1^1 = 0, \tag{13}$$

$$\eta_{u^b u^c}^a = 0, \tag{14}$$

$$\eta_1^b F^{ab} - \eta_0^a + \eta_{11}^a = 0, \tag{15}$$

$$\eta^c F_{u^c}^{ab} - \eta_{u^c}^a F^{cb} + \eta_{u^b}^c F^{ac} + \xi_1^1 F^{ab} + \delta_{ab}\xi_0^1 + 2\eta_{1u^b}^a = 0, \tag{16}$$

де $\mu = 0, 1$, $a, b, c = \overline{1,3}$, δ_{ab} — символ Кронекера, індекс внизу біля функції означає диференціювання за відповідним аргументом.

Знайдемо матриці $F^a(U)$, при яких система (7) (для $m=3$, $n=1$) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (8). Для знаходження компонент цих матриць необхідно підставити відповідні ξ^μ, η^a ($\mu=0,1$, $a=\overline{1,3}$), (одержані із зображень операторів узагальненої алгебри Галілея) у систему визначальних рівнянь (13)–(16), та розв'язати її. Проілюструємо доведення теореми на прикладі зображення алгебри (8):

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2},$$
$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1(\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}) - x_0(u^1\partial_{u^1} + 2u^2\partial_{u^2}) + k\partial_{u^2},$$

де $k \in \mathbb{R}$ — довільна стала. Це зображення алгебри визначає координати оператора X:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= ax_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0,\\ \xi^1 &= ax_0x_1 + \kappa x_1 + gx_0 + d_1,\\ \eta^1 &= a(x_1 - x_0u^1) - \kappa u^1 + g,\\ \eta^2 &= a(x_1u^1 - 2x_0u^2 + k) - 2\kappa u^2 + gu^1,\\ \eta^3 &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

де a, κ, g, d_μ — довільні сталі, $\mu = 0,1$. Підставивши (17) у систему визначальних рівнянь (13)–(16), бачимо, що рівняння (13), (14) виконуються тотожньо. Рівняння (15) та (16) після розщеплення за змінними x_0, x_1 зводяться до наступної системи для знаходження функцій $F^{ab}(U)$ та уточнення координат інфінітезимального оператора:

$$(\delta_{c1} + \delta_{c2})\, F^{ab}_{u^c} - \delta_{a2}F^{1b} + \delta_{b1}F^{a2} + \delta_{ab} = 0, \tag{18}$$
$$\left(-\delta_{c1}u^1 - 2\delta_{c2}u^2\right) F^{ab}_{u^c} + \delta_{a1}F^{1b} + 2\delta_{a2}F^{2b} - \delta_{b1}F^{a1} - 2\delta_{b2}F^{a2} + F^{ab} = 0, \tag{19}$$
$$kF^{ab}_{u^2} + 2\delta_{a2}\delta_{b1} = 0, \tag{20}$$
$$\left(\delta_{b1} + \delta_{b2}u^1\right) F^{ab} + \delta_{a1}u^1 + 2\delta_{a2}u^2 = 0. \tag{21}$$

Систему (18)–(21) задовольняє стала $k = 1$ та наступна функціональна матриця

$$F = (F^{ab}) = \begin{pmatrix} -(\psi+1)u^1 & \psi & 0 \\ -2u^2 + (1-\psi)\left(u^1\right)^2 & (\psi-1)u^1 & 0 \\ 0 & 0 & -u^1 \end{pmatrix},$$

де $\psi = \psi(u^3)$ — довільна гладка функція. Здійснивши заміну змінних

$$w^1 = u^1, \quad w^2 = u^2 - \frac{\left(u^1\right)^2}{2}, \quad w^3 = u^3$$

отримуємо систему (10), де w^a, G^a описані у першому пункті таблиці 2.

Аналогічно розв'язавши систему визначальних рівнянь для всіх зображень алгебри (8) та підібравши відповідні заміни, що наведені в таблицях 1-3 отримуємо системи (9), (10), (11), описані у формулюванні теореми. Теорему доведено.

Теорема 2. *Система (7) при $m = 3$, $n = 2$ інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея*

$$\begin{gathered} AG_2(1,2) =< \partial_0, \partial_a, G_a = x_0\partial_a + Q_a, \\ J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + Q_3, D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a + Q_4, \\ \Pi = {x_0}^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a + x_0Q_4 + x_aQ_a + Q_5 > \end{gathered} \tag{22}$$

тоді і тільки тоді коли вона має вигляд:

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u} + (u^3)^k(\lambda_1\vec{\nabla}u^3 + \lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}u^3), \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + u^3(\lambda_3\vec{\nabla}\vec{u} + \lambda_4\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}), \end{aligned} \tag{23}$$

при $Q_a = \partial_{u^a}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$, $Q_4 = -u^a\partial_{u^a} + 2\lambda_3 u^3\partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$, $\lambda_3 = -\frac{1}{k+1}$; *або*

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \varphi\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}, \end{aligned} \tag{24}$$

при $Q_a = \partial_{u^a}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$, $Q_4 = -u^a\partial_{u^a}$, $Q_5 = 0$; *або*

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u} + sinu^3\vec{D}\vec{u} + cosu^3\vec{D}^{\perp}\vec{u}, \end{aligned} \tag{25}$$

при $Q_a = \partial_{u^a}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + \frac{2}{k}\partial_{u^3}$, $Q_4 = -u^a\partial_{u^a}$, $Q_5 = 0$; *або*

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u} + \vec{L}\omega, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 - k(\vec{u}\vec{L})\omega - \omega\vec{\nabla}\vec{u}, \end{aligned} \tag{26}$$

при $Q_a = ku^a\partial_{u^3} + \partial_{u^a}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$, $Q_4 = -u^a\partial_{u^a} - 2u^3\partial_{u^3}$, $Q_5 = 2k\partial_{u^3}$.

У формулах (23)–(26): $\vec{L} = \lambda_1\vec{\nabla} + \lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}$, $\vec{D} = (\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp}, \vec{c}\vec{\nabla})$, $\vec{D}^{\perp} = (\vec{c}\vec{\nabla}, -\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp})$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$, $\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2)$, $\vec{\nabla}^{\perp} = (\partial_2, -\partial_1)$, $\vec{u} = (u^1, u^2)$, $\omega = u^3 - \frac{k}{2}\vec{u}^2$, φ *— довільна гладка функція,* c_i, λ_j, λ, k *— довільні сталі,* $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,4}$ *.*

Доведення теореми 2 базується на стандартному методі С. Лі (див., наприклад, [3]– [5]) та проводиться аналогічно до доведення теореми 1.

2. Узагальнення систем рівнянь конвекції дифузії, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея, до систем типу Нав'є–Стокса

У теоремах 1,2 (відповідно, для $(m, n) = (3, 1)$ та $(m, n) = (3, 2)$) наведені системи (7), інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея. Тепер залишається зробити завершальний крок: узагальнити одержані системи до систем типу Нав'є–Стокса. Зазначимо, що таке узагальнення у випадку двовимірного векторного поля $\vec{u}$ та однієї просторової змінної виконувалось у роботах [7], [8]. Ми ж покажемо це для $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

У випадку $m = 3$, $n = 1$ розглянемо систему (10), значення w^a, G^a якої описані у першому рядку таблиці 2. Після відповідної підстановки вона має вигляд

$$\begin{aligned} &u^1_0 + u^1u^1_1 - u^1_{11} - \psi(u^3)\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 = 0, \\ &u^2_0 + u^1u^2_1 - u^2_{11} - \psi(u^3)u^1\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 + 2\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u^1_1 = 0, \\ &u^3_0 + u^1u^3_1 - u^3_{11} = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

та інваріантна відносно узагальненої алебри Галілея (8) при

$$Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2}, \quad Q_3 = \partial_{u^2}.$$

Узагальнимо систему (27) наступною системою

$$\begin{aligned} &u^1_0 + u^1u^1_1 - u^1_{11} - \psi(u^3)\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 = f^1p_1, \\ &u^2_0 + u^1u^2_1 - u^2_{11} - \psi(u^3)u^1\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 + 2\left(u^2 - \tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u^1_1 = f^2p_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^3_0{+}u^1u^3_1{-}u^3_{11}{=}f^3p_1, \\ \rho_0 + \partial_1[\vec{g}\vec{u}] = 0, \\ p = f(\rho), \end{aligned} \tag{28}$$

де $\vec{g} = (g^1, g^2, g^3)$, f^a, g^a $(a = \overline{1,3})$ — довільні гладкі функції аргумента ρ. Вимагаємо, щоб система (28) була інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (8), де

$$Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2} - ku^3\partial_{u^3} - l\rho\partial_\rho, \quad Q_3 = \partial_{u^2}. \tag{29}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо система (28) має вигляд*

$$\begin{aligned} &u^1_0{+}u^1u^1_1{-}u^1_{11}{-}\psi\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1{=}0, \\ &u^2_0{+}u^1u^2_1{-}u^2_{11}{-}\psi u^1\!\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1{+}2\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u^1_1{=}c_1\rho^2\rho_1, \\ &u^3_0{+}u^1u^3_1{-}u^3_{11}{=}c_2\rho_1, \\ &\rho_0 + (u^1\rho)_1 + \lambda(u^3\rho^2)_1 = 0, \\ &p = f(\rho), \end{aligned} \tag{30}$$

де $\psi = \psi(u^3)$ — довільна гладка функція, λ, c_i $(i = 1, 2)$ — довільні сталі, то вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої задаються формулами

$$\begin{aligned} &\partial_0, \partial_1, G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}, D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}u^1\partial_{u^1}{-}2u^2\partial_{u^2}{-}\rho\partial_\rho, \\ &\Pi{=}{x_0}^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1(\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}){-}x_0(u^1\partial_{u^1}{+}2u^2\partial_{u^2}{+}\rho\partial_\rho){+}\partial_{u^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Доведення. Для зручності в обчисленнях позначимо $\rho = u^4$. Тоді після підстановки останнього рівняння в перші три та заміни

$$f^1\dot{f} = \tilde{f}^1$$

отримаємо систему

$$\begin{aligned} &u^1_0{+}u^1u^1_1{-}u^1_{11}{-}\psi(u^3)\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1{-}\tilde{f}^1u^4_1 = 0, \\ &u^2_0{+}u^1u^2_1{-}u^2_{11}{-}\psi(u^3)u^1\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1{+}2\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u^1_1{-}\tilde{f}^2u^4_1 = 0, \\ &u^3_0{+}u^1u^3_1{-}u^3_{11}{-}\tilde{f}^3u^4_1 = 0, \\ &u^4_0 + \dot{g^a}u^au^4_1 + g^au^a_1 = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Для доведення застосуємо алгоритм С. Лі (див., наприклад, [3]– [5]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (32) має вигляд:

$$X = \xi^\mu(x, u)\partial_\mu + \eta^b(x, u)\partial_{u^b}, \tag{33}$$

де $\mu = 0, 1$, $b = \overline{1,4}$.

З умови інваріантності системи (32) відносно оператора (33)

$$\tilde{X}S\mid_{S=0} = 0, \tag{34}$$

де S – ліва частина системи (32); отримаємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат оператора X та уточнення невідомих функцій, яку ми тут не приводимо через її громіздкість.

Зображення операторів Q_i з (29) визначає базисні оператори узагальненої алгебри Галілея:

$$\partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2} - ku^3\partial_{u^3} - lu^4\partial_{u^4},$$
$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1(\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}) - x_0(u^1\partial_{u^1} + 2u^2\partial_{u^2} + ku^3\partial_{u^3} + lu^4\partial_{u^4}) + \partial_{u^2},$$

де $k, l \in \mathbb{R}$ — довільні сталі, та координати оператора X:

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= ax_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0,\\
\xi^1 &= ax_0x_1 + \kappa x_1 + gx_0 + d_1,\\
\eta^1 &= a(x_1 - x_0u^1) - \kappa u^1 + g,\\
\eta^2 &= a(x_1u^1 - 2x_0u^2 + 1) - 2\kappa u^2 + gu^1,\\
\eta^3 &= -k(ax_0 + \kappa)u^3,\\
\eta^4 &= -l(ax_0 + \kappa)u^4,
\end{aligned}$$

де a, κ, g, d_μ – довільні сталі, $\mu = 0, 1$.

Підставивши відповідні ξ^μ, η^b ($\mu = 0, 1$, $b = \overline{1, 4}$) у систему визначальних рівнянь, отриману з умови (34), та розв'язавши її, уточнюємо значення невідомих функцій та сталих. Отже, систему визначальних рівнянь задовольняють

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}^1 = 0, \quad \tilde{f}^2 = c_1(u^4)^2, \quad \tilde{f}^3 = c_2,\\
&g^1 = u^4, \quad g^2 = 0, \quad g^3 = \lambda(u^4)^2,\\
&k = 0, \quad l = 1.
\end{aligned}$$

Виконавши зворотню заміну $u^4 = \rho$, отримуємо систему (30), інваріантну відносно алгебри (31). Теорему доведено.

У випадку $m = 3$, $n = 2$ розглянемо, наприклад, систему (24). Вона інваріантна відносно узагальненої алебри Галілея

$$\begin{aligned}
AG_2(1, 2) = <\ & \partial_0, \partial_a, G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a},\\
J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 &+ u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a},\\
\Pi = {x_0}^2\partial_0 &+ x_0x_a\partial_a + x_a\partial_{u^a} - x_0u^a\partial_{u^a} > .
\end{aligned}$$

Узагальнимо систему (24) наступною системою

$$\begin{aligned}
&u_0^a + u^b u_b^a - \Delta u^a = f^{ab}p_b,\\
&u_0^3 + u^b u_b^3 - \Delta u^3 + \varphi\epsilon_{ab}u_b^a = f^{3b}p_b,\\
&\rho_0 + \partial_a(g^{ac}u^c) = 0,\\
&p = f(\rho),
\end{aligned} \tag{35}$$

де $f^{cb} = f^{cb}(\rho)$, $g^{ac} = g^{ac}(\rho)$, $(a, b = 1, 2,\ c = \overline{1, 3})$, $\varphi = \varphi(u^3)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, $\epsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вимагаємо, щоб система (35) була інваріантною відносно узагальненої алгебри Галілея (22), де

$$Q_a = \partial_{u^a}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, Q_4 = -u^a\partial_{u^a} - k\rho\partial_\rho, Q_5 = 0.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо система (35) має вигляд*

$$\begin{array}{l} u_0^a{+}u^bu_b^a{-}\Delta u^a{=}(\delta_{ab}c_1+\epsilon_{ab}c_2)\rho_b,\\ u_0^3{+}u^bu_b^3{-}\Delta u^3{-}\varphi\epsilon_{ab}u_b^a{=}0,\\ \rho_0+(\rho u^a)_a=0,\\ p=f(\rho), \end{array} \qquad (36)$$

де $\delta_{ab}{=}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c_i *— довільні сталі,* $a, b, i = 1, 2$, *то вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої задаються формулами*

$$\partial_0, \partial_a, G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a}, J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1},$$
$$D{=}2x_0\partial_0{+}x_a\partial_a{-}u^a\partial_{u^a}{-}2\rho\partial_\rho, \Pi{=}{x_0}^2\partial_0{+}x_0x_a\partial_a{+}x_a\partial_{u^a}{-}x_0(u^a\partial_{u^a}{+}2\rho\partial_\rho).$$

Доведення теореми 4 базується на стандартному методі С. Лі та проводиться аналогічно до доведення теореми 3.

Зауваження 1. *Аналогічно до того, як це зроблено в теоремах 3, 4, всі інші системи конвекції–дифузії, одержані в теоремах 1, 2, можна узагальнити до систем типу Нав'є–Стокса зі збереженням інваріантності відносно узагальненої алгебри Галілея.*

Висновки Оскільки одержані системи узагальнюють тривимірну систему рівнянь Нав'є–Стокса у випадках, відповідно, однієї та двох просторових змінних не тільки по формі, а й мають аналогічні симетрійні властивості — задовольняють принципу відносності Галілея, то вони претендують на опис реальних процесів гідродинаміки. Підсумовуючи сказане вище, можна зробити висновок, що метод С. Лі є потужним методом, за допомогою якого серед класу математичних моделей можна відібрати ті, що задовольняють тому чи іншому принципу відносності.

1. *Жадан Т. О.* Інваріантність системи рівнянь дифузії-конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея. // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка.: в.12, 2004. — С. 70-75
2. *Глеба А. В.* Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь: Дис... канд. ф.-м. наук: 01.01.03.— К.,—2003. — 120с.
3. *Lie S.* Über Integration durch bestimmente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen 6. — Leipzig: 1881. — P. 328-368.
4. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400с.
5. *Olver P.* Applications of Lie groups to differential equations. — Berlin: Springer, 1986.
6. *Серов М. І., Карпалюк Т. О.* Інваріантність системи рівнянь конвекції дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля. // Математичний вісник НТШ, т.7, 2010. — С.200-221
7. *Серова М. М.* Некласичне узагальнення одновимірної системи рівнянь Нав'є–Стокса. — Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики: збірник статей // Зб. праць Інституту математики НАН України, т.3, №2, — К: 2006. — 400с.
8. *Серов М.І., Серова М.М., Омелян О.М., Карпалюк Т.О.* Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії. — Матеріали Українського математичного конгресу (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова). К: 2009. — URL:http://www.imath.kiev.ua/congress2009/Abstracts/Serov.pdf

Одержано 29.10.2012

УДК 517.95

М. М. Симотюк (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України)

МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ ВИЗНАЧНИКА ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

The metric theorems of an estimations of the characteristic determinant of the two-point problem for linear partial differential equation with constant coefficients are proved.

Встановлено метричні оцінки знизу для характеристичного визначника двоточкової задачі для лінійного рівняння із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Вступ. Нехай $A_j(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^p$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня N_j, $N_j \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$; Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_p$, $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_p)$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(ik, x) = ik_1x_1 + \ldots + ik_px_p$; $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ $(\omega, \delta \in \mathbb{R}, \gamma = \max\limits_{0\le j\le 2n-1} \{N_j/(2n-j)\})$ — поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою

$$\|\varphi; W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\varphi_k|^2 (1 + |k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|k|^{\gamma})}, \quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|,$$

$C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ — простір функцій $u(t,x)$ таких, що для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u(t,\cdot)/\partial t^j$, $0 \le j \le n$, належать до простору $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$, норму в просторі $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ задаємо формулою $\left\|u; C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})\right\| = \sum\limits_{j=0}^{n} \max\limits_{t\in[0,T]} \left\|\partial^j u(t,\cdot)/\partial t^j; W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\right\|$.

Умови розв'язності у просторах $C^{2n}([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ задачі

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=0}^{2n-1} A_j(D_x) \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega_p, \tag{1}$$

$$\begin{cases} U_j[u] \equiv \left.\dfrac{\partial^{2j-2} u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \ j = 1, \ldots, n, \quad x \in \Omega_p, \\ U_{n+j}[u] \equiv \left.\dfrac{\partial^{2j-1} u(t,x)}{\partial t^{2j-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), \ j = 1, \ldots, n, \ x \in \Omega_p, \end{cases} \tag{2}$$

залежать від властивостей визначника

$$\Delta(k,T) = \det \|U_j[f_q(t,k)]\|_{j,q=1}^{2n}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{3}$$

де $f_1(t,k), \ldots, f_{2n}(t,k)$ — така фундаментальна система розв'язків рівняння

$$L\,(d/dt, k)\, y(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{4}$$

що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{jq}$, $j, q = 1, \ldots, 2n$ (δ_{jq} — символ Кронекера). Якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ визначник (3) є відмінним від нуля, то задача (1), (2) має єдиний формальний розв'язок, який зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j,q=1}^{2n} \frac{\Delta_{jq}(k,T)}{\Delta(k,T)} f_q(t,k) \varphi_{jk} \exp(ik, x), \tag{5}$$

де $\Delta_{jq}(k,T), j,q=1,\ldots,2n,$ — алгебричне доповнення елемента $U_j[f_q(t,k)]$ у визначнику $\Delta(k,T)$, а φ_{jk}, $k\in\mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x), j=1,\ldots,2n$. Якщо $\Delta(k,T)\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, і, крім того, існують такі сталі $\sigma,\delta\in\mathbb{R}$, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\Delta(k,T)|\geq(1+|k|)^{-\sigma}\exp(-\delta T|k|^{\gamma}), \tag{6}$$

то на основі відомих оцінок [12, с. 162] для функцій $f_1(t,k),\ldots,f_{2n}(t,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, можна встановити збіжність ряду (5) в шкалі просторів $C^{2n}([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, якщо $\varphi_j\in W^{\gamma}_{\alpha_0,\beta_0}$, $j=1,\ldots,2n$, для певних $\alpha_0,\beta_0\in\mathbb{R}$. Тому важливо дослідити питання про можливість виконання нерівності (6). Це і є метою даної роботи. Зауважимо, що раніше метричні оцінки знизу для характеристичних визначників крайових задач з умовами вигляду (2) встановлено у роботах [3, 4] тільки для таких рівнянь із частинними похідними, які містять похідні за змінною t парного порядку. Для таких рівнянь характеристичний визначник допускає факторизацію, кожен множник якої оцінюється знизу на підставі леми 2.4 із [8, розділ 1]. Однак для рівняння (1), яке містить похідні за змінною t як парного, так і непарного порядків, характеристичний визначник (3), взагалі кажучи, не допускає факторизації. Це зумовлює значні труднощі при встановленні оцінки (6). Цим пояснюється відсутність робіт, присвячених дослідженню оцінки (6) для загального рівняння (1). Зауважимо, що для встановлення оцінки (6) у даній роботі застосовано апарат міри та розмірності Гаусдорфа [1, 8, 13].

Формулювання основного результату. Для формулювання отриманого результату введемо такі позначення: $C(2n,n)$ — множина всіх таких наборів натуральних чисел $\omega=(i_1,\ldots,i_n)$, що $1\leq i_1<\ldots<i_n\leq 2n$; $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_{m(k)}(k)$, $m(k)\leq 2n$, — різні корені рівняння

$$L(\lambda,k)=0,\quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{7}$$

кратностей $n_1(k),\ldots,n_{m(k)}(k)$ відповідно, $n_1(k)+\ldots+n_{m(k)}(k)=2n$;

$$m_0(k)=0,\quad m_j(k)=n_1(k)+\ldots+n_j(k),\quad j=1,\ldots,m(k);$$

$$g_q(t,k)=t^{\alpha(q)}\exp(\lambda_{\beta(q)}(k)t),\quad q=1,\ldots,2n, \tag{8}$$

де $\alpha(q)=q-m_{\beta(q)-1}(k)-1$, $q=1,\ldots,2n$, а індекс $\beta(q)$, $q=1,\ldots,2n$, однозначно визначається з умови $m_{\beta(q)-1}(k)<q\leq m_{\beta(q)}(k)$.

Основним результатом даної роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа, $\rho\in(0;1]$) чисел $T>0$ нерівність* (6) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при*

$$\sigma>\gamma+(p+\gamma)(\xi-1)/\rho,\quad \delta\geq\Lambda,\quad \gamma=\max_{0\leq j\leq 2n-1}\left\{N_j/(2n-j)\right\},$$

де $\xi=C^n_{2n}\left(1+n(\nu-1)\right)$, $\nu=\max\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\max\limits_{1\leq j\leq m(k)}n_j(k)$,

$$\Lambda=-\inf_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}}|k|^{-\gamma}\min\left\{\mathrm{Re}\,\left(\lambda_{\beta(i_1)}(k)+\ldots+\lambda_{\beta(i_n)}(k)\right):(i_1,\ldots,i_n)\in C(2n,n)\right\}.$$

Зауважимо, що теорема 1 даної роботи посилює результати, отримані в [14].

Допоміжні твердження. Для квазімногочлена

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{m} \exp(\mu_j t) p_j(t), \tag{9}$$

де $\mu_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$, $\mu_j \neq \mu_r$, $j \neq r$, а $p_j(t)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів $(n_j - 1)$, $j = 1, \ldots, m$, відповідно, будемо використовувати такі позначення: $N_Q = n_1 + \ldots + n_m$, $B_Q = 1 + \max\limits_{1 \le j \le m} |\mu_j|$, $\Lambda_Q = \min\limits_{1 \le j \le m} \mathrm{Re}\mu_j$,

$$E(Q, \varepsilon, [0, T_0]) := \{t \in [0, T_0] : |Q(t)| \le \varepsilon \exp(\Lambda_Q t)\}.$$

Наступне твердження є безпосереднім наслідком результатів праці [5].

Лема 1. *Якщо* $Q(0) \neq 0$, *то існують такі додатні сталі* C_1, C_2, C_3 *(які залежать тільки від* N_Q, T_0*), що для квазімногочлена* $Q(t)$ *вигляду* (9), *довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = C_1 Q(0) B_Q^{-N_Q}$, *множину* $E(Q, \varepsilon, [0, T_0])$ *можна покрити не більш ніж* $C_2 B_Q$ *проміжками, довжина кожного з яких не перевищує* $C_3 \Big(\varepsilon B_Q Q^{-1}(0)\Big)^{1/(N_Q - 1)}$.

Наступні леми описують структуру визначника (3) як функції змінної T.

Лема 2. *Для визначника* (3) *виконується така рівність:*

$$\Delta(k, T)\Big|_{T=0} = (-1)^{n(3n+1)/2}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Доведення. Оскільки

$$\Delta(k, T) = (-1)^{n(3n+1)/2} \det \left\| f_{2q}^{2j-1}(T, k)] \right\|_{j,q=1}^{n}, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

і $f_{2q}^{(2j-1)}(0, k) = \delta_{2j-1, 2q}$, $j, q = 1, \ldots, n$ (згідно з вибором фундаментальної системи $f_1(t, k), \ldots, f_{2n}(t, k)$), то

$$\Delta(k, T)\Big|_{T=0} = (-1)^{n(3n+1)/2} \det \|\delta_{2j-1, 2q}\|_{j,q=1}^{n} = (-1)^{n(3n+1)/2}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Лема 3. *Визначник* $\Delta(k, T)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *як функція змінної* T, *є квазімногочленом вигляду*

$$\sum_{\omega = (i_1, \ldots, i_n) \in C(2n, n)} \exp(\Lambda_{\beta(\omega)}(k) T) P_\omega(k, T), \tag{10}$$

де $P_\omega(k, T) \equiv \det \left\| \big(d/dT + \lambda_{\beta(i_j)}\big)^{2q-1} \left[T^{\alpha(i_j)}\right] \right\|_{j,q=1}^{n}$, $\Lambda_{\beta(\omega)}(k) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{\beta(i_j)}(k)$, *а індекси* $\beta(i_1), \ldots, \beta(i_n)$ *та степені* $\alpha(i_1), \ldots, \alpha(i_n)$ *визначаються формулами* (8). *Для порядку* $N_\Delta(k) \equiv \sum\limits_{\omega \in C(2n,n)} (\gamma_k(\omega) + 1)$ *квазімногочлена* (10), *де* $\gamma_k(\omega)$ *— степінь* $P_\omega(k, T)$ *як многочлена від* T, *виконується нерівність*

$$N_\Delta(k) \le C_{2n}^{n} \left(1 + n(n^+(k) - 1)\right), \tag{11}$$

де $n^+(k) = \max\limits_{1 \le j \le m(k)} n_j(k)$ *— максимальна кратність коренів полінома* $L(\lambda, k)$.

Доведення. Нехай $\Delta_1(k,T) \equiv \det\|U_j[g_q(t,k)]\|_{j,q=1}^{2n}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, де функції $g_1(t,k),\ldots,g_{2n}(t,k)$ визначені формулами (8). Визначники $\Delta(k,T)$ та $\Delta_1(k,T)$ пов'язані рівністю

$$\Delta(k,T) = \Delta_1(k,T)/\det J_k,$$

де J_k, $k \in \mathbb{Z}^p$, — матриця переходу від фундаментальної системи розв'язків $f_1(t,k),\ldots,f_{2n}(t,k)$ рівняння (4) до системи розв'язків $g_1(t,k),\ldots,g_{2n}(t,k)$. Розкриваючи визначник $\Delta_1(k,T)$ за правилом Лапласа за мінорами останніх n рядків, дістаємо, що

$$\Delta_1(k,T) = \sum_{\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in C(2n,n)} (-1)^{l_\omega} M_\omega(k)\exp(\Lambda_{\beta(\omega)}(k)T)P_\omega(k,T), \tag{12}$$

де $l_\omega = i_1+\ldots+i_n+(n+1)+\ldots+2n$, $M_\omega(k)$ — мінор n-го порядку визначника $\Delta_1(k,T)$, який відповідає першим n рядкам та n стовпцям, номери яких не дорівнюють числам $i_1,\ldots,i_n$. З рівності (12) випливає перше твердження леми.

Оцінка (11) для $N_\Delta(k)$ випливає з того, що кількість елементів множини $C(2n,n)$ дорівнює C_{2n}^n і того, що для довільного набору $\omega \in C(2n,n)$ степінь $\gamma_k(\omega)$ многочлена $P_\omega(k,T)$ у формулі (12) не перевищує $n(n^+(k)-1)$.

Доведення основного результату (теореми 1). Нехай T_0 — довільне додатне число, $E_{\sigma,\delta}(k,T_0)$ — множина тих чисел $T \in (0,T_0]$, для яких нерівність

$$|\Delta(k,T)| < (1+|k|)^{-\sigma}\exp(-\delta T|k|^\gamma) \tag{13}$$

виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$, а $E_{\sigma,\delta}(T_0)$ — множина тих значень $T \in (0,T_0]$, які належать до нескінченної кількості множин $E_{\sigma,\delta}(k,T_0)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи, що $(0;+\infty)$ можна покрити зліченною кількістю проміжків вигляду $(0;T_0]$, для доведення теореми досить встановити, що для кожного $T_0>0$ множина $E_{\sigma,\delta}(T_0)$ має нульову ρ-міру Гаусдорфа, якщо $\sigma > \sigma_1(\rho)$, $\delta \geq \Lambda$, де

$$\sigma_1(\rho) = \gamma + (p+\gamma)(\xi-1)/\rho, \quad \xi \geq C_{2n}^n\,(1+n(\nu-1))\,, \quad \nu = \max_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{1\leq j\leq m(k)} n_j(k).$$

Нехай $B_\Delta(k) = 1+\max\{|\Lambda_{\beta(\omega)}(k)| : \omega \in C(2n,n)\}$. Оскільки $|B_\Delta(k)| \leq C_4(1+|k|)^\gamma$, то з лем 1, 2, 3 випливає, що при $\sigma > \sigma_1(\rho)$, $\delta \geq \Lambda$, множину $E_{\sigma,\delta}(k,T_0)$ можна покрити проміжками $I^j_{\sigma,\delta}(k,T_0)$, $j=1,\ldots,M(k)$, так, що для кількості $M(k)$ цих проміжків виконуються нерівності

$$M(k) \leq C_5 B_\Delta(k) \leq C_6(1+|k|)^\gamma, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{14}$$

а для їхніх довжин — нерівності

$$\begin{aligned} \operatorname{mes} I^j_{\sigma,\delta}(k,T_0) &\leq C_7\,(1+|k|)^{(\gamma-\sigma)/(N(k)-1)} \leq C_8\,(1+|k|)^{(\gamma-\sigma)/(\xi-1)} \leq \\ &\leq C_9\,(1+|k|)^{-(p+\gamma)/\rho-\varepsilon(\rho)/(\xi-1)}\,,\ k\in\mathbb{Z}^p,\ \varepsilon(\rho)=\sigma-\sigma_1(\rho)>0. \end{aligned} \tag{15}$$

Зауважимо, що для $\sigma > \sigma_1(\rho)$, $\delta \geq \Lambda$, правильним є включення

$$E_{\sigma,\delta}(T_0) = \bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{|k|\geq N} E_{\sigma,\delta}(k,T_0) \subset \bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{|k|\geq N}\bigcup_{j=1}^{M(k)} I^j_{\sigma,\delta}(k,T_0).$$

Тому при $\sigma > \sigma_1(\rho)$, $\delta \geq \Lambda$, кожна точка множини $E_{\sigma,\delta}(T_0)$ належить до нескінченної кількості проміжків $I^j_{\sigma,\delta}(k)$, $j = 1, \ldots, N(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. З нерівностей (14), (15) випливає, що

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{j=1}^{M(k)}(\operatorname{mes} I^j_{\sigma,\delta}(k,T_0))^\rho \leq C_{10}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+|k|)^{-p-\rho\varepsilon(\rho)/(\xi-1)} < \infty.$$

Тоді за теоремою 2.1 [1] ρ-міра Гаусдорфа множини $E_{\sigma,\delta}(T_0)$ дорівнює нулеві, якщо $\sigma > \sigma_1(\rho)$, $\delta \geq \Lambda$. Теорему доведено.

Результати роботи можна перенести на випадок задачі з умовами (2) для систем лінійних рівнянь із частинними похідними.

Робота виконана при фінансовій подтримці ДФФД (проект № 41.1/004).

Висновки. У роботі встановлено метричні оцінки знизу характеристичного визначника задачі з двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Застосовано апарат міри та розмірності Гаусдорфа для встановлення таких оцінок.

1. *Берник В.И., Мельничук Ю.В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа.– Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
2. *Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4.– С. 637–645.
3. *Білусяк Н.І., Пташник Б.Й., Репетило С.М.* Крайова задача зі змішаними умовами для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, № 3. – С. 53–63.
4. *Пташник Б.Й., Репетило С.М.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі змінними коефіцієнтами // Доп. НАН України. – 2010. – №4. – С. 19–24.
5. *Медвідь О.М., М.М.Симотюк.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними // Мат. Студії. – 2007. – Т. 28, № 2. – С. 115–140.
6. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.
7. *Пташник Б.И., Полищук В.Н., Салыга Б.О.* Малые знаменатели в краевых задачах для гиперболических уравнений // В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1976. – С. 108–111.
8. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
9. *Симотюк М.М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999.– **42**, № 4.– С. 90–95.
10. *Симотюк М.М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.
11. *Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С.* Збірник задач з вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1971. – 316 с.
12. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.
13. *Rogers C.A.* Hausdorff measures / Rogers C.A. – Cambridge: Cambridge University Press, 1970. – 179 p.
14. *Symotyuk M.M.* The two-point problem for linear partial differential equation // International conference «NPDE–2003», Alushta, September 15-21, 2003. Book of abstracts. – Donetsk: 2003. – P. 208–209.

Одержано 21.10.2012

УДК 519.49

М. В. Стойка (Ужгородський нац. ун-т)

ПРОЕКТИВНІ МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ ГРУП НАД КІЛЬЦЕМ ЦІЛИХ P-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

The present paper deals with the task of the wildness of the problem of description of all nonequivalent matrix $\mathbb{Z}_p$-representation of the ring $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$, which is twisted group ring of a finite p-group G and the ring of p-adic integers $\mathbb{Z}_p$ with the factor system $\{\lambda_{a,b}\}$ $(\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*,\ a, b \in G)$. There were obtained necessary and sufficient conditions of not wildness of the problem of description of projective $\mathbb{Z}_p$-representations of finite group G for some cases.

У даній роботі розглядається питання, коли задача описання всіх нееквівалентних матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень кільця $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$, що є схрещеним груповим кільцем скінченної p-групи G і кільця цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ при системі факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ $(\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*,\ a, b \in G)$ є дикою. Отримано необхідну і достатню умови ручності задачі описання проективних $\mathbb{Z}_p$-зображень скінченної групи G при деяких умовах.

Нехай K — комутативне кільце з одиницею, K^* — мультиплікативна група кільця K, G — скінченна група і $GL(n, K)$ є групою всіх оборотних $n \times n$ матриць над кільцем K. Ми скажемо, що зображення $\Gamma : G \to GL(n, K)$ є проективним матричним зображенням степеня n групи G, якщо виконується рівність

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \mu_{a,b}\Gamma(a, b)\ (\mu_{a,b} \in K^*;\ a,\ b \in G). \tag{1}$$

З рівності (1) випливає наступна рівність

$$\mu_{a,bc} \cdot \mu_{b,c} = \mu_{ab,c} \cdot \mu_{a,b}\ \ (a, b, c \in G). \tag{2}$$

Система $\{\mu_{a,b}\}$ $|G|^2$ елементів із K^*, що задовольняють рівність (2), називається системою K-факторів групи G.

Проективне K-зображення Γ групи G, що задовольняє (1), називають ще проективним матричним зображенням з системою факторів $\{\mu_{a,b}\}$.

Два проективних зображення Γ_1 і Γ_2 групи G над кільцем K називаються еквівалентними, якщо існує така квадратна матриця C над K і елементи $\alpha_g \in K^*$, що задовольняють рівність

$$C^{-1}\Gamma_1(g)C = \alpha_g\Gamma_2(g) \quad (g \in G).$$

Схрещеним груповим кільцем $\Lambda = (G, K, \lambda)$ групи G $(|G| = d)$ і кільця K, що відповідає системі факторів $\{\lambda_{a,b}\}$, називається алгебра рангу d над K, з системою базисних елементів u_a $(a \in G)$, котрі задовольняють умову $u_a, u_b = = \lambda_{a,b}u_{ab}$ $\ (a, b \in G)$.

Нехай G — скінченна p-група, $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел, $\mathbb{Z}_p^*$ — мультиплікативна група кільця $\mathbb{Z}_p$ і $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ — схрещене групове кільце групи G і кільця $\mathbb{Z}_p$ з системою факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ $(\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*,\ a, b \in G)$. В даній роботі досліджується питання, коли задача описання нееквівалентних матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень кільця $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ є дикою.

Гудивок П. М. досліджував проблему, коли задача описання нееквівалентних матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень скінченної групи і кільця цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ є дикою, тобто включає задачу про подібність пар $n \times n$-матриць при $p > 2$ [1, 2].

Результати отримані в [3, 4] та [5, 6] сформулюємо наступним чином.

Теорема 1. ([3, 4]). *Нехай* G *— скінченна* p*-група і* $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ *— схрещене групове кільце групи* G *і кільця цілих* p*-адичних чисел* $\mathbb{Z}_p$ *з системою факторів із* $\mathbb{Z}_p^*$. $\tilde{\Lambda} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$, $T_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$, $\tilde{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{\Lambda}$ *і* d *є числом нееквівалентних матричних* $\mathbb{Q}_p$*-зображень алгебри* $\tilde{\Lambda}$. $n(\Lambda)$ *— число нееквівалентних нерозкладних матричних* $\mathbb{Z}_p$*-зображень кільця* Λ) *є скінченним тоді і тільки тоді коли виконується одна з наступних умов:*

1) G *— циклічна група порядку* p^r $(r \leq 2)$;

2) G *— циклічна* p*-група* $(p > 2)$ *і* $d < 3$;

3) G *— циклічна* 2*-група і* $d = 1$;

4) G *— абелева група типу* $(3, 3)$ *і* $d = 2$;

5) G *— абелева група типу* $(2^m, 2)$ $(m \geq 1)$ *і кільце* $\Lambda' = R_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$ $(R_2$ *– кільце цілих величин поля* $T_2)$ *задається співвідношеннями:*

$$u^{2^m} = -5^r,\ v^2 = 1,\ uv = vu\ (0 \leq r < 2^m);$$

6) G *— абелева група типу* $(2^m, 2)$ $(m \geq 1)$ *і* $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ *не комутативне кільце і* $\tilde{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_2} \tilde{\Lambda}$ *є простою алгеброю;*

7) G *— група дієдра і* $\tilde{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_2} \tilde{\Lambda}$ *є простою алгеброю.*

Теорема 2. ([5, 6]). *Нехай* G *— скінченна* p*-група порядку* $|G| > 1$, F_p *— скінченне розширення поля* $\mathbb{Q}_p$, K_p *— кільце цілих величин поля* F_p, T_p *— поле інерції поля* F_p*. Група* G *є ручною над кільцем* K_p *тоді і тільки тоді коли виконується одна з умов:*

1) G *— абелева група типу* $(2, 2)$ *і* $F_2 = T_2$;

2) G *— циклічна* p*-група порядку* p $(p > 2)$ *і* $F_p = T_p$;

3) G *— циклічна* 2*-група порядку* 8 *і* $F_2 = T_2$;

4) G *— група порядку* p $(p > 3)$ *і* $(F_p : T_p) \leq 2$;

5) G *— циклічна група порядку* 4 *і* $(F_2 : T_2) \leq 2$;

6) G *— група порядку* 3 *і* $(F_3, T_3) \leq 4$;

7) G *— група порядку* 2.

Лема 1. *Нехай* H *— підгрупа скінченої групи* G. $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ *— є схрещеним груповим кільцем групи* G *і кільця цілих* p*-адичних чисел* $\mathbb{Z}_p$ *з системою факторів із* $\mathbb{Z}_p^*$, $\Lambda_H = (H,\ \mathbb{Z}_p,\ \lambda) \subset \Lambda$*. Якщо* Λ_H *є диким кільцем над* $\mathbb{Z}_p$*, тоді і* Λ *є диким кільцем над* $\mathbb{Z}_p$*.*

Доведення. Нехай M—Λ_H-модуль з скінченним $\mathbb{Z}_p$-базисом і $M^\Lambda = \Lambda \otimes_{\Lambda_H} M$, де

$$u(v \otimes m) = uv \otimes m\ (u, v \in \Lambda,\ m \in M).$$

Нехай $\{u_g |\, g \in G\}$ є природнім $\mathbb{Z}_p$-базисом кільця Λ [7]. Тоді можемо записати:

$$M^\Lambda = u_{g_1} \otimes M \oplus \ldots \oplus u_{g_s} \otimes M, \tag{3}$$

де $g_1, g_2, \ldots, g_s$ є представниками системи лівих суміжних класів групи G за підгрупою H $(g_1 = e)$. Очевидно, що u_e – одиничний елемент кільця Λ і $u_e \otimes M \cong$ $\cong M$ як Λ_H модуль. Тоді з легко бачити, що:

$$W = u_{g_2} \otimes M \oplus ... \oplus u_{g_s} \otimes M$$

є Λ_H-модуль з скінченним $\mathbb{Z}_p$-базисом. Тоді з (3) випливає, що:

$$(M^{\Lambda})_{\Lambda_H} \cong M \oplus W. \tag{4}$$

Звідси, якщо M_1 — Λ_H-модуль з скінченним $\mathbb{Z}_p$-базисом, тоді:

$$(M_1^{\Lambda}) \cong M_1 \oplus W_1. \tag{5}$$

Як відомо, для Λ-модулів справедлива теорема Крулля-Шмідта, тоді з (4) і (5) отримаємо, що задача ізоморфізму Λ-модулів M^{Λ} і M_1^{Λ} включає задачу ізоморфізму Λ_H-модулів M та M_1. Таким чином, якщо Λ_H є диким над $\mathbb{Z}_p$, тоді Λ також дике над $\mathbb{Z}_p$.

Останнє доводить лему.

Лема 2. *Нехай F_p — скінченне розширення поля $\mathbb{Q}_p$, T_p — скінченне нерозгалужене розширення поля F_p, $R_p(L_p)$ — кільце цілих величин поля $F_p(T_p)$ і Λ є скінченновимірним R_p-порядком в сепарабельній F_p-алгебрі і $\Lambda' = L_p \otimes_{R_p} T_p$. Λ-порядок є диким над R_p тоді і тільки тоді якщо Λ' порядок є диким над L_p.*

Доведення леми можна отримати із (5) замінюючи F_p на $\mathbb{Q}_p$.

Лема 3. *Нехай G — циклічна 2-група порядку $|G| = 2^m$ $(m \geq 1)$, $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$ — схрещене групове кільце групи G і кільця цілих 2-адичних чисел $\mathbb{Z}_2$ з системою факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ $(\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*)$. Схрещене групове кільце Λ є ручним над $\mathbb{Z}_2$ тоді і тільки тоді коли виконується одна з наступних умов:*

1) $|G| \leq 8$;

2) $|G| = 2^m$ $(m > 3)$ *і* $\tilde{\Lambda} = \mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$ *є полем.*

Доведення. Очевидно, що якщо G є циклічною групою порядку 2^m $(m \geq 1)$, тоді кільце $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$ може бути задане наступними співвідношеннями:

$$u^{2^m} = \pm 5^r \ (0 \leq r \leq 2^m).$$

Розглянемо наступні можливі випадки.

1) Нехай $u^{2^m} = -5^r$ $(0 \leq r \leq 2^m)$. Тоді $\Lambda \cong Z_2[\theta]$, де θ – корінь незвідного многочлена: $x^{2^m} + 5^r$ над полем $\mathbb{Q}_2$. В цьому випадку $n(\Lambda) < \infty$ ($n(\Lambda)$ – число нееквівалентних нерозкладних матричних $\mathbb{Z}_2$ – зображень кільця Λ).

2) Нехай $u^{2^m} = 5^r$ $(0 \leq r < 2^m)$. Випадок $r = 0$ є очевидним (теорема 1 ([3, 4])). Нехай далі $r \neq 0$. Тоді $r = 2^S$ $(0 \leq S \leq m)$. В цьому випадку ми теж отримаємо декілька випадків.

а) Нехай $S = 4$ і $m = 5$, тобто $u^{2^5} = 5^{2^4}$. Поставимо $u_1 = \frac{u^2}{5}$. Тоді отримаємо: $u_1^{2^4} = \frac{u^{2^5}}{5^{2^4}} = 1$. Звідси кільце Λ містить $\mathbb{Z}_2 H$ (H – циклічна група 16-го порядку). Тоді на основі теореми 2 ([5, 6]) ми отримаємо, що Λ є диким кільцем над кільцем $\mathbb{Z}_2$.

b) $S = 0$. Тоді $n(\Lambda) < \infty$.

c) $S = 3$, $m = 4$, тобто $u^{16} = 5^8$. Тоді матимемо:

$$x^{16} - 5^8 = (x^8 + 5^4)(x^4 + 5^2)(x^2 + 5)(x^2 - 5).$$

Нехай $T = \mathbb{Q}_5$ і R є кільцем цілих величин поля T. Тоді отримаємо, що алгебра $T \otimes_{\mathbb{Q}_2} \Lambda$ матиме 5 незвідних T-зображень, бо $x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$. Таким чином беручи до уваги лему 2 отримаємо, що Λ є диким порядком над $\mathbb{Z}_2$.

d) $S = 2$, $m = 3$ i.e. $u^8 = 5^4$.

Перейдемо до розгляду поля $T = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$. Нехай R — кільце цілих величин поля T. Тоді отримаємо: $u_1^8 = 1$, де $u_1 = \frac{u}{\sqrt{5}}$. Звідси та з [1, 2] одержимо, що Λ не є диким кільцем.

e) Нехай $S = 2$, $m = 4$, тобто $u^{16} = 5^4$. Тоді одержимо:

$$x^{16} - 5^4 = (x^8 - 5^2)(x^8 + 5^2) = (x^8 + 5^2)(x^4 + 5)(x^4 - 5).$$

Нехай θ_3 — корінь многочлена $x^8 + 5^2$, θ_2 — многочлена $x^4 + 5$, θ_1 — многочлена $x^4 - 5$, $t_3 = \theta_3 - 1$, $t_2 = \theta_2 - 1$, $\tilde{\theta}_i$ — матриця, що відповідає оператору множення на θ_i в $\mathbb{Z}_2$-базисі: $1, \theta_3, \ldots, \theta_3^{m_i}$ кільця $Z_2[\theta_i]$; $\tilde{\theta}_i^{(n)} = \tilde{\theta}_i \otimes E \, (i = 1, 2, 3;\; E$ — одинична $n \times n$ матриця, $A \otimes B$ — кронекерівський добуток матриць A і $B)$ і $\langle \delta_{rj} \rangle$ — $m_r \times m_j$-матриця, у якої всі стовпці, крім останнього, нульові, а останній містить координати елемента $\delta_{rj} \in \mathbb{Z}_2[\theta_r]$ в $\mathbb{Z}_2$-базисі $1, \theta_3, \ldots, \theta_3^{m_r}$ кільця $\mathbb{Z}_2[\theta_i]$ $(r = 2, 3;\; 1 \leq j < r)$. Розглянемо наступне $\mathbb{Z}_2$-зображення $\Gamma(A, B)$ кільця Λ:

$$\Gamma_u(A, B) = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 & \langle t_3^2 \rangle \otimes E & 0 & \langle 1 \rangle \otimes A & \langle 1 \rangle \otimes B \\ 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 & \langle t_3 \rangle \otimes E & \langle 1 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2 \rangle \otimes E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2^2 \rangle \otimes E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} \end{pmatrix},$$

де A і B — довільні $n \times n$ матриці над кільцем $\mathbb{Z}_2$ і n — довільне натуральне число.

В цьому зображенні ми маємо пару нееквівалентних нерозкладних зображень:

$$u \to \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_3 & \langle t_3^j \rangle \otimes E \\ 0 & \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix}, \; u \to \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_2 & \langle t_2^j \rangle \otimes E \\ 0 & \tilde{\theta}_1 \end{pmatrix}, \; (j = 0, 1, 2, 3).$$

Звідси та з леми 2 одержимо, що Λ є диким кільцем над $\mathbb{Z}_2$.

1) Нехай $S = 1$, $m = 4$, тобто $u^{16} = 5^2$.

В цьому випадку отримаємо:

$$x^{16} - 5^2 = (x^8 + 5)(x^8 - 5) = (x^8 + 5)(x^4 + \sqrt{5})(x^4 - \sqrt{5}).$$

Нехай θ_1 — корінь многочлена $x^8 + 5$, θ_2 — многочлена $x^4 + \sqrt{5}$, θ_3 — многочлена $x^4 - \sqrt{5}$, $t_i = \theta_i - 1 \, (i = 1, 2, 3)$. Розглянемо наступне R-зображення

$\Gamma(A,B)$ кільця Λ:

$$\Gamma_u(A,B)=\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 & \langle t_1^2\rangle\otimes E & 0 & \langle 1\rangle\otimes A & \langle 1\rangle\otimes B \\ 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 & \langle t_1\rangle\otimes E & \langle 1\rangle\otimes E & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2\rangle\otimes E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2^2\rangle\otimes E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} \end{pmatrix}.$$

де A і B є довільними $n\times n$ матрицями над кільцем $\mathbb{Z}_2$ і n — довільне натуральне число.

Знову, в цьому зображенні ми маємо пару нееквівалентних нерозкладних зображень:

$$u\to\begin{pmatrix}\tilde{\theta}_1 & \langle t_1^j\rangle\otimes E\\ 0 & \tilde{\theta}_2\end{pmatrix},\ u\to\begin{pmatrix}\tilde{\theta}_2 & \langle t_2^j\rangle\otimes E\\ 0 & \tilde{\theta}_3\end{pmatrix},\ (j=0,1,2,3).$$

Звідси та з леми 2 одержимо, що Λ є диким кільцем над $\mathbb{Z}_2$.

g) Нехай $S=1$, $m=3$, тобто $u^8=5^2$. Тоді матимемо:

$$x^8-5^2=(x^4+5)(x^4-5)=(x^4+5)(x^2-\sqrt{5})(x^2+\sqrt{5}).$$

Нехай θ_3 — корінь многочлена x^4+5, θ_2 — многочлена $x^2+\sqrt{5}$, θ_1 — многочлена $x^2-\sqrt{5}$. Позначимо через $F_i=T(\theta_i)$ повне розгалужене розширення поля T $(i=1,2,3)$, $R[\theta_i]$ — кільце цілих величин F_i $(i=1,2,3)$. Знову побудуємо зображення:

$$u\to\begin{pmatrix}\tilde{\theta}_3 & \langle t_3^i\rangle\otimes E\\ 0 & \tilde{\theta}_2\end{pmatrix}(i=0,1), u\to\begin{pmatrix}\tilde{\theta}_3 & \langle t_3^j\rangle\otimes E\\ 0 & \tilde{\theta}_1\end{pmatrix}(j=0,1),$$

$$u\to\begin{pmatrix}\tilde{\theta}_2 & \langle t_2^j\rangle\otimes E\\ 0 & \tilde{\theta}_1\end{pmatrix}(j=0,1),$$

котрі також є нееквівалентні і нерозкладні. Ми отримали задачу аналогічну матричній задачі у випадку, коли $a^3=1$, $F=\mathbb{Q}_3(\sqrt{-3})$ чи $a^4=1$, $F=\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$. В першому випадку: $a^3=1$, $F=\mathbb{Q}_3(\sqrt{-3})$ бо $K=\mathbb{Z}_3[t]$ $(t^4=-3)$.

Якщо $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$ тоді $\mathbb{Q}_3(\varepsilon)\subset F$. Тоді матимемо зображення:

$$a\to\begin{pmatrix}\varepsilon^2 & t^i\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}(i=0,1); a\to\begin{pmatrix}\varepsilon^2 & t^j\\ 0 & 1\end{pmatrix}(j=0,1); a\to\begin{pmatrix}\varepsilon & t^j\\ 0 & 1\end{pmatrix}(j=0,1).$$

Якщо розглянемо другий випадок: $a^4=1$, $K=\mathbb{Z}_2[\sqrt{2}]$ то $F=\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ є полем відношень кільця K. $F(i)=\mathbb{Q}_2(\xi)$ $(\xi^8=1)$. $R[i]=\mathbb{Z}_2[\xi]$, $t_1=\xi-1$, $t=\sqrt{2}$.

Тоді матимемо зображення:

$$a\to\begin{pmatrix}\tilde{i} & \langle t_1^j\rangle\otimes E\\ 0 & -1\end{pmatrix}(j=0,1);\ \ a\to\begin{pmatrix}-1 & \langle t^j\rangle\otimes E\\ 0 & \tilde{i}\end{pmatrix}(j=0,1);$$

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & \langle t^j \rangle \otimes E \\ 0 & \tilde{i} \end{pmatrix} (j = 0, 1); \;\; a \to \begin{pmatrix} 1 & \langle t^j \rangle \otimes E \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (j = 0, 1).$$

Звідси та з леми 2 отримаємо, що Λ не є диким над $\mathbb{Z}_2$.

Останнє завершує доведення леми.

Сформулюємо результати із [7] наступним чином.

Лема 4. [7] *Нехай G — скінченна група, H — силовська підгрупа групи G, F_p — скінченне розширення поля $\mathbb{Q}_p$, T_p — поле інерції поля F_p і R_p є кільцем цілих величин поля F_p. Число нееквівалентних і нерозкладних проективних матричних R_p-зображень групи G скінченне тоді і тільки тоді коли виконується одна з наступних умов:*

1) *H — циклічна група порядку p^2 і $F_p = T_p$;*
2) *H — циклічна група порядку $p > 3$ і $(F_p : T_p) \leq 2$;*
3) *H — циклічна група порядку 3 і $(F_3 : T_3) \leq 3$;*
4) *H — група порядку 2.*

Теорема 3. *Нехай G — скінченна група з силовською p-підгрупою H. Задача описання всіх нееквівалентних проективних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи G є ручною тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *H — циклічна група порядку p^r $(r \leq 2)$;*
2) *H — циклічна група порядку 8;*
3) *H — абелева група типу $(2, 2)$.*

Доведення теореми випливає з теорем 1 і 2 та лем 3 та 4.

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику покійному професору Гудивку П. М. за участь у дискусії та обговоренні результатів даної статті

1. *Гудивок П. М.* О представлениях скрещенных групповых колец конечных групп и колец целых p-адических чисел // Доп. НАН України. – 1998.– № 7. – P. 19–23.
2. *Баранник Л. Ф., Гудивок П. М.* Скрещенные групповые кольца конечных групп и колец целых P-адических чисел с конечным числом неразложимых целочисленных представлений // Матем. сб. – 1979. – Т. 108, № 2. – С. 187–211.
3. *Дрозд Ю. А.* Адели и целочисленные представления // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 1080–1088.
4. *Бондаренко В. М., Гудивок П. М.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами // Сб. "Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры". – Киев: Институт матем. НАН Украины, 1993. – С. 5–14.
5. *Charles W. Curtis, Irving Reiner.* Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras // AMS CHELSEA PUBLISHING. – 2006. – P. 677.
6. *Dieterich E.* Group rings of wild representation type // Math. Ann. – 1983. – Vol. 266. – P. 1–22.
7. *Баранник Л. Ф., Гудивок П. М.* Проективные представления конечных групп над числовыми кольцами // Матем. сб. – 1970. – Т. 82, № 3. – С. 423–443.

Одержано 16.10.2012

УДК 519.21

Р. Є. Ямненко (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕСІВ НАКОПИЧЕННЯ, ПОРОДЖЕНИХ СУБГАУССОВИМИ ПРОЦЕСАМИ ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

The properties of continuous queue filled by cumulative process created by generalized sub-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process are studied. The distributions of certain functionals of the cumulative stochastic process are obtained.

Досліджуються властивості неперевної черги, породженої процесом накопичення, утвореним узагальненим субгауссовим процесом Орнштейна-Уленбека. Отримано оцінки розподілів певних функціоналів від відповідного стохастичного процесу.

Вступ. Робота продовжує цикл статей із вивчення черг, утворених стохастичними процесами з φ-субгауссовими приростами (див., зокрема, [2,4,6,7]). Класи $V(\varphi,\psi)$ процесів із такими приростами є загальними класами випадкових процесів. Зокрема, у частковому випадку вони містять і гауссові. Тобто, вивчаючи властивості цих класів, можна отримувати нові результати як для відомих випадкових процесів, так і для їх узагальнень. Зокрема, у даній роботі ми застосуємо результати з [7] до процесу накопичення неперервної черги, породженої узагальненим процесом Орнштейна-Уленбека з класу $V(\varphi,\psi)$.

Поведінка відповідної черги вивчатимемо через оцінювання розподілу певних екстремальних функціоналів від приростів випадкового процесу $\{X(t), t \in T\}$ з класу $V(\varphi,\psi)$, зокрема

$$\sup_{s\le t; s,t\in B}\big(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s))\big), \quad \inf_{s\le t; s,t\in B}\big(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s))\big),$$

де $f(t)$ – деяка неперервна функція. Отримані оцінки є корисними для дослідження розподілу максимальної довжини черги чи ймовірності переповнення чергою буфера. Функцію f трактуватимемо при цьому як інтенсивність обслуговування черги (див., наприклад, [1]).

Робота складається із двох розділів. У першому згадуються деякі необхідні поняття та теореми з теорії φ-субгауссових випадкових величин та процесів. У другому розділі наведено приклад застосування отриманих оцінок до субгауссових процесів, які, зокрема, мають місце для процесів дробового броунівського руху.

1. Випадкові процеси з класів $V(\varphi,\psi)$ Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P}\}$ – стандартний імовірнісний простір, T – деяка параметрична множина.

Означення 1. [3] *Функцію* $U=\{U(x), x\in\mathbb{R}\}$ *є* N*-функцією Орліча, якщо* U *– неперервна парна опукла функція така, що* $U(0)=0$, $U(x)$ *монотонно зростає при* $x>0$, $\frac{U(x)}{x}\to 0$ *при* $x\to 0$ *та* $\frac{U(x)}{x}\to\infty$ *при* $x\to\infty$.

Будемо казати, що для N-функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^2}=c>0. \qquad (1)$$

Означення 2. *N-функція φ_1 підпорядкована N-функції φ_2 ($\varphi_1 \prec \varphi_2$), якщо існують певні сталі $c > 0$ та $x_0 > 0$ такі, що для $x > x_0$ має місце нерівність $\varphi_1(x) < \varphi_2(cx)$. N-функції φ_1 та φ_2 еквівалентні, якщо $\varphi_1 \prec \varphi_2$ та $\varphi_2 \prec \varphi_1$.*

Означення 3. [3] *Нехай φ – N-функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується така нерівність*

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}. \tag{2}$$

Теорема 1. [3] *Простір $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\log \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\})}{\lambda}, \tag{3}$$

де $\varphi^{(-1)}$ – функція, обернена до функції φ, і для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\}. \tag{4}$$

Означення 4. [4] *Нехай $\varphi \prec \psi$ – дві N-функції Орліча. Скажемо, що випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить класу $V(\varphi, \psi)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t)$ належать простору $\mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$, та для всіх $s, t \in T$ їхні прирости $(X(t) - X(s))$ належать простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.*

Приклад 1. [3] *Гауссові та субгауссові процеси належать класу $V(\varphi, \varphi)$, де $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$. Зокрема, для такої N-функції $\tau_\varphi(\xi) = (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}}$.*

Приклад 2. [4] *Нехай*

$$X(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t),$$

де випадкова величина $\xi_0 \in \mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$, $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\} \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ та

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_\varphi(\xi_k)|f_k(t)| < \infty.$$

Тоді випадковий процес $X(t)$ належить класу $V(\varphi, \psi)$.

Більш детально про властивості, приклади та різне застосування випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$ можна прочитати у книгах [3], [4] та інших роботах, вказаних у бібліографії.

Нехай (T, ρ) – псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою (метрикою) ρ. Будемо розглядати сепарабельний випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$ з класу $V(\varphi, \psi)$. Припустимо, що існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, що $\sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$, та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h). \tag{5}$$

Зауважимо, що таку властивість має функція

$$\sigma(h) = \sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)),$$

якщо процес $X(t)$ неперервний у нормі $\tau_\varphi(\cdot)$.

Нехай B – компактна множина, $B \subseteq T$. Надалі будемо використовувати такі позначення:

- $\beta > 0$ – деяке число, таке що $\beta \leq \sigma\left(\inf_{s\in B}\sup_{t\in B}\rho(t,s)\right)$;
- $\mathsf{N}(u) = \mathsf{N}_{(B,\rho)}(u)$ – метрична масивність простору (B,ρ) (мінімальна кількість замкнених куль радіуса u, що покривають простір (B,ρ));
- $\mathsf{L}(u) = \frac{(\mathsf{N}(u))^2+\mathsf{N}(u)}{2}$.

Теорема 2. [7] *Нехай для випадкового процесу $X(t) = \{X(t),\ t \in B\}$ із класу $V(\varphi,\psi)$ виконується умова (5), і нехай $f = \{f(t), t \in B\}$ — неперервна функція, така що $|f(u) - f(w)| \leq \delta(\rho(u,w))$, де функція $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ — невід'ємна монотонно зростаюча, а $r = \{r(u), u \geq 1\}$ — така неперервна функція, що $r(u) > 0$, коли $u > 1$, причому функція $s(t) = r(\exp\{t\}), t \geq 0$, — опукла. Тоді при виконанні умови*

$$\int_0^\beta r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u < \infty \tag{6}$$

для всіх $p \in (0;1)$ і $x > 0$ справджуються нерівності

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\leq t; s,t\in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) > x\right\} \leq Z_r(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\inf_{s\leq t; s,t\in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) < -x\right\} \leq Z_r(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\leq t; s,t\in B}|X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))| > x\right\} \leq 2Z_r(p,x),$$

де

$$Z_r(p,t,x) = r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u\right)\times$$

$$\times\inf_{\lambda>0} W_2(\lambda,p)\exp\left\{p\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) + \lambda\left(2\sum_{k=1}^{\infty}\delta\left(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\right) - x\right)\right\},$$

$$\begin{aligned} W_2(\lambda,p) = \Bigg(&\sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-1}\left(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p)) - l\right)\times \\ &\times\exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda\sigma(2l\sigma^{(-1)}(\beta p))}{1-p}\right) + \frac{\lambda\delta(2l\sigma^{(-1)}(\beta p))}{1-p}\right\}\Bigg)^{1-p}. \end{aligned} \tag{7}$$

2. Процеси накопичення, породжені узагальненими процесами Орнштейна-Уленбека

Означення 5. *Будемо називати випадковий процес $Y = \{Y(t), t \in T\}$ субгауссовим узагальненим процесом Орнштейна-Уленбека, якщо Y є субгауссовим процесом із такою коваріаційною функцією:*

$$B_Y(t,s) = \mathsf{E}Y(t)Y(s) = e^{-\tau|t-s|}, \quad \tau > 0. \tag{8}$$

Розглянемо процес накопичення неперевної черги, вхідний процес якого має вигляд

$$X(t) = \int\limits_0^t Y(u)\mathsf{d}u, \tag{9}$$

де $Y(u)$ – субгауссовий узагальнений процес Орнштейна-Уленбека, тобто належить класу $V(\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2})$.

Легко пересвідчитись, що коваріаційна функція процесу $X(t)$ дорівнює

$$B_X(t,s) = \frac{2\min(t,s)}{\tau} + \frac{1}{\tau^2}\left(e^{-\tau t} + e^{-\tau s} - e^{-\tau|t-s|}\right). \tag{10}$$

Припустимо також, що $f(t)$ – неперервна функція, визначена на $T = [a,b]$, така що

$$|f(t) - f(s)| \le c|t-s|^n, \tag{11}$$

де $c > 0$ та $n > 0$ – деякі сталі. Тоді, користуючись результатами теореми 2, можна отримати наступні оцінки.

Теорема 3. *Нехай для субгауссового випадкового процесу $X(t) = \{X(t), t \in [a,b]\}$ та функції $f = \{f(t), t \in [a,b]\}$ виконуються умови теореми 2 та (11) відповідно. Тоді для всіх $p \in \left(0; \left(\frac{2}{3}\right)^H\right]$ і*

$$x > c(b-a)^n + \frac{2c(\beta p^2)^{2n}}{1-p^{2n}} \tag{12}$$

мають місце оцінки

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) > x\right\} \le Z(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\inf_{s\le t; s,t\in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) < -x\right\} \le Z(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}|X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))| > x\right\} \le 2Z(p,x),$$

де

$$Z(p,x) = \tfrac{2\tau^2 e^4}{p^4}\times$$

$$\times\left(\textstyle\sum_{l=0}^{\frac{\tau}{2p^2}}\left(\frac{\tau}{2p^2} + 1 - l\right)\exp\left\{-\frac{\left(x - c(2l)^n p^{2n}(b-a)^n\tau^{-n} - \frac{2cp^{4n}(b-a)^n}{\tau^n(1-p^{2n})}\right)^2}{4lp^2(b-a)^n\tau^{-n} + \frac{8p(b-a)}{\tau(1-p)}}\right\}\right)^{1-p}. \tag{13}$$

$$Z(p,x) = \tfrac{2\tau^2 e^4}{p^4}\times$$
$$\times\left(\sum\nolimits_{l=0}^{\frac{\tau}{2p^2}}\left(\tfrac{\tau}{2p^2}+1-l\right)\exp\left\{-\frac{\left(x-c(2l)^n p^{2n}(b-a)^n\tau^{-n}-\frac{2cp^{4n}(b-a)^n}{\tau^n(1-p^{2n})}\right)^2}{4lp^2(b-a)^n\tau^{-n}+\frac{8p(b-a)}{\tau(1-p)}}\right\}\right)^{1-p}. \tag{14}$$

Доведення. Перевіримо спершу умову (5). Оскільки

$$\sup_{|t-s|\le h}\tau_\varphi(Y(t)-Y(s)) = \sup_{|t-s|\le h}\left(\mathsf{E}(Y(t)-Y(s))^2\right)^{\frac12} =$$
$$= \sup_{|t-s|\le h}\tfrac{\sqrt2}{\tau}\left(\tau|t-s|-1+e^{-\tau|t-s|}\right)^{\frac12} = \tfrac{\sqrt2}{\tau}\left(\tau h-1+e^{-\tau h}\right)^{\frac12}\le\left(\tfrac{2h}{\tau}\right)^{\frac12},$$

то покладемо

$$\sigma(h) = \left(\frac{2h}{\tau}\right)^{\frac12}.$$

Тоді $\sigma^{(-1)}(u) = \frac{\tau u^2}{2}$, і якщо $u\le\beta$, то $\sigma^{(-1)}(u)\le\sigma^{(-1)}(\beta)\le\frac{b-a}{2}$, причому виконується нерівність

$$\mathsf{N}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\le\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\le\frac{b-a}{\sigma^{(-1)}(u)} = \frac{2(b-a)}{\tau u^2}.$$

Покладемо $r(u) = u^\alpha$, $0<\alpha<\frac14$. Перевіримо виконання умови (6). Коли $p\le\left(\frac23\right)^{1/2}$, то $\frac{b-a}{\tau u^2}>\frac32$, оскільки $u\le\left(\frac23\right)^{1/2}\left(\frac{b-a}{\tau}\right)^{1/2}\le p\beta$. Тоді

$$\begin{gathered}
r^{(-1)}\left(\tfrac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p^2} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u\right)\le\\
\le\left(\tfrac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p^2}\left(\left(\tfrac{b-a}{\tau u^2}+1\right)^2+\tfrac{b-a}{\tau u^2}+1\right)^\alpha/2^\alpha\mathsf{d}u\right)^{\frac1\alpha}<\\
<\tfrac12\left(\tfrac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p^2}\left(\tfrac{b-a}{\tau u^2}+\tfrac32\right)^{2\alpha}\mathsf{d}u\right)^{\frac1\alpha}\le 2\left(\tfrac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p}\left(\tfrac{b-a}{\tau u^2}\right)^{2\alpha}\mathsf{d}u\right)^{\frac1\alpha} =\\
= 2\tfrac{(b-a)^2}{\tau^2}(\beta p)^{\frac2H}\left(1-4\alpha\right)^{-\frac1\alpha}\to 2(b-a)^2\left(\tfrac{e}{\beta p}\right)^4,\quad\alpha\to 0.
\end{gathered}\tag{15}$$

Також справедливою є рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)) = \sum_{k=1}^{\infty}c(\beta p^k)^{\frac nH} = \frac{c\beta^{\frac nH}p^{2n}}{1-p^{2n}}. \tag{16}$$

Застосовуючи (15) та наступний ланцюжок перетворень

$$
\begin{aligned}
&\inf_{\lambda>0} \exp\left\{p\varphi\left(\tfrac{2\lambda\beta}{1-p}\right) + \lambda\left(2\sum_{k=1}^{\infty}\delta\left(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\right) - x\right)\right\} W_2(\lambda,p) = \\
&= \inf\nolimits_{\lambda>0} \exp\left\{\tfrac{2p\lambda^2\beta^2}{(1-p)^2} + \lambda\left(\tfrac{2c\beta^{2n}p^{2n}}{1-p^{2n}} - x\right)\right\} \times \\
&\times\left(\sum_{l=0}^{\mathsf{N}\left((\beta p)^2\right)-1} \left(\mathsf{N}((\beta p)^2) - l\right) \exp\left\{\tfrac{2l\lambda^2(\beta p)^2}{2(1-p)^2} + \tfrac{\lambda(2l)^n c(\beta p)^{2n}}{1-p}\right\}\right)^{1-p} \le \\
&\le \left(\sum_{l=0}^{\mathsf{N}\left((\beta p)^2\right)-1} \left(\tfrac{b-a}{2(\beta p)^2} + 1 - l\right) \inf_{\lambda>0} \exp\left\{\lambda^2\left(\tfrac{2p\beta^2}{(1-p)^3} + \tfrac{2l(\beta p)^2}{2(1-p)^2}\right) - \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -\lambda\left(\frac{x - \frac{2c\beta^{2n}p^{2n}}{1-p^{2n}}}{1-p} - \frac{(2l)^n c(\beta p)^{2n}}{1-p}\right)\right\}\right)^{1-p} \le \\
&\le \left(\sum\nolimits_{l=0}^{\frac{b-a}{2(\beta p)^2}} \left(\tfrac{b-a}{2(\beta p)^2} + 1 - l\right) \exp\left\{-\frac{\left(x - c(2l)^n(\beta p)^{2n} - \frac{2c(\beta p^2)^{2n}}{1-p^{2n}}\right)^2}{4l(\beta p)^2 + \frac{8p\beta^2}{1-p}}\right\}\right)^{1-p} = \\
&= \left(\sum\nolimits_{l=0}^{\frac{\tau}{2p^2}} \left(\tfrac{\tau}{2p^2} + 1 - l\right) \exp\left\{-\frac{\left(x - c(2l)^n p^{2n}(b-a)^n\tau^{-n} - \frac{2cp^{4n}(b-a)^n}{\tau^n(1-p^{2n})}\right)^2}{4lp^2(b-a)^n\tau^{-n} + \frac{8p(b-a)}{\tau(1-p)}}\right\}\right)^{1-p},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

при підстановці $\beta^2 = \frac{b-a}{\tau}$ до теореми 2, пересвідчуємося в справедливості теореми 3..

Висновки. Застосовано результати роботи [7] до субгауссових процесів накопичення, породжених процесами Орнштейна-Уленбека. Отримано оцінки, що характеризують надійність черг, утворених відповідними процесами накопичення. Одержані результати також можуть бути застосовані до широкого класу інших випадкових процесів, зокрема, гауссових.

1. R. Addie, P. Mannersalo, I. Norros, *Most probable paths and performance formulae for buffers with Gaussian input traffic*, Eur. Trans. Telecommun. **13(3)** (2002), 183-196.
2. *R. Yamnenko and O. Vasylyk* Random process from the class $V(\varphi,\psi)$: exceeding a curve// Theory of Stoch. Processes, – 2007. – **13 (29)**, No. 4 – P. 219-232.
3. В.В. Булдыгин, Ю.В. Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов.* ТВіМС, Киев, 1998. (Видання англійською: V.V. Buldygin and Yu.V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* AMS, Providence, RI, 2000.)
4. *Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є.* φ-субгауссові випадкові процеси: монографія, – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008.– 231 с.
5. *Ямненко Р. Є.* Оцінка ймовірності переповнення буфера для черги, що є узагальненим процесом Орнштейна-Уленбека// Теор. ймовірност. та матем. статист., – 2005. – **73** – С. 181-194.
6. *Ямненко Р. Є., Шрамко О. С.* Про розподіл процесів накопичення з класу $V(\varphi,\psi)$// Теор. ймовірност. та матем. статист., – 2010. – **83** – С. 163-176.
7. *Ямненко Р. Є.* Про оцінки розподілу деяких функціоналів від процесів з φ-субгауссовими приростами// Теор. ймовірност. та матем. статист., – 2011. – **85** – С. 163-176.

Одержано 02.11.2012

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

1) Стаття повинна містити короткий вступ, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
2) Рукопис повинен бути надрукований за допомогою комп'ютера на аркушах формату А4 (з одного боку). Об'єм статті не повинен перевищувати 15 сторінок.
3) Рукопис подається у двох екземплярах, а також електронною копією у вигляді LaTeX-файлу (див. пункт 4). Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською, англійською або російською. Перша сторінка оформляється таким чином:
   УДК №
   Ініціали, прізвище автора, офіційна назва установи, де працює автор
   Назва роботи
   Текст анотації англійською мовою.
   Текст анотації українською мовою.
   Текст статті.
4) Вимоги до набору:
   а) програма набору — LaTeX2ε;
   б) стильовий файл набору — Uzhgorod-Mathematical-Paper.cls (його можна одержати електронною поштою; звертатись у редколегію журналу за адресою depmath@univ.uzhgorod.ua)
   в) обов'язковий аргумент команд \label{...} і \cite{...} повинен містити прізвище першого автора статті латиницею (наприклад \label{IvanenkoEqaution1}).
5) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
6) Використана література подається загальним списком (у порядку посилань на джерела в тексті статті). Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

   1. *Холл М.* Теория групп. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
   2. *Іванчук І. І.* Назва // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, №2. – С. 274–278.
   3. *Петравчук П. П., Іванчук І. І.* Назва // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22. – С. 94–109.
   4. *Можаев В. М.* Название. – М., 1981. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, №8884.
   5. *Карпенко С. М.* Назва // Чисельні методи і застосування: Тез. допов. конф. (Київ, 27 серп.–2 вер. 1997 р.). – Київ, 1997. – С. 21–22.

7) Рукопис слід старанно вичитати.
8) Рукописи, оформлені без дотримання зазначених правил, розглядатися редакцією не будуть.

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 23 № 2

2012

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат математичного факультету УжНУ: редакція збірника наукових праць
”Науковий вісник Ужгородського національного університету”,
серія "Математика і інформатика".
Тел. +38(0312)642725, +38(0312)643395, +38(0312) 64-33-54
E-mail: depmath@univ.uzhgorod.ua