Київський національний університет імені Тараса Шевченка

М.П. Моклячук, Н.Ю. Щестюк

ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Монографія

Ужгород
Видавництво
"АУТДОР - ШАРК"
2013

УДК 519.21
ББК 22.17
М74

Рецензенти: Кнопов П.С., професор, доктор фіз.-мат. наук,
член-кореспондент НАН України;
Краснитський С.М., професор, доктор фіз.-мат. наук

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
24 квітня 2012 року, протокол № 8

Моклячук М.П., Щестюк Н.Ю.
М74 Оцінки функціоналів від випадкових полів: Монографія — Уж.: ПП "АУТДОР - ШАРК", 2013. — 228 с.

ISBN 978-617-7132-04-1

УДК 519.21
ББК 22.17

У монографії викладені методи оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень випадкових полів. Наведені формули для обчислення спектральної характеристики та величини середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки. Знайдені наймен сприятливі спектральні шільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики. Рекомендується науковим співробітникам, аспірантам і студентам університетів, що спеціалізуються в області теорії ймовірностей та математичної статистики. Книга буде корисна дослідникам в області радіотехніки, фізики атмосфери, геофізики, фінансової математики, математичної економіки.

ЗМІСТ

ВСТУП

Серед сучасних напрямків розвитку теорії стохастичних процесів таких як узагальнені стохастичні процеси, властивості функціоналів від стохастичних процесів, статистичні методи дослідження стохастичних процесів та випадкових полів та деяких інших, важливу роль відіграє напрямок, який присвячений задачам оцінювання невідомих значень стохастичних процесів та випадкових полів. Особливо актуальними в останні роки є задачі оцінки стохастичних процесів та випадкових полів в умовах невизначеності. Такі задачі виникають при дослідженні проблем теорії автоматичного регулювання, кодування та обробки сигналів у радіолокації та гідролокації, проблем розпізнавання образів мовних сигналів та зображень.

Задачі оцінювання невідомих значень стохастичних процесів включають у себе задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації.

Постановка задач інтерполяції та екстраполяції стаціонарних стохастичних послідовностей, їх геометрична інтерпретація та зведення до задач теорії функцій належить А.М. Колмогорову [37] – [40]. Задача екстраполяції стохастичної стаціонарної послідовності $\xi(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, зі скінченим математичним сподіванням квадрата випадкової величини $\xi(t)$ полягалає в тому, щоб знайти такі коефіцієнти a_i, при яких лінійна комбінація

$$L = a_1\xi(t-1) + a_2\xi(t-2) + \ldots + a_n\xi(t-n) + \ldots$$

випадкових величин

$$\xi(t-1),\ \xi(t-2),\ \ldots,\ \xi(t-n),\ldots$$

якомога більш точно наближає невідоме значення випадкової величини $\xi(t+m), m \geq 0$. За міру точності природно береться середньоквадратична похибка оцінювання

$$\sigma^2 = M\left|\xi(t+m) - L\right|^2.$$

Щодо проблеми інтерполяції, то А.М. Колмогоров розглядав задачу оцінювання одного пропущеного значення $\xi(t)$ за відомими значеннями

$$\xi(t+1),\ \xi(t+2),\ \ldots,\ \xi(t+n),\ldots$$

$$\xi(t-1),\ \xi(t-2),\ \ldots,\ \xi(t-n),\ldots$$

стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(t)$. Задачі екстраполяції та інтерполяції А.М. Колмогоров розв'язує, виходячи з того, що величини $\xi(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, є елементами гільбертового простору $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ випадкових величин другого порядку, скалярний добуток в якому ототожнюється із кореляційною функцією

$$\langle \xi(t+k), \xi(t) \rangle = B(k) = M\xi(t+k)\overline{\xi(t)},$$

а оптимальна оцінка (проекція) знаходиться виходячи із геометричних властивостей цього простору. А.М. Колмогоров розглядає дію унітарного оператора зсуву U на множині значень послідовності

$$U\xi(t) = \xi(t+1), \quad t \in \mathbb{Z},$$

що дозволяє одержати ряд основних властивостей стаціонарних послідовностей як безпосередніх наслідків результатів спектральної теорії унітарних операторів. Це, насамперед, спектральний розклад кореляційної функції

$$B(k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – неперервна зліва неспадна обмежена функція, так звана спектральна функція послідовності $\xi(t),\ t \in \mathbb{Z}$, спектральний розклад самої стаціонарної послідовності

$$\xi(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} Z(d\lambda),$$

де $Z(\Delta)$ – ортогональна стохастична міра, що підпорядкована мірі $F(\Delta)$, яка породжена спектральною функцією $F(\lambda)$: $F(\Delta) = M\left|Z(\Delta)\right|^2$. А також, як наслідок, можливість зображення випадкової величини $\eta \in L_2(\xi)$, де $L_2(\xi)$ – лінійний підпростір простору $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, породжений випадковими величинами $\xi(t)$, у вигляді

$$\eta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) Z(d\lambda),$$

де $\varphi(\lambda) \in L_2(F)$, $L_2(F)$ – гільбертів простір комплекснозначних функцій на $[-\pi, \pi]$, інтегровних в квадраті за мірою $F(\Delta)$.

Враховуючи вищевказані властивості стаціонарних послідовностей та розклад Вольда [333], [334] стаціонарної послідовності на суму сингулярної послідовності та рухомого середнього, А.М. Колмогоров знаходить формули для обчислення величини середньоквадратичних похибок екстраполяції та інтерполяції та встановлює спектральні умови для можливості інтерполяції та екстраполяції випадкової стаціонарної послідовності. Так необхідною та достатньою умовою, за якої безпомилкова екстраполяція невідомих значень буде неможливою, є умова

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda > -\infty,$$

де $f(\lambda)$ – спектральна щільність стаціонарної послідовності $\xi(t)$. Величина середньоквадратичної похибки екстраполяції на один крок вперед обчислюється за формулою

$$\sigma_e^2 = 2\pi \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda \right\},$$

тобто $\sigma_e^2/(2\pi)$ є (неперервним) середнім геометричним спектральної щільності $f(\lambda)$.

Необхідною та достатньою умовою, за якої безпомилкова інтерполяція невідомих значень буде неможливою, є умова (умова мінімальності)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda)} d\lambda < \infty.$$

Величина середньоквадратичної похибки інтерполяції одного пропущеного значення $\xi(t)$ обчислюється за формулою

$$\sigma_i^2 = 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda)} d\lambda \right)^{-1},$$

тобто $\sigma_i^2/(2\pi)$ є (неперервним) середнім гармонійним спектральної щільності $f(\lambda)$.

Результати А.М. Колмогорова, що стосуються задачі екстраполяції стаціонарних послідовностей з невеликими відмінностями вдалося перенести М.Г. Крейну [45] – [46] на випадок стаціонарних процесів $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. При цьому, як виявилось, умова, за якої безпомилкова екстраполяція невідомих значень буде неможливою має вигляд

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda > -\infty.$$

Розклад стаціонарного процесу на регулярний та сингулярний процес, аналогічний до розкладу Вольда, було досліджено О.Ханнером [194]:

$$\xi(t) = \int\limits_0^\infty a(s)d\eta(t-s) + \xi_s(t).$$

При цьому сам випадковий процес $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, розглядається як однопараметрична система векторів гільбертового простору, тобто як крива цього простору. Кореляційна теорія випадкових процесів еквівалентна теорії кривих у гільбертовому просторі, а стаціонарним випадковим процесам відповідають такі криві цього простору для яких скалярний добуток $\langle \xi(t), \xi(s) \rangle$ залежить лише від різниці $(t-s)$.

Щодо безпосереднього знаходження оцінок невідомих значень послідовностей та процесів, то Н. Вінер [327] та А.М. Яглом [166] – [170], [338], [339] запропонували два різних підходи до розв'язання задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів та послідовностей, які мають раціональну спектральну щільність. В цих роботах теорія А.М. Колмогорова дещо спрощується, конкретизується і набуває фізичної інтерпретації. Н. Вінер за додатковим припущенням відносно канонічної факторизації спектральної щільності процесу з абсолютно неперервним спектром шукає імпульсну перехідну функцію $c(s)$ фільтра як розв'язок деякого інтегрального рівняння типу Вінера–Хопфа. Цей фільтр перетворює процес $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$, що спостерігається до деякого моменту t, в оптимальну оцінку невідомого значення величини $\xi(t+q)$:

$$\hat{\xi}(t+q) = \int\limits_{-\infty}^{t} c(t-s)\zeta(s)ds, \quad q > 0.$$

А.М. Яглом пропонує спосіб, за яким оцінка невідомого значення випадкової величини шукається у вигляді

$$\hat{\xi}(t) = \int\limits_{\Lambda} \varphi(\lambda)dZ(\lambda),$$

де $\varphi(\lambda) \in L_2(f)$ – частотна (спектральна) характеристика оцінки, і дає процедуру пошуку цієї спектральної характеристики як граничного значення аналітичної в лівій півплощині функції, яка задовольняє деяким визначеним умовам. Слід відзначити роботи Г. Вольда [333], [334], Г. Крамера [182] – [184] та Л.В. Робінсона [297] – [299], які відносяться до теорії прогнозування випадкових процесів.

Аналогічні задачі оцінки невідомих значень досліджені і для векторних випадкових процесів. Так, загальні результати теорії екстраполяції векторних стаціонарних процесів вперше були сформульовані в роботі В.М. Засухіна [28]. Подальший розвиток теорія таких процесів одержала в роботах Ю.А. Розанова [148] – [153], Н. Вінера та П. Масані [327] – [332], [231] – [241], Г. Калліанпура та В. Мандрекара [206] – [209], [229], А. Макагона та М. Салеха [225] – [228], А.Г. Міамі та Г. Салеха [242] – [244], Г. Ніємі [275] – [277]. В роботах Х. Хелсона та Д. Лоуденслегера [195] – [197], Х. Хелсона та Г. Сеге [198] вказано на тісний зв'язок проблеми екстраполяції та проблеми апроксимації з теорії функцій. Слід також відзначити роботи Г. Салеха [302] – [310], Е.Б. Робертсона [295], Л.В. Робінсона [297] – [299], М. Розенблата [300], [301], П. Уітла [326], М. Поурахмаді [285] – [288]. А.М. Яглом [166], [167] розробив ефективний метод розв'язування задач прогнозування векторних стаціонарних процесів з раціональною спектральною матрицею. Роботи Д.С. Юла [340], Е. Вонга і Е.Б. Томаса [335] доповнюють роботу А.М. Яглома. Більш детальну бібліографію робіт з теорії стаціонарних процесів можна знайти в оглядових статтях П. Масані [240], Т. Кайлата [205], книгах А.М. Яглома [170], [338], [339] та Ю.В. Розанова [153].

Потреби теорії кодування та обробки сигналів у радіолокації та гідролокації, проблем розпізнавання образів стимулювали дослідження задач оцінювання невідомих значень випадкових полів. Дослідження оцінок однорідних випадкових полів стало можливим після того, як була розроблена спектральна теорія однорідних випадкових полів, як подальше узагальнення спектральної теорії випадкових стаціонарних послідовностей та процесів. Г. Калліанпур, Б. Мандрекар [206] – [209], Г. Калліанпур, А.Г. Міамі та Х. Ніємі [210], виходячи з комутативних властивостей однорідного поля, дослідили розклад Вольда однорідного випадкового поля на площині, спектральне зображення кореляційної функції. Х. Корезліогли та Ф. Лоубатон [220] – [223] сформулювали умови для канонічної факторизації спектральної щільності. А.Г. Міамі та Х. Ніємі [245], [277], спираючись на їх дослідження, знайшли аналітичні вирази для середньоквадратичних помилок прогнозу одного пропущеного значення стаціонарних полів. Знаходження оптимальної спектральної характеристики та найменшої середньо квадратичної помилки для задачі екстраполяції однорідного поля вивчається в роботах М.С. Пінскера [131] та Цзян Цзе-пея [162], [163], [181], [204]. У цих роботах досліджуються умови регулярності та розглядаються задачі лінійної екстраполяції за спостереженнями у півплощині. М.І. Фортус [157], [158] знайшла формули для знаходження спектральної характеристики екстраполювання випадкових полів як граничного значення аналітичної у деякій області функції та дослідила задачу екстраполяції випадкового поля, яке задовольняє хвильовому рівнянню. М.А. Мірзахмедов [54] – [56] вивчав задачу лінійного оцінювання однорідних випадкових полів за пропусками спостережень поля в деякому прямокутнику. В роботах О.А. Оревкової [128] – [130], [143] визначається поняття регулярності поля за деяким напрямком та вказуються необхідні та достатні умови регулярності за напрямком. Вказується на зв'язок задач екстраполяції поля з відомою спектральною щільністю та проблемами тригонометричної апроксимації.

Значний вклад у розвиток теорії випадкових полів вніс М. Й. Ядренко [171] – [175]. Він розвинув спектральну теорію випадкових полів та дослідив задачі оцінювання однорідного та ізотропного випадкового поля дискретного та неперервного аргументу. Основні його результати опубліковані у монографії [176], [336].

У роботах Ю.Д. Попова [133] – [142] наведено означення регулярності однорідного поля, що відрізняється від означення Цзян Цзе-пея та знаходяться екстраполяційні формули за спостереженнями у скінченній області. М.П. Моклячук [57] – [70], [74] – [77] досліджував задачі прогнозу для деяких класів скалярних та векторних однорідних полів на площині за спостереженнями у точках спеціального вигляду. С. Ранганат та К. Сейн [292] довели задачі лінійного прогнозу однорідного випадкового поля в цілочисельних координатах для каузальної та семікаузальної області до вигляду, який дає змогу за відомої спектральної щільності, що допускає канонічну факторизацію, скласти алгоритм та здійснити комп'ютерну реалізацію прогнозу.

Існує цілий ряд задач, коли зручною математичною моделлю є лінійні перетворення випадкових процесів та полів. До того ж, як показав Дж. Франке [191] – [193] (див. також огляд результатів з мінімаксної обробки інформації С.А. Кассама та Г.В. Пура [31], [218]), у багатьох задачах мінімаксного дослідження оцінювання лише одного невідомого значення процессу приводить до того, що найменш сприятливою щільністю буде щільність "білого шуму". І тільки дослідження саме функціоналів від випадкового поля дає нові результати. Постановка та дослідження задач оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень випадкової стаціонарної послідовності або процесу, що до того ж спостерігається з шумом викладена у роботах М.П. Моклячука [71] – [73], [78] – [92], [102], [246] – [256], де також наведені формули для обчислення величини середньоквадратичної похибки оптимальних оцінок лінійних функціоналів. Задачі оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень однорідних випадкових полів досліджені у роботах М.П. Моклячука та С.В. Татаринова [107] – [113], [269], М.П. Моклячука та Н.Ю. Щестюк [115] – [122], [164], [165], [270] – [272].

Класична теорія інтерполяції, екстраполяції та фільтрації стохастичних процесів базується на припущенні, що спектральні щільності процесів відомі. На практиці, однак, повна інформація про спектральні щільності у більшості випадків неможлива. Щоб подолати це ускладнення, знаходять параметричні чи непараметричні оцінки спектральних щільностей або підбирають щільності, виходячи з інших міркувань. Потім застосовують класичну теорію оцінювання, вважаючи, що вибрані тим чи іншим способом спектральні щільності є істинними. Такий підхід, як показали К.С. Вастола та Г.В. Пур [319] на конкретних прикладах, може призвести до значного росту величини похибки оцінки. Тому доцільно шукати оцінки, які є оптимальними одночасно для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей. Такі оцінки називають мінімаксними, оскільки вони мінімізують максимальне значення величини похибки.

За останні роки значно зріс інтерес до задач мінімасної інтерполяції, екстраполяції та фільтрації стаціонарних процесів. Л. Брейман [179], С.Т. Чен та С.А. Кассам [180], П.Д. Хубер [201] – [203], С.А. Кассам та ін. [214] – [218] досліджували задачі фільтрації та екстраполяції для спеціальних класів спектральних щільностей. Г.В. Пур та ін. [281] – [284], К.С. Вастола та Г.В. Пур [318] – [321], С. Верду та Г.В. Пур [322] – [325] вивчали проблеми мінімаксної екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для різних моделей стохастичних процесів.

Огляд результатів з мінімаксної обробки інформації зробили у свій час С.А. Кассам та Г.В. Пур [31], [218]. Інші результати викладені в книгах О.М. Куркіна, Ю.Б. Коробочкіна, С.Д. Шаталова [48], М.П. Моклячука [102], М.П. Моклячука та О.Ю. Масютки [52], [268].

Слід особливо відзначити статті У. Гренадера [16], [188], М.С. Йовітса та Д.Л. Джексона [341], в яких вперше запропоновано мінімаксний підхід до задач екстраполяції та фільтрації стаціонарних процесів та їх лінійних перетворень. Так, у статті У. Гренандера [16], [188] досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $\int_0^1 a(t)\xi(t)dt$ від стаціонарного стохастичного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу при $t < 0$. Проблема сформульована як гра двох гравців з нульовою сумою. Перший гравець вибирає стохастичний процес $\xi(t)$ з класу процесів з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією так, щоб величина середньоквадратичної похибки оцінки функціонала була найбільшою. Другий гравець шукає лінійну оцінку функціонала, яка мінімізує величину середньоквадратичної похибки. Показано, що така гра має положення рівноваги. Процес одностороннього рухомого середнього є найменш сприятливим у заданому класі стаціонарних процесів. Він дає найбільше значення величини середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки функціонала $\int_0^1 a(t)\xi(t)dt$. Найбільше значення величини похибки та найменш сприятливий процес визначаються найбільшим власним значенням та відповідною власною функцією оператора, що задається функцією $a(t)$. Аналогічна задача прогнозу функціоналів від стаціонарного процесу, про який відомо лише обмеження на його дисперсію та який спостерігається разом з білим шумом (або без шуму), була досліджена М.П. Моклячуком [71] – [73].

У статтях Ю. Франка [191], [192] проблема мінімаксної екстраполяції досліджена за допомогою методів субдиференціального числення. Такий підхід дає можливість знаходити рівняння, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності для різноманітних класів щільностей.

У статті М. Танігуші [314] вперше досліджена задача мінімаксної інтерполяції. Для моделі "ε – забруднення" стаціонарних послідовностей знайдений мінімаксно–робастний інтерполятор за пропуском спостережень в одній точці. Показано, що такий інтерполятор є класичним для спектральної щільності, яка визначає мінімаксний прогноз стаціонарної послідовності на один крок.

С.А. Кассам [216] вказав на взаємозв'язок такої задачі та задачі перевірки гіпотез. Він дослідив задачу для "смугової" моделі стаціонарних послідовностей. Така модель включає модель "ε – забруднення" як частковий випадок.

Ю. Франк [191] дослідив задачу мінімаксної інтерполяції з пропуском одного спостереження та екстраполяції на один крок для корельованих стаціонарних послідовностей.

Задачі оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стохастичних стаціонарних процесів та випадкових полів, що до того ж спостерігається з шумом, досліджені в роботах М.П. Моклячука [71] – [73], [78] – [92], [102], [246] – [262], у яких встановлені формули для обчислення величини середньоквадратичної похибки оптимальних оцінок лінійних функціоналів та знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики.

Задачі оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень векторних стаціонарних процесів та послідовностей, що спостерігається з шумом, досліджені в роботах М.П. Моклячука та О.Ю. Масютки [104] – [106], [51], [52], [263] – [268].

У роботах І.І. Дубовецької та М.П. Моклячука [21] – [27], [186], [187] досліджені задачі оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень періодично корельованих стохастичних послідовностей та процесів.

У роботах М.М. Луза та М.П. Моклячука [49], [50] досліджені задачі оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стохастичних послідовностей зі стаціонарними приростами.

Задачі оцінювання лінійних функціоналів від стаціонарних процесів, що спостерігаються з шумом, який в загальному випадку не є "білим" і може бути корельованим або некорельованим з процесом, до теперішнього часу вивчені ще недостатньо. В той же час задачі розпізнавання, оцінювання та кодування сигналів, які виникають при обробці зображень, в радіолокаційних та гідролокаційних системах супроводження цілей, демодуляторах аналогових систем зв'язку та деяких інших потребують конструктивного розв'язання.

Дана робота ставить своєю метою доповнити та розвинути методи оцінювання функціоналів від стохастичних процесів та випадкових полів.

Розділ 1

ЗАДАЧІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

1.1. Інтерполяція випадкових полів дискретного аргументу

1.1.1. Постановка задач

Нехай $\xi(\boldsymbol{x})$ – однорідне в широкому розумінні випадкове поле, що визначене на множині $D \subset \mathbb{R}^2$. Це означає, що $M\xi(\boldsymbol{x}) = 0$, $M\left|\xi(\boldsymbol{x})\right|^2 < +\infty$ та $M\xi(\boldsymbol{x})\,\overline{\xi(\boldsymbol{y})}$ залежить лише від різниці $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$. Якщо D – множина всіх цілочисельних точок $\mathbb{Z}^2$, то $\xi(\boldsymbol{x})$ називають однорідним полем дискретного аргумента. Кореляційна функція однорідного випадкового поля дискретного аргумента допускає спектральне зображення [5], [6], [337], [338]

$$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = M\xi(\boldsymbol{x})\,\overline{\xi(\boldsymbol{y})} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\langle\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle}\; F(d\boldsymbol{\theta}),$$

де $F(d\boldsymbol{\theta})$ – спектральна міра випадкового поля, що визначена на $\sigma-$ алгебрі борелевих підмножин множини $[-\pi;\pi)\times[-\pi;\pi)$. Якщо ця міра абсолютно неперервна відносно міри Лебега та

$$F(C) = \int_C f(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta},$$

то $f(\boldsymbol{\theta}) = f(\lambda,\mu)$ називається спектральною щільністю однорідного випадкового поля. Кореляційна функція

$$B(k,j) = M\xi(k+u,j+v)\overline{\xi(u,v)}$$

випадкового поля $\xi(k,j),(k,j)\in\mathbb{Z}^2$ у цьому випадку може бути записана у вигляді

$$B(k,j) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k\lambda+j\mu)}f(\lambda\,,\mu\,)d\lambda\, d\mu.$$

Нехай сума $\xi(k,j)+\eta(k,j)$ однорідних випадкових полів спостерігається в цілочисельних точках площини (поле дискретного аргументу) за винятком деякої області $K\subset\mathbb{Z}^2$, вигляд якої буде зазначений окремо. Будемо досліджувати задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_K\xi = \sum_{(k,j)\in K} a(k,j)\xi(k,j)$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$, $(k,j)\in K$ за даними спостережень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)+\eta(k,j)$ в точках $(k,j)\in\mathbb{Z}^2\backslash K$. Тобто досліджуватимемо задачу знаходження оцінки $\hat{A}_K\xi$ з класу лінійних функціоналів, що визначені на множині спостережень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)+\eta(k,j)$ в точках $(k,j)\in\mathbb{Z}^2\backslash K$, яка мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta = M\left|A_K\xi - \hat{A}_K\xi\right|^2.$$

Така задача розв'язана у роботі Моклячука М.П. та Татарінова С.В. [113] за умови, що поля $\xi(k,j)$ та $\eta(k,j)$ некорельовані, а область $K=\{(k,j): 0\le k\le M,\ 0\le j\le N\}$.

У цьому розділі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень однорідного поля дискретних аргументів, яке спостерігається з однорідно зв'язаним шумом. Досліджується залежність вигляду інтерполяційних оцінок від вигляду області (розглянуті області, що мають вигляд скінченної та нескінченної смуги певної ширини). Для певних класів спектральних щільностей знаходяться мінімаксні оцінки функціоналів від однорідного поля, що спостерігається з некорельованим шумом.

1.1.2. Оптимальні оцінки функціоналів від однорідних та однорідно зв'язаних полів

Оцінки, що базуються на спостереженнях корельованих полів є найбільш загальним випадком у задачах оцінювання за спостереженнями суміші двох полів. У випадку відомих спектральних щільностей полів застосуємо метод А.М. Колмогорова [37] – [39], [40], який базується на геометрії гільбертових просторів і спектральній теорії однорідних полів, та допускає геометричну інтерпретацію. Задача лінійного оцінювання за цим методом полягає у знаходженні величини $\hat{A}_K\xi$, яка є проекцією невідомого значення $A_K\xi$ на підпростір, що утворюється замиканням лінійної оболонки значень випадкових полів, що спостерігаються.

Нехай спостерігається випадкове поле $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в точках множини $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash K$, тобто значення поля недоступні для вимірювання у деякій замкнутій області K. Нехай $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля. Кореляційна структура таких полів визначається додатньо визначеною матрицею спектральних щільностей

$$W(\lambda,\mu)=\left(\begin{array}{cc} f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) & f_{\xi\eta}(\lambda,\mu) \\ f_{\eta\xi}(\lambda,\mu) & f_{\eta\eta}(\lambda,\mu) \end{array}\right). \tag{1.1}$$

При цьому

$$f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu)=f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu),$$
$$f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)=f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+2Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+f_{\eta\eta}(\lambda,\mu).$$

Розглядається задача лінійного оптимального оцінювання функціонала

$$A_K\xi=\sum_{(k,j)\in K}a(k,j)\xi(k,j)$$

від невідомих значень випадкового поля $\xi(u,v)$, $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash K$.

Нехай $L_2(f_{\zeta\zeta})$ позначає гільбертів простір комплекснозначних функцій на $[-\pi,\pi)\times[-\pi,\pi)$, що інтегровані в квадраті за мірою, що має щільність $f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)$. Позначимо через $L_2^{K-}(f_{\zeta\zeta})$ лінійний підпростір у просторі $L_2(f_{\zeta\zeta})$, породжений функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash K$. Тоді, як наслідок з теореми про спектральний розклад однорідних полів, можна стверджувати, що кожна випадкова величина, яка належить $L_2^{K-}(f_{\zeta\zeta})$, у тому числі і лінійна оцінка $\hat{A}_K\xi$ функціонала $A_K\xi$ за даними спостережень поля $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash K$, має вигляд

$$\hat{A}_K\xi=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda,\mu)\,Z_\zeta(d\lambda,d\mu), \tag{1.2}$$

де $Z_\zeta(\Delta_1,\Delta_2)$– ортогональна випадкова міра поля $\zeta(u,v)$, $h(\lambda,\mu)$– спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_K\xi$. Необхідною та достатньою умовою для того, щоб безпомилкова інтерполяція невідомих значень була неможливою є так звана умова мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}\,d\mu\;<\;\infty. \tag{1.3}$$

Ця умова була встановлена А.М. Колмогоровим [40] для задачі інтерполяції одного пропущеного значення випадкової послідовності без шуму, та досліджена Ю.А. Розановим [148] – [152], [153] для задачі інтерполяції пропущених значень з деякої множини недоступних для спостереження значень n–вимірного випадкового процесу дискретного аргументу. Геометричний зміст цієї умови полягає у тому, що довжина перпендикуляра $h_K=A_K\xi-\hat{A}_K\xi$ не дорівнює нулю.

Застосуємо метод ортогональних проекцій у гільбертовому просторі, який запропонував А.М. Колмогоров [40], щоб визначити спектральну характеристику $h(\lambda,\,\mu)$ оптимальної лінійної оцінки функціоналу. Функція $h(\lambda,\,\mu)$ повністю визначається двома умовами:

1. $h(\lambda,\,\mu) \in L_2^{K-}(f_{\zeta\zeta})$;
2. $(A_K(\lambda,\mu) - h(\lambda,\,\mu))\perp L_2^{K-}(f_{\zeta\zeta})$,
   тобто
   $$(A_K(\lambda,\mu) - h(\lambda,\,\mu))\perp e^{i(k\lambda+j\mu)} \quad (k,j) \in Z^2\backslash K,$$
   де
   $$A_K(\lambda,\mu) = \sum_{(k,j)\in K} a(k,j)e^{i(k\lambda+j\mu)}.$$

Теорема 1.1. *Нехай $\xi(k,j)$ та $\eta(k,j)$ – однорідні випадкові поля, що мають матрицю спектральних щільностей* (1.1)*. Нехай виконується умова мінімальності* (1.3)*. Спектральну характеристику $h(\lambda,\mu)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_K\xi$ від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень випадкового поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в точках множини $(u,v) \in \mathbb{Z}^2\backslash K$ можна обчислити за наступними формулами*

$$h(\lambda,\mu) = \frac{A_K(\lambda,\mu)(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + f_{\xi\eta}(\lambda,\mu))}{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + 2Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu) + f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)} - \\ - \frac{C_K(\lambda,\mu)}{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + 2Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu) + f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)}; \tag{1.4}$$

$$\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}) = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(|A_K(\lambda,\mu) - h(\lambda,\mu)|^2 f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) - 2h(\lambda,\mu)\overline{A_K(\lambda,\mu)}f_{\xi\eta}(\lambda,\mu) + \\ + 2\,|h(\lambda,\mu)|^2\, Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu) + |h(\lambda,\mu)|^2\, f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)\Big) d\lambda d\mu. \tag{1.5}$$

Тут

$$C_K(\lambda,\mu) = \sum_{(k,j)\in K} c_{kj}e^{i(k\lambda+j\mu)},$$

$c_{kj}, (k,j) \in K$ *– невідомі коефіцієнти, що знаходяться із системи рівнянь*

$$\sum_{(u,v)\in K} a_{uv}d_{k-u,j-v} = \sum_{(u,v)\in K} c_{uv}b_{k-u,j-v}, \quad (k,j) \in K, \tag{1.6}$$

де

$$b_{pq}=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}e^{-i(p\lambda+q\mu)}d\lambda d\mu,$$

$$d_{st}=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}e^{-i(s\lambda+t\mu)}d\lambda d\mu.$$

Доведення. Умова 2) виконується, якщо

$$M\left(A_K\xi-\hat{A}_K\xi\right)\overline{\zeta(k,j)}=0,\quad (k,j)\in\mathbb{Z}^2\backslash K,$$

тобто

$$M\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[A_K(\lambda,\,\mu)Z_\xi(d\lambda,d\mu)-h(\lambda,\mu)Z_\zeta(d\lambda,d\mu)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k\lambda+j\mu)}\overline{Z_\zeta(d\lambda,d\mu)}\right]=0,\quad (k,j)\in\mathbb{Z}^2\backslash K.$$

Отже для всіх $(k,j)\in\mathbb{Z}^2\backslash K$ маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[A_K(\lambda,\,\mu)f_{\xi\zeta}(\lambda,\,\mu)-h(\lambda,\mu)f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)\right]e^{-i(k\lambda+j\mu)}d\lambda d\mu=0.$$

Із цієї умови випливає, що

$$A_K(\lambda,\,\mu)(f_{\xi\xi}(\lambda,\,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu))-h(\lambda,\mu)f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)=C_K(\lambda,\mu),$$

де

$$C_K(\lambda,\mu)=\sum_{(k,j)\in K}c_{kj}e^{i(k\lambda+j\mu)},$$

c_{kj} – невідомі коефіцієнти. З останнього рівняння знаходимо вигляд спектральної характеристики оцінки

$$h(\lambda,\mu)=\frac{A_K(\lambda,\mu)(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu))-C_K(\lambda,\,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\,\mu)}=$$
$$=\frac{A_K(\lambda,\mu)(f_{\xi\xi}+f_{\xi\eta})}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}-\frac{C_K(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}.$$

Умова 1) еквівалентна тому, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}h(\lambda,\,\mu)e^{-i(k\lambda+j\mu)}d\lambda d\mu=0,\quad (k,j)\in K\subset\mathbb{Z}^2.$$

Якщо функції

$$\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}, \quad \frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}$$

розкласти у ряди Фур'є

$$\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} b_{pq}e^{i(p\lambda+q\mu)},$$

$$\frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty} d_{st}e^{i(s\lambda+t\mu)},$$

то одержуємо наступну систему рівнянь для знаходження невідомих c_{uv}, $(u,v)\in K$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(\sum_{(u,v)\in K} a_{uv}e^{i(u\lambda+v\mu)}\right)\left(\sum_{s,t=-\infty}^{\infty} d_{st}e^{i(s\lambda+t\mu)}\right)-\right.$$

$$\left.\left(\sum_{(m,n)\in K} c_{mn}e^{i(m\lambda+n\mu)}\right)\left(\sum_{p,q=-\infty}^{\infty} b_{pq}e^{i(p\lambda+j\mu)}\right)\right] e^{-i(k\lambda+j\mu)}d\lambda d\mu = 0,$$

$$(k,j)\in K.$$

З останнього рівняння матимемо таку систему рівнянь

$$\sum_{(u,v)\in K} a_{uv}d_{k-u,j-v} = \sum_{(u,v)\in K} c_{uv}b_{k-u,j-v}, \quad (k,j)\in K.$$

Середньоквадратична похибка оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\Delta(h;f_{\xi\xi},f_{\eta\eta},f_{\xi\eta}) = \frac{1}{4\pi^2}M\left[\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A_K Z_\xi(d\lambda,d\mu)-hZ_\zeta(d\lambda,d\mu))\times\right.$$

$$\left.\times\overline{(A_K Z_\xi(d\lambda,d\mu)-hZ_\zeta(d\lambda,d\mu))}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} M \left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(| A_K |^2 Z_\xi(d\lambda, d\mu) \overline{Z_\xi}(d\lambda, d\mu) - \right.$$

$$- h\overline{A_K} Z_\zeta(d\lambda, d\mu)\overline{Z_\xi}(d\lambda, d\mu) - A_K \overline{h} Z_\xi(d\lambda, d\mu)\overline{Z_\zeta}(d\lambda, d\mu) +$$

$$\left. + |h|^2 Z_\zeta(d\lambda, d\mu)\overline{Z_\zeta(d\lambda, d\mu)} \Big) \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(|A_K|^2 f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) - 2Re(h\overline{A_K} f_{\zeta\xi}(\lambda, \mu)) + |h|^2 f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu) \right) d\lambda d\mu =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(|A_K|^2 f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) - 2Re(h\overline{A_K}(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)) +$$

$$+ |h|^2 (f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + 2\mathrm{Re}\, f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) + f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) \Big) d\lambda d\mu =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(|A_K - h|^2 f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) - 2h\overline{A_K} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) +$$

$$+ 2 |h|^2 Ref_{\xi\eta}(\lambda, \mu) + |h|^2 f_{\eta\eta}(\lambda, \mu) \Big) d\lambda d\mu,$$

де $A_K = A_K(\lambda, \mu)$, $h = h(\lambda, \mu) = h(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta})$.
Спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_K \xi$ визначається формулою (1.4) та мінімізує величину середньоквадратичної похибки. Отже, теорема доведена.

Наслідок 1.1. *Якщо область $K \subset \mathbb{Z}^2$ має вигляд $K = \{(k, j) : -M \leq k \leq P, 0 \leq j \leq N\}$, то спектральну характеристику $h(\lambda, \mu)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала*

$$A_N^{-MP} \xi = \sum_{k=-M}^{P} \sum_{j=0}^{N} a(k, j) \xi(k, j)$$

від невідомих значень поля $\xi(k, j)$ за даними спостережень поля $\xi(u, v) + \eta(u, v)$ в точках множини $(u, v) \in Z^2 \backslash K$ можна обчислити за форму-

лами (1.4), (1.5), *де*

$$C_K(\lambda,\mu) = C_N^{-MP}(\lambda,\mu) = \sum_{k=-M}^{P}\sum_{j=0}^{N} c_{kj}e^{i(k\lambda+j\mu)},$$

коефіцієнти c_{kj} *знаходяться із системи рівнянь*

$$D_N^{-MP}\boldsymbol{a} = B_N^{-MP}\boldsymbol{c}, \tag{1.7}$$

де

$$\boldsymbol{a} = (a_{0,N}; a_{0,N-1}; ...; a_{0,0}; a_{-1,N}; a_{-1,N-1}; ...; a_{-1,0}; a_{1,N}; a_{1,N-1}; ...;$$
$$a_{1,0}; ...; a_{-M,N}; ...; a_{-M,0}; a_{P,N}; ...; a_{P,0})$$
$$\boldsymbol{c} = (c_{0,N}; c_{0,N-1}; ...; c_{0,0}; c_{-1,N}; c_{-1,N-1}; ...; c_{-1,0}; c_{1,N}; c_{1,N-1}; ...;$$
$$c_{1,0}; ...; c_{-M,N}; ...; c_{-M,0}; c_{P,N}; ...; c_{P,0})$$

D_N^{-MP}, B_N^{-MP} *подвійні матриці з елементами* $D_{kj}^{st} = d(k-s, j-t)$, $B_{kj}^{st} = b(k-s, j-t)$, $-M \leq k, s \leq P, 0 \leq j, t \leq N$ *визначені коефіцієнтами Фур'є функцій*

$$\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}, \quad \frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}$$

відповідно.

Наслідок 1.2. *Якщо область* $K \subset \mathbb{Z}^2$ *має вигляд* $K = \{(k,j) : k \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq N\}$, *то спектральну характеристику* $h(\lambda,\mu)$ *та величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta})$ *оптимальної лінійної оцінки функціонала*

$$A_N\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{N} a(k,j)\xi(k,j)$$

від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ *в точках множини* $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash K$ *можна обчислити за формулами* (1.4), (1.5), *де*

$$A_K(\lambda,\mu) = A_N(\lambda,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{N} a_{kj}e^{i(k\lambda+j\mu)} = \sum_{j=0}^{N} a_j(\lambda)e^{ij\mu},$$

$$a_j(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kj} e^{ik\lambda},$$

$$C_K(\lambda,\mu) = C_N(\lambda,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{N} c_{kj} e^{i(k\lambda + j\mu)} = \sum_{j=0}^{N} c_j(\lambda) e^{ij\mu},$$

$$c_j(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kj} e^{ik\lambda},$$

функції $c_j(\lambda)$ *визначаються системою рівнянь*

$$\sum_{j=0}^{N} a_j(\lambda) d_{t-j}(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} c_j(\lambda) b_{t-j}(\lambda), \quad t = 0,1,\ldots,N, \tag{1.8}$$

де

$$b_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} e^{-ij\mu} d\mu, \quad j = 0,1,\ldots,N,$$

$$d_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} e^{-ij\mu} d\mu, \quad j = 0,1,\ldots,N.$$

Якщо визначити оператори у просторі $\mathbb{C}^{N+1}$ *як матриці з елементами*

$$B_N(\lambda)(k,j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} d\mu, \quad k,j = 0,1,\ldots,N,$$

$$D_N(\lambda)(k,j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} d\mu,$$

$k,j = 0,1,\ldots,N$, *які визначаються коефіцієнтами Фур'є функцій*

$$\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}, \qquad \frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)},$$

відповідно, то (1.8) *матиме вигляд*

$$D_N(\lambda)\boldsymbol{a}(\lambda) = B_N(\lambda)\boldsymbol{c}(\lambda),$$

звідки

$$\boldsymbol{c}(\lambda) = B_N^{-1}(\lambda) D_N(\lambda) \boldsymbol{a}(\lambda). \tag{1.9}$$

Приклад 1.1. Приклад, у якому знайдено оцінку функціоналу

$$A_\xi = a(0,1)\xi(0,1) + a(0,0)\xi(0,0) + a(-1,1)\xi(-1,1)+$$

$$+(-1,0)\xi(-1,0) + a(1,1)\xi(1,1) + a(1,0)\xi(1,0)$$

за спостереженнями поля $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0,1\})$ зі спектральними щільностями

$$f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu) = \frac{A_0 B_0}{\left|e^{i\lambda} - \beta_1\right|^2 \left|e^{i\mu} - \beta_2\right|^2}, \quad |\beta_1| < 1,\ |\beta_2| < 1,$$

$$f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu) = \frac{\left|e^{i\lambda} - \alpha_1\right|^2 \left|e^{i\mu} - \alpha_2\right|^2}{\left|e^{i\lambda} - \beta_1\right|^2 \left|e^{i\mu} - \beta_2\right|^2}, \quad |\alpha_1| < 1,\ |\alpha_2| < 1.$$

наведено у додатках (Приклад 4.1). ♢

Наслідок 1.3. *Нехай $\xi(k,j)$, $\eta(k,j)$ – некорельовані однорідні випадкові поля, що мають спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$, які задовольняють умову мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu))^{-1}\, d\mu \ < \ \infty, \quad \lambda \in [-\pi;\pi] \tag{1.10}$$

У цьому випадку спектральну характеристику $h(f,g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\xi$ від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0,1,\ldots,N\})$ можна обчислити за формулами

$$h(\lambda,\mu) = \frac{A_N(\lambda,\mu) f(\lambda,\mu) - C_N(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)} =$$

$$= A_N(\lambda,\mu) - \frac{A_N(\lambda,\mu) g(\lambda,\mu) + C_N(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)}, \tag{1.11}$$

$$\Delta(f,g) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A_N(\lambda,\mu) g(\lambda,\mu) + C_N(\lambda,\mu)\right|^2}{\left|f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)\right|^2} f(\lambda,\mu)\, d\lambda\, d\mu +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A_N(\lambda,\mu) f(\lambda,\mu) - C_N(\lambda,\mu)\right|^2}{\left|f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)\right|^2} g(\lambda,\mu)\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\langle B_N(\lambda)\, \boldsymbol{c}_N(\lambda), \boldsymbol{c}_N(\lambda) \rangle + \langle R_N(\lambda)\, \boldsymbol{a}_N(\lambda), \boldsymbol{a}_N(\lambda) \rangle \right] d\lambda, \qquad (1.12)$$

де $B_N(\lambda)$, $D_N(\lambda)$, $R_N(\lambda)$ *– оператори у просторі* $\mathbb{C}^{N+1}$, *що визначені матрицями з елементами*

$$B_N(\lambda)\ (k,j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{1}{f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)} d\mu\ \ , k,j = 0,1,...,N, \qquad (1.13)$$

$$D_N(\lambda)\ (k,j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{f(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)} d\mu\ , k,j = 0,1,...,N, \qquad (1.14)$$

$$R_N(\lambda)\ (k,j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{f(\lambda,\mu)\, g(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)} d\mu; k,j = 0,1,...,N, \qquad (1.15)$$

де $\boldsymbol{a}_N(\lambda) = (a_0(\lambda),\, a_1(\lambda), ..., a_N(\lambda))\,,\ \boldsymbol{c}_N(\lambda) = (c_0(\lambda),\, c_1(\lambda), ..., c_N(\lambda))\,,$ $\boldsymbol{c}_N(\lambda) = B_N^{-1}(\lambda) D_N(\lambda) \boldsymbol{a}_N(\lambda)$, $\langle a(\lambda), c(\lambda) \rangle = \sum_{j=0}^{N} a(\lambda,j)\overline{c(\lambda,j)}$ *– скалярний добуток у просторі* C^{N+1}.

Наслідок 1.4. *Нехай* $\xi(k,j)$ *– однорідне випадкове поле, яке має спектральну щільність* $f(\lambda,\mu)$, *що задовольняє умову мінімальності* (1.10) *при* $g(\lambda,\mu) = 0$. *Спектральну характеристику* $h(f)$ *та середньоквадратичну похибку* $\Delta(f)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\xi$ *від невідомих значень однорідного поля* $\xi(k,j)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)$ *в точках множини* $(u,v) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0,1,...,N\})$ *можна обчислити за формулами*

$$h(f) = A_N(\lambda,\mu) - C_N(\lambda,\mu)\, f^{-1}(\lambda,\mu), \qquad (1.16)$$

$$\Delta(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left\langle B_N^{-1}(\lambda) \boldsymbol{a}_N(\lambda), \boldsymbol{a}_N(\lambda) \right\rangle d\lambda \qquad (1.17)$$

де

$$C_N(\lambda,\mu) = \sum_{j=0}^{N} (B_N^{-1}(\lambda) \boldsymbol{a}_N(\lambda))\,(j)\, e^{ij\mu},$$

$B_N(\lambda)$ *– оператор у просторі* C^{N+1}, *який визначається матрицею*

$$B_N(\lambda)\,(k,j)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\mu}\frac{1}{f\,(\lambda,\mu)}d\mu,\quad k,j=0,1,...,N,\tag{1.18}$$

яка утворена із коефіцієнтів Фур'є функції $f^{-1}(\lambda,\mu)$.

Наслідок 1.5. *Нехай* $\xi(k,j),\eta(k,j)$ *- некорельовані однорідні випадкові поля, задовольняють умову мінімальності* (1.10) *та мають спектральні щільності*

$$f\,(\lambda,\mu)=f_1\,(\lambda)\,f_2\,(\mu)\,,\quad g\,(\lambda,\mu)=f_1\,(\lambda)\,g_2\,(\mu)\,.$$

Спектральну характеристику $h(f,g)$ *та величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(f,g)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\xi$ *від невідомих значень поля* $\xi(k,j)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ *при* $(u,v)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0,1,\ldots,N\})$ *можна обчислити за формулами*

$$h(f,g)=\frac{A_N(\lambda,\mu)f_1(\lambda)g_2(\mu)-C_N(\lambda,\mu)}{f_1(\lambda)(f_2(\mu)+g_2(\mu))}=$$

$$=A_N(\lambda,\mu)-\frac{A_N(\lambda,\mu)f_1(\lambda)g_2(\mu)+C_N(\lambda,\mu)}{f_1(\lambda)(f_2(\mu)+g_2(\mu))},$$

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A_N(\lambda,\mu)f_1(\lambda)g_2(\mu)+C_N(\lambda,\mu)\right|^2}{f_1(\lambda)\left(f_2(\mu)+g_2(\mu)\right)^2}f_2(\mu)\,d\lambda\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A_N(\lambda,\mu)f_1(\lambda)g_2(\mu)-C_N(\lambda,\mu)\right|^2}{f_1(\lambda)\left(f_2(\mu)+g_2(\mu)\right)^2}g_2(\mu)\,d\lambda\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_1(\lambda)\left[\left\langle D_N\,\boldsymbol{a}_N(\lambda),\;B_N^{-1}D_N\boldsymbol{a}_N(\lambda)\right\rangle+\left\langle R_N\,\boldsymbol{a}_N(\lambda),\;\boldsymbol{a}_N(\lambda)\right\rangle\right]d\lambda,$$

де $B_N,\ D_N,\ R_N$ *– оператори у просторі* $\mathbb{C}^{N+1}$, *які визначаються коефіцієнтами Фур'є функцій*

$$\frac{1}{f_2\,(\mu)+g_2\,(\mu)},\quad\frac{f_2\,(\mu)}{f_2\,(\mu)+g_2\,(\mu)},\quad\frac{f_2\,(\mu)\,g_2\,(\mu)}{f_2\,(\mu)+g_2\,(\mu)}$$

відповідно:

$$B_N\,(k,j)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\mu}\frac{1}{f_2\,(\mu)+g_2\,(\mu)}d\mu,\quad k,j=0,1,\ldots,N,$$

$$D_N(k,j)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\mu}\frac{f_2(\mu)}{f_2(\mu)+g_2(\mu)}d\mu,\quad k,j=0,1,\dots,N,$$

$$R_N(k,j)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\mu}\frac{f_2(\mu)\,g_2(\mu)}{f_2(\mu)+g_2(\mu)}d\mu,\quad k,j=0,1,\dots,N.$$

Якщо ж однорідне випадкове поле $\xi(k,j)$, яке має спектральну щільність $f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)\,f_2(\mu)$ спостерігається без шуму і виконуються умови (1.10) при $g(\lambda,\mu)=0$, то спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0,1,\dots,N\})$ можна обчислити за формулами

$$h(f)=A_N(\lambda,\mu)-\tilde{C}_N(\lambda,\mu)\,\frac{1}{f_2(\mu)},$$

$$\Delta(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{C}_N(\lambda,\mu)\right|^2 f_1^{-1}(\lambda)\,f_2^{-1}(\mu)\,d\lambda\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_1(\lambda)\left\langle\tilde{B}_N^{-1}\boldsymbol{a}_N(\lambda),\ \boldsymbol{a}_N(\lambda)\right\rangle d\lambda$$

де

$$\tilde{C}_N\ (\lambda,\mu)=\sum_{j=0}^{\infty}(\tilde{B}_N^{-1}\boldsymbol{a}_N(\lambda))\,(j)\,e^{ij\mu},$$

$\tilde{B}_N$– оператор у просторі $\mathbb{C}^{N+1}$, що визначається матрицею із коефіцієнтів Фур'є функції $\frac{1}{f_2(\mu)}$:

$$\tilde{B}_N(k,j)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\mu}\frac{1}{f_2(\mu)}d\mu,\quad k,j=0,1,...,N.$$

Приклад 1.2. Приклад, що ілюструє знаходження оцінки функціонала

$$A_2\xi=a(-1,1)\xi(-1,1)+a(-1,0)\xi(-1,0)+a(1,1)\xi(1,1)+a(1,0)\xi(1,0),$$

за спостереженнями випадкового поля $\xi(u,v)$ без шуму в точках множини $\{(u,v)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0,1\})\}$, спектральна щільність якого дорівнює

$$f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)=B_0\Big/\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2\left|e^{i\mu}-\beta_2\right|^2,|\beta_1|<1,|\beta_2|<1,$$

наведено у додатках (Приклад 4.2). $\diamondsuit$

1.1.3. Мінімаксні оцінки в умовах спектральної невизначеності

Якщо матриця спектральних щільностей $W(\lambda, \mu)$ (1.1) точно не визначена, але відомо, що вона належить до деякого класу D_W допустимих матриць спектральних щільностей, то доцільно знаходити оцінки, які дають найменшу похибку для всіх матриць з деякого класу D_W матриць можливих спектральних щільностей [218]. Такі оцінки називаються мінімаксними (робастними).

Задача знаходження мінімаксної оцінки для поля розглядається як антагоністична гра, у якій функціоналом виграшу є середньоквадратичне відхилення $\Delta(W)$, простором стратегій першого гравця, який намагається максимізувати $\Delta(W)$ є множина допустимих спектральних щільностей D_W, а простором стратегій другого гравця, який намагається мінімізувати $\Delta(W)$, є множина спектральних характеристик H_D оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$ (Вив. статтю У. Гренандера [188]).

Означення 1.1. *Для заданої множини допустимих матриць спектральних щільностей D_W матрицю W_0 будемо називати найменш сприятливою для оптимального оцінювання функціоналу $A\xi$, якщо саме при цих значеннях спектральних щільностей класична оптимальна оцінка дає найбільшу похибку*

$$\Delta(W_0) = \Delta(h(W_0); W_0) = \max_{W_0 \in D_W} \Delta(h(W); W).$$

Означення 1.2. *Спектральну характеристику $h^0 = h^0(\lambda, \mu)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$ назвемо мінімаксною (робастною), якщо вона мінімізує максимальну похибку для заданої множини D_W матриць спектральних щільностей , тобто якщо виконуються умови*

$$\min_{h \in H_D} \max_{W \in D_W} \Delta(h; W) = \max_{W \in D_W} \Delta\left(h^0; W\right).$$

Найменш сприятлива матриця W_0 із множини матриць спектральних щільностей D_W та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(W_0)$ утворюють сідлову точку (h^0, W_0) функції $\Delta(h; W)$ на множині $H_D \times D_W$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta\left(h^0; W\right) \leq \Delta\left(h^0; W_0\right) \leq \Delta(h; W_0) \quad \forall h \in H_D \quad \forall W \in D_W$$

виконуються, якщо

$$\Delta\left(h\left(W_0\right);W_0\right)=\max_{W\in D_W}\Delta\left(h\left(W_0\right);W\right). \qquad (1.19)$$

Формула (1.19) вказує на спосіб знаходження мінімаксних (робастних) оцінок, який приводить до розв'язання задачі на умовний екстремум.

Як наслідок із теореми 1.1 та наведених означень маємо таке твердження.

Лема 1.1. *Матриця спектральних щільностей W_0 найменш сприятлива для заданої множини допустимих матриць спектральних щільностей D_W при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_N\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій $\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}$, $\frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}$ задають оператори $B_N^0(\lambda)$, $D_N^0(\lambda)$, які визначають розв'язок екстремальної задачі* (1.19)*. Мінімаксну спектральну характеристику $h^0=h(W_0)$ можна обчислити за формулою* (1.4) *за умови, що $h(f_0,g_0)\in H_D$.*

Задача на умовний екстремум (1.19) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [29], [146], [101]

$$\Delta_D\left(W\right)=-\Delta\left(h\left(W_0\right);\,W\right)+\delta\left(W\left|D_W\right.\right)\to\inf,$$

де $\delta\left(W\left|D_W\right.\right)$ – індикаторна функція множини D_W. Розв'язок цієї задачі визначається умовою $0\in\partial\Delta_D\left(W_0\right)$. Тут $\partial\Delta_D\left(W_0\right)$– субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D\left(W\right)$ в точці W_0.

У тому випадку коли випадкові поля $\xi(k,j)$ та $\eta(k,j)$ некорельовані та мають щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ відповідно, означення 1.1 та 1.2 будуть мати наступний вигляд.

Означення 1.3. *Щільності $f_0(\lambda,\mu)\in D_f$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_g$ назвемо найменш сприятливими у заданому класі спектральних щільностей $D=D_f\times D_g$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_N\xi$, якщо саме при цих значеннях спектральних щільностей оптимальна оцінка функціонала має найбільшу похибку*

$$\Delta\left(f_0,g_0\right)=\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f_0,g_0\right)=\max_{(f,g)\in D_f\times D_g}\Delta\left(h\left(f,g\right);f,g\right).$$

Означення 1.4. *Спектральну характеристику $h^0\left(\lambda,\mu\right)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$ називатимемо мінімаксною (робастною), якщо вона мінімізує максимальну похибку для заданої множини спектральних щільностей $D=D_f\times D_g$, тобто якщо виконуються умови*

$$h^0(\lambda,\mu) \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D_f\times D_g} L_2^{N-}(f+g),$$

$$\min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D} \Delta(h\,;f,g) = \max_{(f,g)\in D} \Delta(h^0\,;f,g).$$

Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h^0;f,g) \leqslant \Delta(h^0;f_0,g_0) \leqslant \Delta(h;f_0,g_0) \quad \forall h\in H_D \quad \forall (f,g)\in D_f\times D_g$$

виконуються, коли $h^0 = h(f_0,g_0)$, $h(f_0,g_0)\in H_D$ та (f_0,g_0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right) = \Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f_0,g_0\right), \tag{1.20}$$

де

$$\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);\, f,g\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A_N\left(\lambda,\mu\right)g_0\left(\lambda,\mu\right)+C_N\left(\lambda,\mu\right)\right|^2}{\left|f_0\left(\lambda,\mu\right)+g_0\left(\lambda,\mu\right)\right|^2} f\left(\lambda,\mu\right)\,d\mu +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A_N\left(\lambda,\mu\right)f_0\left(\lambda,\mu\right)-C_N\left(\lambda,\mu\right)\right|^2}{\left|f_0\left(\lambda,\mu\right)+g_0\left(\lambda,\mu\right)\right|^2}\, g\left(\lambda,\mu\right)\,d\mu.$$

Таким чином задача про пошук мінімакса для функції $\Delta(h(f,g);f,g)$ зводиться до задачі на умовний супремум функції $\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);\,f,g\right)$ на прямому добутку опуклих множин $D_f\times D_g$.

Із наслідку 1.3 та означень 1.3, 1.4 випливає справедливість такого твердження.

Лема 1.2. *Спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі на прямому добутку множин* $D_f\times D_g$ *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_N\xi$, *якщо коефіцієнти Фур'є функцій*

$$\frac{1}{(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))}, \quad \frac{f_0(\lambda,\mu)}{(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))}, \quad \frac{f_0(\lambda,\mu)g_0(\lambda,\mu)}{(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))}$$

задають оператори $B_N^0(\lambda), D_N^0(\lambda), R_N^0(\lambda)$ *за формулами* (1.13)–(1.15), *які визначають розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{(f,g)\in D} \Delta(h^0; f, g) =$$

$$= \max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\Big\langle D_N(\lambda)\boldsymbol{a}_N(\lambda), B_N^{-1}(\lambda) D_N(\lambda)\, \boldsymbol{a}_N(\lambda)\Big\rangle + \\ + \langle R_N(\lambda)\,\boldsymbol{a}_N(\lambda),\ \boldsymbol{a}_N(\lambda)\rangle \Big] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\Big\langle D_N^0(\lambda)\boldsymbol{a}_N(\lambda), (B_N^0(\lambda))^{-1} D_N^0(\lambda)\, \boldsymbol{a}_N(\lambda)\Big\rangle + \\ + \Big\langle R_N^0(\lambda)\,\boldsymbol{a}_N(\lambda),\ \boldsymbol{a}_N(\lambda)\Big\rangle \Big] d\lambda. \quad (1.21)$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0, g_0)$ *можна обчислити за формулою* (1.11) *за умови, що* $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Із наслідку 1.4 та означень 1.3, 1.4 випливає справедливість такого твердження.

Лема 1.3. *Спектральна щільність* $f_0(\lambda, \mu)$ *однорідного поля буде найменш сприятливою в класі* D_f *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_N\xi$ *від невідомих значень однорідного поля* $\xi(k, j)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u, v)$ *при* $(u, v) \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0, 1, \ldots, N\})$*, якщо коефіцієнти Фур'є функції* $(f_0(\lambda, \mu))^{-1}$ *задають оператор* $B_N^0(\lambda)$*, який визначає розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{f\in D_f} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\left\langle B_N^{-1}(\lambda)\boldsymbol{a}_N(\lambda),\ \boldsymbol{a}_N(\lambda)\right\rangle\right] d\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\left\langle (B_N^0(\lambda))^{-1}\boldsymbol{a}_N(\lambda),\ \boldsymbol{a}_N(\lambda)\right\rangle\right] d\lambda. \quad (1.22)$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0)$ *можна обчислити за формулою* (1.16) *за умови, що* $h(f_0) \in H_D$.

Задача на умовний екстремум (1.20) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [29], [146], [101]

$$\Delta_D\,(f, g) = -\Delta\,(h\,(f_0, g_0)\,;\, f, g) + \delta\,((f, g)\,|D_f \times D_g\,) \to \inf, \quad (1.23)$$

де

$$\delta\left((f,g)\left|D_f\times D_g\right.\right)=\left\{\begin{array}{l}0\ ,\ (f,g)\in D_f\times D_g,\\ +\infty,\ (f,g)\notin D_f\times D_g\end{array}\right.$$

– індикаторна функція множини $D_f\times D_g$. Розв'язок задачі (1.23) визначається умовою $0\in\partial\Delta_D\left(f_0,g_0\right)$, яка є необхідною та достатньою [29], [146], [101] для того, щоб точка (f_0,g_0) належала множині мінімумів опуклої функції, де $\partial\Delta_D\left(f_0,g_0\right)$– субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D\left(f,g\right)$ в точці (f_0,g_0).

Далі розглянемо задачі, які ілюструють застосування мінімаксного методу до конкретних класів спектральних щільностей.

1.1.4. Найменш сприятливі щільності в класі $D=D_{2\varepsilon_1}(\lambda)\times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$ від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в точках множини $(u,v)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0,1,\ldots,N\})$ для класу допустимих спектральних щільностей $D=D_{2\varepsilon_1}(\lambda)\times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$, де

$$D_{2\varepsilon_1}(\lambda)=$$
$$=\left\{f\left(\lambda,\mu\right)\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(f\left(\lambda,\mu\right)-u_1\left(\lambda,\mu\right)\Big)^2d\mu\ \leq\varepsilon_1(\lambda)\ ,\ \lambda\in[-\pi,\pi]\right.\right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}(\lambda)=$$
$$=\left\{g\left(\lambda,\mu\right)\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(g\left(\lambda,\mu\right)-u_2\left(\lambda,\mu\right)\Big)^2d\mu\ \leq\varepsilon_2(\lambda)\ ,\ \lambda\in[-\pi,\pi]\right.\right\}.$$

Лема 1.4. *Нехай $u\left(\lambda,\mu\right)$ — невід'ємна функція на $L^{\infty}(\mu)$ для $\lambda\in[-\pi,\pi]$, нехай $\varepsilon>0$ та*

$$D_{2\varepsilon}=\left\{f\left(\lambda,\mu\right)\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(\lambda,\mu\right)-u\left(\lambda,\mu\right)\right)^2d\mu\ \leq\varepsilon(\lambda)\ ,\ \lambda\in[-\pi,\pi]\right.\right\}.$$

Субдиференціал індикаторної функції $\delta\left(f_0\left|D_{2\varepsilon}\right.\right)$ має наступний вигляд

$$\partial\delta(f_0\left|D_{2\varepsilon}\right.)=\left\{\begin{array}{l}\{0\}\ ,\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_0\left(\lambda,\mu\right)-u\left(\lambda,\mu\right))^2\,d\mu\ <\varepsilon(\lambda);\\ \{\gamma(\lambda)\phi_0\}\ ,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_0\left(\lambda,\mu\right)-u\left(\lambda,\mu\right))^2\,d\mu\ =\varepsilon(\lambda),\end{array}\right.$$

де

$$\phi_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_0\,(\lambda,\mu) - u\,(\lambda,\mu)) f\,(\lambda,\mu)\ d\mu\ .$$

Доведення.
Якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_0\,(\lambda,\mu) - u\,(\lambda,\mu))^2\ d\mu\ < \varepsilon(\lambda),$$

то для кожної функції $h \in L^{\infty}(\mu)$ та для $\forall\lambda \in [-\pi,\pi]$ існує $\theta > 0$ таке, що $f_0 \pm \theta\, h \in D_{2\varepsilon}$, а отже $\delta(f_0 \pm \theta\, h) = 0$. Звідси $\delta(f_0 \pm \theta\, h) - \delta(f_0) = 0$. Тоді для всіх $h \in L^{\infty}(\mu)$ та для всіх опорних функцій $\varphi \in \partial\delta(f_0\,|D_{2\varepsilon}\,)$ маємо $\varphi(h) = 0$. Отже, $\partial\delta(f_0\,|D_{2\varepsilon}\,) = \{0\}$.

Якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_0\,(\lambda,\mu) - u\,(\lambda,\mu))^2\ d\mu\ = \varepsilon(\lambda),$$

то розглянемо

$$G(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f^0\,(\lambda,\mu) - u\,(\lambda,\mu))^2\ d\mu$$

для всіх $\lambda \in [-\pi,\pi]$ як скінченний опуклий функціонал на $L_2(\mu)$. Знайдемо Гато-диференціал у точці f_0 за напрямком f:

$$G_0'(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\ (G(f_0 + \varepsilon f) - G(f_0)) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f^0\,(\lambda,\mu) - u\,(\lambda,\mu)) f\,(\lambda,\mu)\ d\mu\ = 2\phi_0(f).$$

Нехай L_i^* - спряжений простір до $L_i(\mu),\ i = 1,2$.
Тоді за твердженням 4.3.2 Йоффе та Тіхомірова [29]

$$\{\varphi \in L_2^* \mid \varphi(f) \le \varphi(f_0),\ \forall f \in D_{2\varepsilon}\,\} = \{\gamma(\lambda)\ \phi_0(f)\ ,\ \gamma(\lambda) \ge 0\}\,\forall\lambda \in [-\pi,\pi]\,.$$

Отже, оскільки $L_1^* \subseteq L_2^*$

$$\partial\delta(f_0\,|D_{2\varepsilon}\,) = \{\varphi \in L_1^* \mid \varphi(f) \le \varphi(f_0), f \in D_{2\varepsilon}\,\} = \{\gamma(\lambda)\ \phi_0(f)\ ,\gamma(\lambda) \ge 0\}\,.$$

Зауважимо, що $\phi_0(f) \in L_1^*$. Лема доведена.

Теорема 1.2. *Нехай щільності* $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_2}$ *задовольняють умову мінімальності* (1.10) *і функції* $h_f\,(f_0,g_0)$, $h_g\,(f_0,g_0)$, *що визначені формулами*

$$h_f(f_0, g_0) = \left| \frac{A_N(\lambda,\mu)\, g_0(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)} + \frac{C_N(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)} \right|, \tag{1.24}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \left| \frac{A_N(\lambda,\mu)\, f_0(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)} - \frac{C_N(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)} \right|, \tag{1.25}$$

обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$ є найменш сприятливі в $D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_N\xi$, якщо $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ є розв'язком систем рівнянь

$$\left| \frac{A_N(\lambda,\mu)\, g_0(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)} + \frac{C_N^0(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)} \right|^2 =$$

$$= \gamma_1(\lambda)(f_0(\lambda,\mu) - u_1(\lambda,\mu)),$$

$$\left| \frac{A_N(\lambda,\mu)\, f_0(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)} - \frac{C_N^0(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)} \right|^2 =$$

$$= \gamma_2(\lambda)(g_0(\lambda,\mu) - u_2(\lambda,\mu)),$$

де $\gamma_1(\lambda) \geqslant 0$, $\gamma_2(\lambda) \geqslant 0$, причому $\gamma_1(\lambda) \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\lambda,\mu) - u_1(\lambda,\mu))^2\, d\mu = \varepsilon_1(\lambda),\ \lambda \in [-\pi,\pi],$$

та $\gamma_2(\lambda) \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g_0(\lambda,\mu) - u_2(\lambda,\mu))^2\, d\mu = \varepsilon_2(\lambda),\ \lambda \in [-\pi,\pi].$$

Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (1.11), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$.

Доведення: За умов обмеженості функцій $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, що визначені за формулами (1.24), (1.25), функціонал $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Задача визначення найменш сприятливих в $D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$ спектральних щільностей (f_0, g_0) при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_N\xi$ зводиться до знаходження мінімального значення функціоналу

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_f^2(f_0,g_0)f\left(\lambda,\mu\right)d\lambda d\mu - \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_g^2(f_0,g_0)g\left(\lambda,\mu\right)d\lambda d\mu.$$

на множині спектральних щільностей $D_{2\varepsilon_1}(\lambda)\times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$. Для цього можна знайти мінімальне значення $\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right)$ для кожного $\lambda\in[-\pi,\pi]$ в кожній точці множини $D_{2\varepsilon_1}(\lambda)\times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$. Для всіх $\lambda\in[-\pi,\pi]$ маємо

$$\Delta'(h(f_0,g_0);f,g) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_f^2(f_0,g_0)f\left(\lambda,\mu\right)d\mu - \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_g^2(f_0,g_0)g\left(\lambda,\mu\right)d\mu.$$

Враховуючи лему 1.4, одержуємо, що $f_0(\lambda,\mu)\in D_{2\varepsilon_1}(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$ є найменш сприятливими щільностями, якщо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f_0\left(\lambda,\mu\right)-u_1\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 d\mu \;=\varepsilon_1(\lambda),\;\lambda\in\left[-\pi,\pi\right],$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(g_0\left(\lambda,\mu\right)-u_2\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 d\mu \;=\varepsilon_2(\lambda),\;\lambda\in\left[-\pi,\pi\right],$$

та існують такі $\gamma_1(\lambda)\geqslant 0$, $\gamma_2(\lambda)\geqslant 0$, що для всіх варіацій $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ щільностей $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ та для $\lambda\in[-\pi,\pi]$ виконується рівняння

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_f^2(f_0,g_0)f\left(\lambda,\mu\right)d\mu + \int\limits_{-\pi}^{\pi} h_g^2(f_0,g_0)g\left(\lambda,\mu\right)d\mu =$$

$$=\gamma_1(\lambda)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f^0\left(\lambda,\mu\right)-u_1\left(\lambda,\mu\right)\right)f\left(\lambda,\mu\right)d\mu +$$

$$+\gamma_2(\lambda)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(g^0\left(\lambda,\mu\right)-u_2\left(\lambda,\mu\right)\right)g\left(\lambda,\mu\right)d\mu.$$

Звідси випливає твердження теореми.

1.1.5. Найменш сприятливі щільності в класі $D=D_f^0(\lambda)\times D_g^0(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$ від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в точках множини $(u,v)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0,1,\ldots,N\})$ для класу допустимих спектральних щільностей $D_f^0(\lambda)\times D_g^0(\lambda)$, де

$$D_f^0(\lambda)=\left\{f(\lambda,\mu)|\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\lambda,\mu)d\mu\leq P_1(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]\right\},$$

$$D_g^0(\lambda)=\left\{g(\lambda,\mu)|\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(\lambda,\mu)d\mu\leq P_2(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]\right\}.$$

Для даного класу допустимих спектральних щільностей справелдиве наступне твердження.

Теорема 1.3. *Нехай щільності* $f_0(\lambda,\mu)\in D_f^0(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_g^0(\lambda)$ *задовольняють умову мінімальності* (1.10) *і функції* $h_f\left(f_0,g_0\right)$, $h_g\left(f_0,g_0\right)$, *що визначені формулами* (1.24), (1.25), *обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в* $D_f^0(\lambda)\times D_g^0(\lambda)$ *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_N\xi$ *за даними спостережень поля* $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ *в точках множини* $(u,v)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0,1,\ldots,N\})$, *якщо* $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ *є розв'язком систем рівнянь*

$$\left|A_N\left(\lambda,\mu\right)\frac{g_0\left(\lambda,\mu\right)}{f_0\left(\lambda,\mu\right)+g_0\left(\lambda,\mu\right)}+\frac{C_N^0\left(\lambda,\mu\right)}{f_0\left(\lambda,\mu\right)+g_0\left(\lambda,\mu\right)}\right|^2=\alpha^2(\lambda),\qquad(1.26)$$

$$\left|A_N\left(\lambda,\mu\right)\frac{f_0\left(\lambda,\mu\right)}{f_0\left(\lambda,\mu\right)+g_0\left(\lambda,\mu\right)}-\frac{C_N^0\left(\lambda,\mu\right)}{f_0\left(\lambda,\mu\right)+g_0\left(\lambda,\mu\right)}\right|^2=\beta^2(\lambda),\qquad(1.27)$$

де $\alpha^2(\lambda)\geqslant 0$, $\beta^2(\lambda)\geqslant 0$, *причому* $\alpha^2(\lambda)\neq 0$ *та* $\beta^2(\lambda)\geqslant 0$, *якщо*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_0(\lambda,\mu)d\mu=P_1(\lambda),\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g_0(\lambda,\mu)d\mu=P_2(\lambda),\ \lambda\in\left[-\pi,\pi\right].$$

Функція $h\left(f_0,g_0\right)$, *обчислена за формулою* (1.11), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_N\xi$.

Доведення:
Очевидно, маємо опуклу множину $D_f^0(\lambda)\times D_g^0(\lambda)$. Для множини спектральних щільностей $D_f^0(\lambda)\times D_g^0(\lambda)$ складаємо функцію Лагранжа для кожного $\lambda\in[-\pi,\pi]$:

$$L\left(\lambda,f,g,\alpha(\lambda),\beta(\lambda)\right))=$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{A_N(\lambda,\mu)\,g_0(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)}+\frac{C_N(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)}\right|^2 f(\lambda,\mu)\,d\mu-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{A_N(\lambda,\mu)\,f_0(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)}-\frac{C_N(\lambda,\mu)}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)}\right|^2 g(\lambda,\mu)\,d\mu+$$

$$+\langle\alpha^2(\lambda),\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\lambda,\mu)d\mu-P_1(\lambda)\rangle+$$

$$+\langle\beta^2(\lambda),\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(\lambda,\mu)d\mu-P_2(\lambda)\rangle,$$

де $\alpha^2(\lambda)$, $\beta^2(\lambda)$ – множники Лагранжа, які відповідають обмеженням даного класу.

Оскільки щільності $f_0(\lambda,\mu)\in D_f^0(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_g^0(\lambda)$ і функції $h_f(f_0,g_0), h_g(f_0,g_0)$ обмежені, то за цих умов функціонал $\Delta(h(f_0,g_0);f,g)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1\times L_1$. Тому з умови $0\in\partial L(f_0,g_0)$ при $D=D_f^0(\lambda)\times D_g^0(\lambda)$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0\in D_f^0(\lambda)$, $g_0\in D_g^0(\lambda)$ задовольняють рівняння (1.26), (1.27).

Зауважимо, що $\alpha(\lambda)\neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_0(\lambda,\mu)d\mu=P_1(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi], \tag{1.28}$$

а також $\beta(\lambda)\neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g_0(\lambda,\mu)d\mu=P_2(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]. \tag{1.29}$$

Отже теорема доведена.

Наслідок 1.6. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda,\mu)$ відома, а спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu)\in D_g^0(\lambda)$, умова мінімальності для функції $f(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)$ виконується, функція $h_g(f,g_0)$ обмежена. Тоді спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu)$ є найменш сприятливою в класі $D_g^0(\lambda)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_N\xi$, якщо*

$$g_0(\lambda,\mu)=\max\left\{0,\alpha^{-1}(\lambda)\left|A_N(\lambda,\mu)\,f(\lambda,\mu)-C_N^0(\lambda,\mu)\right|-f(\lambda,\mu)\right\}$$

та пара $f(\lambda,\mu)\,,g_0(\lambda,\mu)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (1.21)*. Функція $h(f,g_0)$, визначена формулою* (1.11)*, і є мінімаксною спектраль-*

ною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$.

1.1.6. Найменш сприятливі щільності в класі $D = D_{-0}(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$ від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ в точках множини $(u,v) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0,1,\ldots,N\})$ для класу допустимих спектральних щільностей

$$D_{-0}(\lambda) = \left\{ f(\lambda,\mu) | \, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda,\mu)} d\lambda \geq P(\lambda), \ \forall \lambda \in [-\pi,\pi] \right\}.$$

Для даного класу допустимих спектральних щільностей справелдиве наступне твердження.

Теорема 1.4. *Нехай випадкове поле $\xi(k,j)$ спостерігається без шуму і нехай $f_0(\lambda,\mu) \in D_{-0}(\lambda)$. Тоді найменш сприятлива в класі $D_{-0}(\lambda)$ спектральна щільність $f_0(\lambda,\mu)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_N\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ в точках множини $(u,v) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0,1,\ldots,N\}$) має вигляд*

$$f_0^{-1}(\lambda,\mu) = P \sum_{j=-N}^{N} \frac{a_{|j|}(\lambda)}{a_0(\lambda)} e^{ij\mu}. \tag{1.30}$$

Якщо послідовність коефіцієнтів $a_0(\lambda), a_1(\lambda), \ldots, a_N(\lambda)$, або послідовність коефіцієнтів $a_N(\lambda), a_{N-1}(\lambda), \ldots, a_0(\lambda)$, які визначають функціонал $A_N\xi$, строго позитивна, то функція (1.30) *додатна і її можна зобразити у вигляді*

$$f_0^{-1}(\lambda,\mu) = \left| \sum_{j=0}^{N} \gamma_j(\lambda) e^{-ij\mu} \right|^2.$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h(f)$ оптимальної оцінки функціоналу $A_N(\lambda,\mu)$ можна обчислити за формулою

$$h(f) = -\sum_{j=1}^{N} a_j(\lambda) e^{-ij\mu}$$

у випадку, коли послідовність $a_0(\lambda), a_1(\lambda), \ldots, a_N(\lambda)$ строго позитивна *та за формулою*

$$h(f)=-\sum_{j=1}^{N}a_{N-j}(\lambda)e^{-i(j-N)\mu}$$

у випадку, коли послідовність $a_N(\lambda),a_{N-1}(\lambda),...,a_0(\lambda)$ *строго позитивна.*

Доведення:
Задача визначення найменш сприятливої в $D_{-0}(\lambda)$ спектральної щільності $f_0(\lambda,\mu)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_N\xi$ зводиться до знаходження мінімального значення функціоналу

$$\Delta(f)=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|C_N(\lambda,\mu)\right|^2 f^{-1}(\lambda,\mu)d\mu$$

на множині спектральних щільностей $D_{-0}(\lambda)$. Для цього можна знайти мінімальне значення

$$\Delta(f)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|C_N(\lambda,\mu)\right|^2}{f_0^2(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)d\mu$$

для кожного $\lambda\in[-\pi,\pi]$ в кожній точці множини $D_{-0}(\lambda)$. Складаємо функцію Лагранжа для кожного $\lambda\in[-\pi,\pi]$:

$$L\left(\lambda,f,\alpha(\lambda)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|C_N\left(\lambda,\mu\right)\right|^2}{\left(f_0\left(\lambda,\mu\right)\right)^2}f\left(\lambda,\mu\right)\ d\mu+\left\langle\alpha^2(\lambda),\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f^2(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)d\mu-P(\lambda)\right\rangle=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\left|C_N\left(\lambda,\mu\right)\right|^2}{f_0^2\left(\lambda,\mu\right)}-\frac{\alpha^2(\lambda)}{f_0^2\left(\lambda,\mu\right)}\right)f\left(\lambda,\mu\right)d\mu-\langle\alpha^2(\lambda),P(\lambda)\rangle,$$

де $\alpha^2(\lambda)$ – множник Лагранжа.
За умови $L'_f\left(\lambda,f,\alpha(\lambda)\right)=0$ матимемо

$$\frac{\left|C_N^0\left(\lambda,\mu\right)\right|^2}{f_0^2\left(\lambda,\mu\right)}=\frac{\alpha^2}{f_0^2\left(\lambda,\mu\right)},$$

Звідси отримаємо

$$\left|\sum_{j=0}^{N} c_j(\lambda)e^{ij\mu}\right|^2 = \alpha^2(\lambda),\ \forall\lambda\in[-\pi,\pi]$$

Тоді $c_0(\lambda)=\alpha(\lambda),\ c_k(\lambda)=0,\ k=1,...,N$.
Зауважимо, що $\alpha(\lambda)\neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_0^{-1}(\lambda,\mu)d\mu = P(\lambda), \quad \lambda\in[-\pi,\pi]$$

і тоді

$$r_0(\lambda) = P(\lambda), \quad \lambda\in[-\pi,\pi]\,.$$

Із системи рівнянь

$$B_0^N(\lambda)\boldsymbol{c}_N(\lambda) = \boldsymbol{a}_N(\lambda),$$

де $B_N(\lambda)$– оператор у просторі $\mathbb{C}^{N+1}$, визначений матрицею

$$B_N(\lambda)\,(k,j) = r_{j-k}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda}\frac{1}{f\,(\lambda,\mu)}d\lambda;\ k,j=0,1,\ldots,N,$$

можна виразити коефіцієнти Фур'є $r_j(\lambda)$ функції $\frac{1}{f^0(\lambda,\mu)}$ наступним чином

$$r_{|j|}(\lambda) = \frac{Pa_{|j|}(\lambda)}{a_0(\lambda)},\ j=0,...N.$$

Тоді, якщо послідовність коефіцієнтів $a_0(\lambda),a_1(\lambda),\ldots,a_N(\lambda)$, або послідовність коефіцієнтів $a_N(\lambda),a_{N-1}(\lambda),\ldots,a_0(\lambda)$ строго позитивна, функція

$$f_0^{-1}\,(\lambda,\mu) = \sum_{j=-N}^{N} r_{|j|}(\lambda)e^{ij\mu} = P\sum_{j=-N}^{N}\frac{a_{|j|}(\lambda)}{a_0(\lambda)}e^{ij\mu}$$

додатна і її можна зобразити у вигляді

$$f_0^{-1}\,(\lambda,\mu) = \left|\sum_{j=0}^{N}\gamma_j(\lambda)e^{-ij\mu}\right|^2$$

де $\gamma_j(\lambda)$ знаходяться з рівняння

$$\left|\sum_{j=0}^{N}\gamma_j(\lambda)e^{-ij\mu}\right|^2 = \sum_{j=-N}^{N} r_{|j|}(\lambda)e^{ij\mu}.$$

У цьому випадку $f_0(\lambda,\mu)$ – щільність однорідного випадкового поля авторегресії з параметром λ. Мінімаксну спектральну характеристику $h(f)$ оптимальної оцінки функціоналу $A_N(\lambda,\mu)$ можна обчислити за формулою

$$h(f)=\sum_{j=0}^{N}a_j(\lambda)e^{ij\mu}-\frac{a_0(\lambda)}{P}P\sum_{j=-N}^{N}\frac{a_{|j|}(\lambda)}{a_0(\lambda)}e^{ij\mu}=-\sum_{j=1}^{N}a_j(\lambda)e^{-ij\mu}$$

у випадку, коли послідовність $a_0(\lambda),a_1(\lambda),\ldots,a_N(\lambda)$ строго позитивна та

$$h(f)=\sum_{j=0}^{N}a_j(\lambda)e^{ij\mu}-\frac{a_N(\lambda)}{P}P\sum_{j=-N}^{N}\frac{a_{|j|}(\lambda)}{a_0(\lambda)}e^{ij\mu}=-\sum_{j=1}^{N}a_{N-j}(\lambda)e^{-i(j-N)\mu}$$

у випадку, коли послідовність $a_N(\lambda),a_{N-1}(\lambda),\ldots,a_0(\lambda)$ строго позитивна.

Приклади застосування інтерполяційних формул для поля дискретного аргументу наведено у додатках.

1.2. Інтерполяція випадкових полів неперервного аргументу

1.2.1. Постановка задач

Нехай $\xi(\boldsymbol{x})$ – однорідне в широкому розумінні випадкове поле, визначене на $\mathbb{R}^2$. Якщо кореляційна функція такого поля $B(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=M\xi(\boldsymbol{x}_1)\overline{\xi(\boldsymbol{x}_2)}=B(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)$ неперервна в точці $\boldsymbol{x}=0$, то поле $\xi(\boldsymbol{x})$ неперервне у середньоквадратичному сенсі в кожній точці $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$. Кореляційна функція однорідного середньо квадратично неперервного поля допускає спектральний розклад

$$B(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}F(d\boldsymbol{\theta}),$$

де $F(d\boldsymbol{\theta})$ – спектральна міра випадкового поля. Якщо ця міра абсолютно неперервна відносно міри Лебега та

$$F(C)=\int_C f(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta},$$

то $f(\boldsymbol{\theta})=f(\lambda,\mu)$ називається спектральною щільністю однорідного середньо квадратично неперервного випадкового поля $\xi(u,v)$

При цьому
$$B(u,v)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i(u\lambda+v\mu)}f(\lambda,\mu)d\lambda\, d\mu.$$
Нехай спостерігається сума неперервних однорідних випадкових полів $\xi\left(u,v\right)+\eta\left(u,v\right)$ в усіх точках площини за винятком деякої області $K\subset\mathbb{R}^2$, вигляд якої буде зазначений окремо.

Розглянемо задачу лінійного оцінювання функціонала
$$A\xi=\int\int\limits_{(s,\,t)\in K}a(s,t)\xi(s,t)dsdt$$
від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi\left(s,t\right),(s,t)\in K$ за даними спостережень поля з шумом $\zeta(u,v)=\xi\left(u,v\right)+\eta\left(u,v\right)$ в точках множини $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash K\}$.

Задача полягає в тому, щоб за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash K$ знайти таку лінійну оцінку $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$, щоб мінімізувати величину середньоквадратичної похибки $\Delta=M\left|A\xi-\hat{A}\xi\right|^2$.

У тому випадку, коли поля $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ некорельовані, а область $K=\{(s,t):0\leq s\leq S,\ 0\leq t\leq T\}$ ця задача розв'язана у роботі Моклячука М.П. та Татарінова С.В. [113].

У цьому розділі досліджується задача лінійного оцінювання функціонала
$$A_T\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{T}a(s,t)\xi(s,t)dsdt$$
від однорідного випадкового поля $\xi(s,t)$ за спостереженнями суми однорідних та однорідно зв'язаних полів $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в області $K=\{(u,v):u\in\mathbb{R},\ 0\leq v\leq T\}$. Окремо дослідимо класичні оцінки за умови, що спектральні щільності полів відомі та мінімаксні оцінки за умови спектральної невизначенності полів.

1.2.2. Оптимальні лінійні оцінки

Розглянемо випадкове поле $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$, де $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – середньоквадратично неперервні однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля. Кореляційна структура таких полів визначається матрицею (1.1). Нехай це поле спостерігається у кожній точці площини за винятком області $K=\{\ (u,v)\,|\ (u,v)\in\mathbb{R}\times[0,T]\ \}$, що має вигляд нескінченної смуги шириною T.

Для того щоб безпомилкова лінійна інтерполяція невідомих значень поля була неможлива, припустимо, що виконується умова мінімальності

[153]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda,\mu)|^2}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} d\mu < \infty, \quad \gamma(\lambda,\mu) = \int\limits_0^T \alpha(\lambda,t)\, e^{it\mu} dt \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.31)$$

Лінійні оцінки $\hat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$ мають вигляд

$$\hat{A}_T\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\lambda,\mu)\, Z_\zeta(d\lambda, d\mu),$$

де $Z_\zeta(\Delta_1,\Delta_2)$ – ортогональна випадкова міра поля $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$, $h(\lambda,\mu)$ – спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_T\xi$. Функція $h(\lambda,\mu)$ належить підпростору $L_2^{T-}(f_{\zeta\zeta})$ у гільбертовому просторі $L_2(f_{\zeta\zeta})$, породженому функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash[0,T])$.

Розглянемо спочатку задачу лінійного середньоквадратичного оптимального оцінювання функціонала за умови, що матриця спектральних щільностей відома. Задача полягає у тому, щоб знайти спектральну характеристику $h(\lambda,\mu)$ лінійної оцінки $\hat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$, яка мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}) = \min_{h \in L_2^{T-}(f_{\zeta\zeta})} \Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}) = \min_{\hat{A}_T\xi} M\left|A_T\xi - \hat{A}_T\xi\right|^2.$$

Застосуємо умови ортогональності у гільбертовому просторі [40]. Ортогональність різниці $A_T\xi - \hat{A}_T\xi$ до $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$ для всіх $(u,v) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash[0,T])$ еквівалентна тому, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[A_T(\lambda,\mu) f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu) - h(\lambda,\mu) f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)\right] e^{-i(u\lambda+v\mu)} d\lambda d\mu = 0$$

для всіх $(u,v) \in \mathbb{R}^2\backslash K$, тобто для всіх $(u,v) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash[0,T])$.
Із цієї умови випливає, що

$$A_T(\lambda,\mu)\left[f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)\right] - h(\lambda,\mu) f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu) = C_T(\lambda,\mu),$$

де $C_T(\lambda,\mu)$ аналітична у нижній півплощині функція, що рівномірно прямує до нуля відносно λ для кожного $\mu \in [0,T]$. Ця умова виконується, наприклад, для всіх функцій, що розкладаються (в сенсі збіжності в середньо квадратичному) в односторонній ряд Фур'є

$$C_T(\lambda,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{T}c(s,t)\,e^{i(s\lambda+t\mu)}dsdt=$$
$$=\int\limits_{0}^{T}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}c(s,t)e^{is\lambda}ds\right)e^{it\mu}dt=\int\limits_{0}^{T}c(\lambda,t)e^{it\mu}dt$$

Отже маємо наступні формули для обчислення спектральної характеристики та величини середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала:

$$h(\lambda,\mu)=\frac{A_T(\lambda,\mu)(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu))}{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+2Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)}-$$
$$-\frac{C_T(\lambda,\mu)}{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+2Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)};\quad(1.32)$$

$$\Delta(h,f_{\xi\xi},f_{\xi\eta},f_{\eta\eta})=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\left|A_T(\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu)\right|^2 f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)-$$
$$-2h(\lambda,\mu)\overline{A_T(\lambda,\mu)}f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+2\left|h(\lambda,\mu)\right|^2 Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+$$
$$+\left|h(\lambda,\mu)\right|^2 f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)\Bigg)d\lambda d\mu.\quad(1.33)$$

Тут

$$A_T(\lambda,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{T}a(s,t)\,e^{i(s\lambda+t\mu)}dsdt=$$
$$=\int\limits_{0}^{T}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}a(s,t)e^{is\lambda}ds\right)e^{it\mu}dt=\int\limits_{0}^{T}a(\lambda,t)e^{it\mu}dt,$$

функції $c(\lambda,t)$ знаходяться з рівності

$$c(\lambda,t)=B_T^{-1}(\lambda,t)D_T(\lambda,t)a(\lambda,t),\quad(1.34)$$

яка справедлива для $(\lambda,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$, $B_T(\lambda)$, $D_T(\lambda)$ – оператори у просторі $L_2[0,T]$, які визначаються перетворенням Фур'є функцій

$$\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}, \quad \frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}$$

відповідно

$$\left(B_T(\lambda)c(\lambda)\right)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-is\mu}\int\limits_{0}^{T} c\left(\lambda,v\right)e^{iv\mu}\frac{1}{f_{\zeta\zeta}\left(\lambda,\mu\right)}\,dvd\mu, \tag{1.35}$$

$$\left(D_T(\lambda)c(\lambda)\right)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-is\mu}\int\limits_{0}^{T} c\left(\lambda,v\right)e^{ivn\mu}\frac{f_{\xi\xi}\left(\lambda,\mu\right)+f_{\xi\eta}\left(\lambda,\mu\right)}{f_{\zeta\zeta}\left(\lambda,\mu\right)}\,dvd\mu, \tag{1.36}$$

$$(\lambda,t)\in\mathbb{R}\times[0,T].$$

Отже справджуються такі твердження.

Теорема 1.5. *Нехай $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$, де $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – середньоквадратично неперервні однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля. Нехай виконується умова* (1.31). *Спектральну характеристику $h(\lambda,\mu)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h;f_{\xi\xi},f_{\eta\eta},f_{\xi\eta})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T\xi$ від невідомих значень поля $\xi(s,t)$ за даними спостережень поля $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash[0,T])$ можна обчислити за формулами* (1.32), (1.33).

Наслідок 1.7. *Нехай $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – некорельовані однорідні випадкові поля, що мають спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$, які задовольняють умову мінімальності*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\gamma\left(\lambda,\mu\right)\right|^2}{f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)}d\mu<\infty,\ \gamma\left(\lambda,\mu\right)=\int\limits_{0}^{T}\alpha\left(\lambda,t\right)\,e^{it\mu}dt,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}. \tag{1.37}$$

Спектральну характеристику $h(f,g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T\xi$ від невідомих значень поля $\xi(s,t)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash[0,T])$ можна обчислити за формулами

$$h(f,g)=\frac{A_T(\lambda,\mu)f(\lambda,\mu)-C_T(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}=$$

$$= A_T(\lambda,\mu) - \frac{A_T(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu) + C_T(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}, \tag{1.38}$$

$$\Delta(f,g) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|A_T(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)+C_T(\lambda,\mu)|^2}{(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu))^2}f(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|A_T(\lambda,\mu)f(\lambda,\mu)-C_T(\lambda,\mu)|^2}{(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu))^2}g(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\langle B_T(\lambda)\,c(\lambda), c(\lambda)\rangle + \langle R_T(\lambda)\,a(\lambda), a(\lambda)\rangle\right]d\lambda \tag{1.39}$$

де $\left\langle b(\lambda), \overline{c(\lambda)}\right\rangle = \int_0^T b(\lambda,t)c(\lambda,t)dt$ *– скалярний добуток у просторі* $L_2[0,T]$,

$$c(\lambda) = B^{-1}(\lambda)D(\lambda)a(\lambda),$$

$B_T(\lambda), D_T(\lambda), R_T(\lambda)$ *– оператори у просторі* $L_2[0,T]$, *які визначаються через перетворення Фур'є функцій*

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}, \quad \frac{f(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}, \quad \frac{f(\lambda,\mu)\,g(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}$$

відповідно

$$\left(B_T(\lambda)c(\lambda)\right)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\int\limits_0^T c(\lambda,v)\,e^{iv\mu}\frac{1}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}\,dvd\mu, \tag{1.40}$$

$$\left(D_T(\lambda)c(\lambda)\right)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\int\limits_0^T c(\lambda,v)\,e^{iv\mu}\frac{f(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}\,dvd\mu, \tag{1.41}$$

$$\left(R_T(\lambda)c(\lambda)\right)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\int\limits_0^T c(\lambda,v)\,e^{iv\mu}\frac{f(\lambda,\mu)\,g(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}\,dvd\mu, \tag{1.42}$$

$$(s,t) \in \mathbb{R}\times[0,T].$$

Наслідок 1.8. *Нехай* $\xi(s,t)$ *- однорідне випадкове поле, яке має спектральну щільність* $f(\lambda,\mu)$, *що задовольняє умову* (1.37) *при* $g(\lambda,\mu) = 0$. *Спектральну характеристику* $h(f)$ *та середньоквадратичну похибку* $\Delta(f)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_T\xi$ *від невідомих значень однорідного поля* $\xi(s,t)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)$ *при* $(u,v) \in$

$\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash\{0,T])$ *можна обчислити за формулами*

$$h(f)=A_T\left(\lambda,\mu\right)-C_T\left(\lambda,\mu\right)f^{-1}(\lambda,\mu), \qquad (1.43)$$

$$\Delta(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|C_T\left(\lambda,\mu\right)\right|^2f^{-1}(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big\langle B_T(\lambda)c(\lambda),c(\lambda)\big\rangle d\lambda, \qquad (1.44)$$

де

$$\left(B_T(\lambda)c(\lambda)\right)(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\left(\int\limits_{0}^{T}c(\lambda,v)e^{iv\mu}dv\right)\frac{1}{f(\lambda,\mu)}d\mu, \qquad (1.45)$$

функція $c(\lambda,t)$ *знаходиться з рівності* $c(\lambda,t)=B_T^{-1}(\lambda,t)a(\lambda,t)$, *яка є справедливою для* $(\lambda,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$.

Наслідок 1.9. *Нехай* $\xi(s,t),\eta(s,t))$ *– некорельовані однорідні випадкові поля, що мають спектральні щільності* $f\left(\lambda,\mu\right)=f_1\left(\lambda\right)f_2\left(\mu\right)$, $g\left(\lambda,\mu\right)=f_1\left(\lambda\right)g_2\left(\mu\right)$, *які задовольняють умову* (1.37). *Спектральну характеристику* $h(f,g)$ *та величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(f,g)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_T\xi$ *від невідомих значень поля* $\xi(s,t)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ *при* $(u,v)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash[0,T])$ *можна обчислити за формулами*

$$h(f,g)=\frac{A_T(\lambda,\mu)f_1(\lambda)f_2(\mu)-C(\lambda,\mu)}{f_1(\lambda)(f_2(\mu)+g_2(\mu))}=$$
$$=A_T(\lambda,\mu)-\frac{A_T(\lambda,\mu)f_1(\lambda)g_2(\mu)+C(\lambda,\mu)}{f_1(\lambda)(f_2(\mu)+g_2(\mu))},$$

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda)\big[\big\langle D\,a(\lambda),B^{-1}Da(\lambda)\big\rangle+\langle R\,a(\lambda),\ a(\lambda)\rangle\big]d\lambda,$$

де B, D, R *- оператори у просторі* $L_2[0,T]$, *які визначаються співвідношеннями:*

$$\left(Bc\right)(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\bigg(\int\limits_{0}^{T}c\left(v\right)e^{iv\mu}dv\bigg)\frac{1}{f_2\left(\mu\right)+g_2\left(\mu\right)}\,d\mu,$$

$$(Dc)(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\left(\int\limits_{0}^{T}c(v)\,e^{iv\mu}dv\right)\frac{f_2(\mu)}{f_2(\mu)+g_2(\mu)}\,d\mu,$$

$$(Rc)(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\left(\int\limits_{0}^{T}c(v)\,e^{iv\mu}dv\right)\frac{f_2(\mu)\,g_2(\mu)}{f_2(\mu)+g_2(\mu)}\,d\mu.$$

Якщо однорідне випадкове поле $\xi(s,t)$, яке має спектральну щільність $f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)$, спостерігається без шуму, то спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_T\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash[0,T])$ можна обчислити за формулами

$$h(f)=A_T(\lambda,\mu)-\tilde{C}_T(\lambda,\mu)\,\frac{1}{f_2(\mu)},$$

$$\Delta(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|C_T(\lambda,\mu)\right|^2 f_1^{-1}(\lambda)\,f_2^{-1}(\mu)\,d\lambda\,d\mu=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda)\left\langle\tilde{B}_T^{-1}a(\lambda),\ a(\lambda)\right\rangle d\lambda,$$

де

$$C_T(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)\tilde{C}_T(\lambda,\mu)=\int\limits_{0}^{T}(\tilde{B}_T^{-1}(\lambda)a(\lambda))\,(t)\,e^{it\mu}dt,$$

$\tilde{B}_T$ – оператор у просторі $L_2[0,T)$, який визначається співвідношенням

$$\left(\tilde{B}_Tc\right)(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\left(\int\limits_{0}^{T}c(v)\,e^{iv\mu}dv\right)\frac{1}{f_2(\mu)}\,d\mu,\quad 0\le s\le\infty.$$

1.2.3. Мінімаксні оцінки в умовах невизначеності

У тому випадку, коли точні значення щільностей невідомо, проте визначено клас допустимих спектральних щільностей, будемо знаходити мінімаксні (робастні) оцінки, які дають найменшу похибку для всіх щільностей із заданого класу можливих спектральних щільностей. Враховуючи означення найменш сприятливих спектральних щільностей, мінімаксної спектральної характеристики, теорему 1.5 та наслідки 1.7, 1.8, 1.9, можемо переконатись у справедливості наступних тверджень, що сформульовані у вигляді лем.

Лема 1.5. *Спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в* $D_f \times D_g$ *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_T\xi$, *якщо функції* $(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1}$, $f_0(\lambda,\mu)\,(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1}$, $f_0(\lambda,\mu)\,g_0(\lambda,\mu)\,(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1}$ *задають оператори* $B^0_T(\lambda)$, $D^0_T(\lambda)$, $R^0_T(\lambda)$ *за формулами* (1.40), (1.41), (1.42), *які визначають розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);\, f,g\right) =$$
$$= \max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\langle B_T(\lambda)\,c(\lambda),\ c(\lambda)\rangle + \langle R_T(\lambda)\,a(\lambda),\ a(\lambda)\rangle\right] d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left\langle B^0_T(\lambda)\,c(\lambda),\ c(\lambda)\right\rangle + \left\langle R^0_T(\lambda)\,a(\lambda),\ a(\lambda)\right\rangle\right] d\lambda. \quad (1.46)$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0,g_0)$ *можна обчислити за формулою* (1.38) *за умови, що* $h(f_0,g_0)\in H_D$.

Лема 1.6. *Спектральна щільність* $f_0(\lambda,\mu)$ *однорідного поля* $\xi(s,t)$ *буде найменш сприятливою в класі* D_f *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_T\xi$ *від невідомих значень однорідного поля* $\xi(s,t)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)$ *при* $(u,v)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash[0,T])$, *якщо функція* $(f_0(\lambda,\mu))^{-1}$ *задає оператор* B^0_T *за формулою* (1.45), *який визначає розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{f\in D_f} \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|C_T\left(\lambda,\mu\right)\right|^2 f^{-1}(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu =$$
$$= \max_{f\in D_f} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle B_T(\lambda)c(\lambda), c(\lambda)\right\rangle d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle B^0_T(\lambda)c(\lambda), c(\lambda)\right\rangle d\lambda. \quad (1.47)$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0)$ *можна обчислити за формулою* (1.43) *за умови, що* $h(f_0)\in H_D$.

Найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_{0,}g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f_,g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки виконуються, коли $h^0 = h(f_0, g_0)$, $h(f_0, g_0) \in H_D$ та (f_0, g_0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right) = \Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f_0,g_0\right) \tag{1.48}$$

де

$$\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|A_T\left(\lambda,\mu\right)g_0\left(\lambda,\mu\right)+C_T\left(\lambda,\mu\right)\right|^2}{\left(f_0\left(\lambda,\mu\right)+g_0\left(\lambda,\mu\right)\right)^2}f\left(\lambda,\mu\right)d\lambda d\mu$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|A_T\left(\lambda,\mu\right)f_0\left(\lambda,\mu\right)-C_T\left(\lambda,\mu\right)\right|^2}{\left(f_0\left(\lambda,\mu\right)+g_0\left(\lambda,\mu\right)\right)^2}g\left(\lambda,\mu\right)d\lambda d\mu.$$

Задача на умовний екстремум (1.48) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D\left(f,g\right) = -\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);\, f,g\right) + \delta\left(\left(f,g\right)\left|D_f\times D_g\right.\right) \to \inf, \tag{1.49}$$

де $\delta\left(\left(f,g\right)\left|D_f\times D_g\right.\right)$ – індикаторна функція множини $D_f \times D_g$.

Розв'язок задачі (1.49) визначається умовою $0 \in \partial\Delta_D\left(f_0,g_0\right)$, де $\partial\Delta_D\left(f_0,g_0\right)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D\left(f,g\right)$ в точці (f_0, g_0). Скористаємося вказаною умовою щоб знайти найменш сприятливі спектральні щільності у деяких класах допустимих щільностей.

1.2.4. Найменш сприятливі щільності в класі $D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_T\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(s,t)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash[0,T])$ у тому випадку, коли точні значення щільностей невідомо, проте визначено клас допустимих спектральних щільностей $D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$, де

$$D_{2\varepsilon_1}(\lambda) = \left\{ f\left(\lambda,\mu\right) \left| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f\left(\lambda,\mu\right)-u_1\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 d\mu \le \varepsilon_1(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R} \right.\right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}(\lambda) = \left\{ g\left(\lambda,\mu\right) \left| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(g\left(\lambda,\mu\right)-u_2\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 d\mu \le \varepsilon_2(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R} \right.\right\}.$$

Розв'язок задачі на безумовний екстремум (1.49) в класі $D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$ дає можливість сформулювати наступну теорему.

Теорема 1.6. *Нехай щільності* $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_2}$ *задовольняють умову мінімальності* (1.37) *і функції:*

$$h_f\left(f_0, g_0\right) = \frac{\left|A_T\left(\lambda,\mu\right) g_0\left(\lambda,\mu\right) + C_T\left(\lambda,\mu\right)\right|}{f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)}, \qquad (1.50)$$

$$h_g\left(f_0, g_0\right) = \frac{\left|A_T\left(\lambda,\mu\right) f_0\left(\lambda,\mu\right) - C_T\left(\lambda,\mu\right)\right|}{f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)} \qquad (1.51)$$

обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_2}$ *найменш сприятливі в* $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$ *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_T\xi$, *якщо* $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_2}$ *є розв'язком систем рівнянь*

$$\left|A_T\left(\lambda,\mu\right) f_0\left(\lambda,\mu\right) + C_T^0\left(\lambda,\mu\right)\right|^2 = \\ = \left(f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 \left(f_0(\lambda,\mu) - u_1(\lambda,\mu)\right)\gamma_1(\lambda), \quad (1.52)$$

$$\left|A_T\left(\lambda,\mu\right) f_0\left(\lambda,\mu\right) - C_T^0\left(\lambda,\mu\right)\right|^2 = \\ = \left(f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 \left(g_0(\lambda,\mu) - u_2(\lambda,\mu)\right)\gamma_2(\lambda), \quad (1.53)$$

де функції $\gamma_1(\lambda) \geq 0, \gamma_2(\lambda) \geq 0$ *для всіх* $\lambda \in (-\infty,\infty)$, *і задовольняють умови*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f_0\left(\lambda,\mu\right) - u_1\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 d\mu = \varepsilon_1(\lambda),$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(g_0\left(\lambda,\mu\right) - u_2\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 d\mu = \varepsilon_2(\lambda).$$

Функція $h\left(f_0, g_0\right)$, *обчислена за формулою* (1.38), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_T\xi$.

Для доведення теореми скористаємося виглядом субдиференціалів індикаторної функції для класу $D = D_{2\varepsilon}(\lambda)$ у просторі $L_2(-\infty,\infty)$. Матимемо, що $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_2}$ є найменш сприятливими щільностями, якщо для всіх $\lambda \in (-\infty,\infty)$ виконуються умови

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f_0\left(\lambda,\mu\right) - u_1\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 d\mu = \varepsilon_1(\lambda),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(g_0(\lambda,\mu)-u_2(\lambda,\mu))^2 d\mu=\varepsilon_2(\lambda),$$

та існують такі $\gamma_1(\lambda)\geq 0, \gamma_2(\lambda)\geq 0$, що для всіх $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_f^2(f_0,g_0)f(\lambda,\mu)\,d\mu+\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_g^2(f_0,g_0)g(\lambda,\mu)\,d\mu=$$

$$=\gamma_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f^0(\lambda,\mu)-u_1(\lambda,\mu))f(\lambda,\mu)\,d\mu+\gamma_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}(g^0(\lambda,\mu)-u_2(\lambda,\mu))g(\lambda,\mu)\,d\mu.$$

1.2.5. Найменш сприятливі щільності в класі $D=D_v^u(\lambda)\times D_\varepsilon(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_T\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(s,t)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash[0,T])$ у тому випадку, коли точні значення щільностей невідомо, проте визначено клас допустимих спектральних щільностей $D=D_v^u(\lambda)\times D_\varepsilon(\lambda)$, де

$$D_v^u=\Bigg\{f(\lambda,\mu)\mid v(\lambda,\mu)\leq f(\lambda,\mu)\leq u(\lambda,\mu)\,,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda,\mu)\,d\mu\ =p_1(\lambda),\quad \lambda\in(-\infty,\infty)\Bigg\},$$

$$D_\varepsilon=\Bigg\{g(\lambda,\mu)\mid g(\lambda,\mu)=(1-\varepsilon)\,g_1(\lambda,\mu)+\varepsilon w(\lambda,\mu)\,,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda,\mu)\,d\mu\ =p_2(\lambda),\quad \lambda\in(-\infty,\infty)\Bigg\},$$

де спектральні щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$, $g_1(\lambda,\mu)$ задані і фіксовані і, крім того, щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$ обмежені. Клас D_v^u описує "смугову" модель випадкових полів. Клас D_ε описує модель "ε - забруднення" випадкових полів.

Лема 1.7. *Нехай $u(\lambda,\mu), v(\lambda,\mu)$ — фіксовані функції на $L^\infty(\mu)$ для всіх $\lambda\in(-\infty,\infty)$, нехай $\varepsilon>0$. Тоді субдиференціал індикаторної фун-*

кції $\delta\left(f_0\left|D_v^u\right.\right)$ *має наступний вигляд*

$$\partial\delta(f_0\left|D_v^u\right.) = \{\varpi(\lambda)\},$$

$$\varpi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\gamma_1(\lambda,\mu)+\gamma_2(\lambda,\mu)+\alpha_1^{-1}(\lambda))f_0(\lambda,\mu)d\mu,$$

функція $\gamma_1(\lambda,\mu) \le 0$ *і* $\gamma_1(\lambda,\mu) = 0$ *при* $f_0(\lambda,\mu) \ge v(\lambda,\mu)$*; функція* $\gamma_2(\lambda,\mu) \ge 0$ *і* $\gamma_2(\lambda,\mu) = 0$ *при* $f_0(\lambda,\mu) \le u(\lambda,\mu)$.

Лема 1.8. *Нехай* $\omega_1(\lambda,\mu), \omega_2(\lambda,\mu)$ *— невід'ємні функції на* $L^\infty(\mu)$ *для* $\forall\lambda \in (-\infty,\infty)$*, нехай* $\varepsilon > 0$*. Субдиференціал індикаторної функції* $\delta\left(g_0\left|D_\varepsilon\right.\right)$ *має вигляд*

$$\partial\delta(f_0\left|D_\varepsilon\right.) = \{\psi(\lambda)\},$$

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\varphi(\lambda,\mu)+\alpha_2^{-1}(\lambda))f_0(\lambda,\mu)d\mu,$$

функція $\varphi(\lambda,\mu) \le 0$ *і* $\varphi(\lambda,\mu) = 0$ *при* $g_0(\lambda,\mu) \ge (1-\varepsilon)g_1(\lambda,\mu)$.

Теорема 1.7. *Нехай* $f_0(\lambda,\mu) \in D_v^u$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_\varepsilon$*, задовольняють умову* (1.37)*, функції* $h_f(f_0,g_0)$*,* $h_g(f_0,g_0)$*, які обчислені за формулами* (1.50), (1.51)*, обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)$*,* $g_0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в класі* $D = D_v^u(\lambda)\times D_\varepsilon(\lambda)$ *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_T\xi$*, якщо вони задовольняють рівняння*

$$\begin{aligned}&\left|A_T(\lambda,\mu)\,g_0(\lambda,\mu)+C_T^0(\lambda,\mu)\right| = \\ &\qquad= (f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))\left(\gamma_1(\lambda,\mu)+\gamma_2(\lambda,\mu)+\alpha_1^{-1}(\lambda)\right),\end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned}&\left|A_T(\lambda,\mu)\,f_0(\lambda,\mu)-C_T^0(\lambda,\mu)\right| = \\ &\qquad= (f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))\left(\varphi(\lambda,\mu)+\alpha_2^{-1}(\lambda)\right),\end{aligned} \quad (1.55)$$

де функція $\gamma_1(\lambda,\mu) \le 0$ *і* $\gamma_1(\lambda,\mu) = 0$ *при* $f_0(\lambda,\mu) \ge v(\lambda,\mu)$*; функція* $\gamma_2(\lambda,\mu) \ge 0$ *і* $\gamma_2(\lambda,\mu) = 0$ *при* $f_0(\lambda,\mu) \le u(\lambda,\mu)$*; функція* $\varphi(\lambda,\mu) \le 0$ *і* $\varphi(\lambda,\mu) = 0$ *при* $g_0(\lambda,\mu) \ge (1-\varepsilon)g_1(\lambda,\mu)$*, задовольняють для всіх* $\lambda \in (-\infty,\infty)$ *умови*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda,\mu)d\mu = p_1(\lambda), \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_0(\lambda,\mu)d\mu = p_2(\lambda), \quad (1.56)$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (1.46). *Функція* $h\left(f_0, g_0\right)$, *яка обчислена за формулою* (1.38), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_T\xi$.

Для доведення теореми зауважимо, що маємо прямий добуток опуклих множин $D = D_v^u(\lambda) \times D_\varepsilon(\lambda)$. Оскільки щільності $f_0(\lambda, \mu) \in D_v^u$, $g_0(\lambda, \mu) \in D_\varepsilon$ і функції $h_f\left(f_0, g_0\right)$, $h_g\left(f_0, g_0\right)$ обмежені, то за цих умов функціонал $\Delta\left(h\left(f_0, g_0\right); f, g\right)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Тому

$$\partial\Delta_{D_v^u \times D_\varepsilon}\left(f_0, g_0\right) = -\partial\Delta\left(h\left(f_0, g_0\right); f_0, g_0\right) + \partial\delta\left(\left(f_0, g_0\right) \middle| D_v^u \times D_\varepsilon\right),$$

З умови $0 \in \partial\Delta_D\left(f_0, g_0\right)$ при $D = D_l^u \times D_\varepsilon$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0 \in D_f^0$, $g_0 \in D_g^0$ задовольняють рівняння (1.54), (1.55).

Наслідок 1.10. *Нехай спектральна щільність* $f(\lambda, \mu)$ *зафіксована, щільність* $f(\lambda, \mu) + g_0(\lambda, \mu)$ *задовольняє умову* (1.37), *і функція* $h_g\left(f, g_0\right)$ *обчислена за формулою* (1.51), *обмежена. Спектральна щільність* $g_0(\lambda, \mu)$ *найменш сприятлива в класі* D_ε *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A\xi$, *якщо вона має вигляд*

$$g_0\left(\lambda, \mu\right) = \max\left\{ (1-\varepsilon)\; g_1\left(\lambda, \mu\right), \right.$$
$$\left. \alpha_2(\lambda)\; \left|A_T\left(\lambda, \mu\right) f\left(\lambda, \mu\right) - C_T^0\left(\lambda, \mu\right)\right| - f\left(\lambda, \mu\right) \right\}$$

і пара $\left(f(\lambda, \mu), g_0(\lambda, \mu)\right)$ *визначає розв'язок екстремальної задачі* (1.46). *Функція* $h\left(f, g_0\right)$, *обчислена за формулою* (1.38), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_T\xi$.

Наслідок 1.11. *Нехай спектральна щільність* $f_0(\lambda, \mu) \in D_v^u$ *задавольняє умову* (1.37) *і функція* $h(f_0)$ *обмежена. Тоді за умови відсутності шуму спектральна щільність* $f_0(\lambda, \mu)$ *найменш сприятлива в класі* D_v^u *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_T\xi$ *за даними спостережень поля* $\xi(u, v)$ *при* $(u, v) \in R \times (R \backslash [0, T])$ *якщо*

$$f_0\left(\lambda, \mu\right) = \max\left\{ v\left(\lambda, \mu\right), \min\left\{ u\left(\lambda, \mu\right), \alpha_1\left(\lambda\right) \left|C_T^0\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right)\right|\right\}\right\}$$

і функція $f_0(\lambda, \mu)$ *визначає розв'язок екстремальної задачі* (1.47) *при* $D_f = D_v^u$. *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.43).

1.2.6. Найменш сприятливі щільності в класі $D_{\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{\varepsilon_2}(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_T\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash[0,T])$ у тому випадку, коли точні значення щільностей невідомо, проте визначено клас допустимих спектральних щільностей $D_{\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{\varepsilon_2}(\lambda)$, де

$$D_{\varepsilon_1}(\lambda) = \left\{ f(\lambda,\mu) | \, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} | \, f(\lambda,\mu) - f_1(\lambda,\mu) \, | \, d\mu \leq \varepsilon_1(\lambda), \ \lambda \in (-\infty,\infty) \right\},$$

$$D_{\varepsilon_2}(\lambda) = \left\{ g(\lambda,\mu) | \, \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} | \, g(\lambda,\mu) - g_1(\lambda,\mu) \, | \, d\mu \leq \varepsilon_2(\lambda), \ \lambda \in (-\infty,\infty) \right\}.$$

Даний клас спектральних щільностей $D_{\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{\varepsilon_2}(\lambda)$ описує моделі "ε – околу" полів у просторі $L_1 \times L_1$.

Для застосування умови $0 \in \partial\Delta_D\left(f_0, g_0\right)$ для даного класу спектральних щільностей вимагатимемо, щоб щільності $f_0(\lambda,\mu) \in D_{\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{\varepsilon_2}$ а функції, визначені формулами (1.50), (1.51) були обмежені.

За цих умов функціонал $\Delta\left(h\left(f_0, g_0\right); f, g\right)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Тому

$$\partial\Delta_{D_{\varepsilon_2}\times D_{\varepsilon_1}}\left(f_0, g_0\right) = -\partial\Delta\left(h\left(f_0, g_0\right); f_0, g_0\right) + \partial\delta\left(\left(f_0, g_0\right) \middle| D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}\right).$$

Лема 1.9. *Нехай $f_1\left(\lambda,\mu\right)$ – фіксована функція на $L^{\infty}(\mu)$ для всіх $\lambda \in (-\infty,\infty)$, нехай $\varepsilon > 0$. Тоді субдиференціал індикаторної функції $\delta\left(f \left| D_\varepsilon \right.\right)$ має наступний вигляд*

$$\partial\delta(f_0 \left| D_\varepsilon \right.) = \left\{\psi(\lambda)\right\},$$

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f_0(\lambda,\mu) - f_1(\lambda))\alpha_1(\lambda) f(\lambda,\mu) d\mu,$$

де $\alpha_1(\lambda,\mu) \leq 1$ та $\alpha_1(\lambda,\mu) = sign(f_0(\lambda,\mu) - f_1(\lambda,\mu))$, коли $(f_0(\lambda,\mu) \neq f_1(\lambda,\mu))$.

З умови $0 \in \partial\Delta_D\left(f_0, g_0\right)$ при $D = D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu) \in D_{\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{\varepsilon_2}$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} &\left|A_T\left(\lambda,\mu\right) g_0\left(\lambda,\mu\right) + C_T^0\left(\lambda,\mu\right)\right| = \\ &\qquad = \left(f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)\right) \left(f_0(\lambda,\mu) - f_1(\lambda,\mu)\right)\alpha_1(\lambda), \end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\left|A_T(\lambda,\mu) f_0(\lambda,\mu) - C_T^0(\lambda,\mu)\right| =$$
$$= (f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)) \ (g_0(\lambda,\mu) - g_1(\lambda,\mu))\alpha_1(\lambda) \quad (1.58)$$

Очевидно, що для найменш сприятливих щільностей мають виконуватись умови нормування

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f_0(\lambda,\mu) - f_1(\lambda,\mu)|\, d\mu = \varepsilon_1(\lambda), \quad (1.59)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |g_0(\lambda,\mu) - g_1(\lambda,\mu)|\, d\mu = \varepsilon_2(\lambda), \quad (1.60)$$

закладені у визначенні класів допустимих щільностей.

Отже, маємо наступну теорему.

Теорема 1.8. *Нехай щільності* $f_0(\lambda,\mu) \in D_{\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{\varepsilon_2}$ *задовольняють умову* (1.37) *і функції* $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, *що визначені за формулами* (1.50), (1.51), *обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в* $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}$ *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_T\xi$, *якщо* $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ *є розв'язком систем рівнянь* (1.57), (1.58), *задовольняють умови нормування* (1.59), (1.60) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (1.46). *Функція* $h(f_0, g_0)$, *обчислена за формулою* (1.38), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_T\xi$.

1.3. Оптимальні оцінки за спостереженнями у цілочисельних точках

1.3.1. Оптимальні оцінки неперервного поля за спостереженнями у цілочисельних точках площини

Нехай $\xi(t,s)$ та $\eta(t,s)$ – некорельовані однорідні поля неперервних аргументів із спектральними щільностями $f_\xi(\lambda,\mu)$ та $f_\eta(\lambda,\mu)$ відповідно. Припустимо, що поле $\xi(t,s) + \eta(t,s)$ спостерігається в точках множини $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash (T \times S)$. Задача полягає у знаходженні найкращої у середньоквадратичному оцінки $\hat{\xi}(t,s)$ невідомих значень поля $\xi(t,s)$, $(t,s) \in T \times S$. Кожна лінійна оцінка $\hat{\xi}(t,s)$ невідомого значення поля шукається у вигляді

$$\hat{\xi}(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda,\mu)\left(Z_\xi(d\lambda, d\mu) + Z_\eta(d\lambda, d\mu)\right),$$

де $h(\lambda,\mu)$ належить підпростору $L_2^{-TS}(f_\xi+f_\eta)$ гільбертового простору $L_2(f_\xi+f_\eta)$, який породжується функціями $\{e^{i(u\lambda+v\mu)}:(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash(T\times S)\}$.

Знайдемо оцінку $\hat{\xi}(t,s)$ невідомого значення неперервного у середньоквадратичному поля $\xi(t,s)$ за спостереженнями поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в точках множини $(u,v)\in Z^2\backslash\,[0,N]\times[0,M]$. У цьому випадку із геометрії гільбертового простору випливає, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{i(t\lambda+s\mu)}f_\xi(\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu)(f_\xi(\lambda,\mu)+f_\eta(\lambda,\mu))e^{-i(u\lambda+v\mu)}d\lambda d\mu=0,$$

$$(u,v)\in Z^2\backslash\,[0,N]\times[0,M]\,.$$

Оскільки функція $h\,(\lambda,\mu)$ – періодична (залежить від $e^{iu\lambda}$, $e^{iv\mu}$, $u\in\mathbb{Z}$, $v\in\mathbb{Z}$), то ми можемо записати цю умову у вигляді

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big[e^{it(\lambda+2\pi k)}e^{is(\mu+2\pi j)}f_\xi(\lambda+2\pi k,\mu+2\pi j)-$$

$$-h(\lambda,\mu)\big[f_\xi(\lambda+2\pi k,\mu+2\pi j)+f_\eta(\lambda+2\pi k,\mu+2\pi j)\big]e^{-i(u\lambda+v\mu}\Big]d\lambda d\mu=0,$$

$$(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash\,[0,N]\times[0,M]\,.$$

Звідси

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big[F_\xi(t,s,\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu)\big[F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)\big]e^{-i(u\lambda+v\mu)}\Big]d\lambda d\mu=0,$$

$$(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash\,[0,N]\times[0,M]\,,$$

де

$$F_\xi(t,s,\lambda,\mu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{it(\lambda+2\pi k)}e^{is(\mu+2\pi j)}f_\xi(\lambda+2\pi k,\mu+2\pi j),$$

$$F_\eta(t,s,\lambda,\mu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{it(\lambda+2\pi k)}e^{is(\mu+2\pi j)}f_\eta(\lambda+2\pi k,\mu+2\pi j).$$

Отже, спектральна характеристика $h(f_\xi,f_\eta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{\xi}(t,s)$ та величина середньоквадратичної похибки мають вигляд

$$h(f_\xi,f_\eta)=\frac{F_\xi(t,s,\lambda,\mu)-C_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\mu})}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}\tag{1.61}$$

$$\Delta(h, f_\xi, f_\eta) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F_\xi(0,0,\lambda,\mu) - \frac{|\,F_\xi(t,s,\lambda,\mu)\,|^2 - \left|C_{MN}(e^{i\lambda}, e^{i\mu})\right|^2}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}\right)d\lambda d\mu, \tag{1.62}$$

де

$$C_{NM}(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \sum_{u=0}^{N}\sum_{v=0}^{M} c_{uv}e^{iu\lambda}e^{iv\mu}.$$

Коефіцієнти $c_{uv}, u = 0, 1, \ldots, N; v = 0, 1, \ldots, M$, формують вектор

$$\boldsymbol{c}_{NM} = (c_{0,M}; c_{0,M-1}; \ldots; c_{0,0}; c_{1,M}; c_{1,M-1}; \ldots; c_{1,0}; c_{N,M}; \ldots; c_{N,0}),$$

який визначається з рівняння

$$\boldsymbol{a}_{NM} = B_{NM}\boldsymbol{c}_{NM},$$

$$\boldsymbol{a}_{NM} = (a_{0,M}; a_{0,M-1}; \ldots; a_{0,0}; a_{1,M}; a_{1,M-1}; \ldots; a_{1,0}; a_{N,M}; \ldots; a_{N,0}),$$

де елементи $a_{kj} : k = 0, 1, \ldots, N; j = 0, 1, \ldots, M$, вектора - це коефіцієнти Фур'є

$$a_{kj} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\lambda,\mu)e^{-ik\lambda}e^{-ij\mu}d\lambda d\mu$$

функції

$$H(\lambda,\mu) = \frac{F_\xi(t,s,\lambda,\mu)}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}.$$

Оператор B_{NM} визначається матрицею з елементами

$$B(k,j,m,n) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}e^{-i(m-k)\lambda}e^{-i(n-j)\mu}d\lambda d\mu,$$

$$0 \le k \le N, 0 \le j \le M, 0 \le m \le N, 0 \le n \le M.$$

У тому випадку, коли потрібно знайти лінійну оцінку $\hat{A}_{NM}\xi$ функціонала

$$A_{NM}\xi = \sum_{k=0}^{N}\sum_{k=0}^{M} a(k,j)\xi(k,j)$$

від невідомих значень поля, ми отримаємо, як наслідок, наступні формули

$$h(f_\xi, f_\eta) = \frac{A_{NM}(e^{i\lambda}, e^{i\mu})F_\xi(0,0,\lambda,\mu) - C_{NM}(e^{i\lambda}, e^{i\mu})}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,0,\lambda,\mu)} \tag{1.63}$$

$$\Delta(h, f_\xi, f_\eta) =$$

$$\tfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{|\,A_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\mu})F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+C_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\mu})\,|^2}{(\,F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)\,)^2}F_\xi(0,0,\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\tfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{|\,A_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\lambda})F_\xi(0,0,\lambda,\mu)-C_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\lambda})\,|^2}{(\,F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)\,)^2}F_\eta(0,0,\lambda,\mu)d\lambda d\mu =$$

$$= \langle B_{NM}\,\boldsymbol{c}_{NM},\ \boldsymbol{c}_{NM}\rangle + \langle R_{NM}\,\boldsymbol{a}_{NM},\ \boldsymbol{a}_{NM}\rangle\,, \tag{1.64}$$

де $\boldsymbol{a}_{NM} = \{a(k,j) : k = 0,1,\ldots,N; j = 0,1,\ldots,M\}$ – коефіцієнти функціонала $A_{NM}\xi$, $\boldsymbol{c}_{NM}$ – невідомі коефіцієнти, які визначаються з рівняння

$$\boldsymbol{c}_{NM} = B_{NM}^{-1}D_{NM}\boldsymbol{a}_{NM},$$

де B_{NM}, D_{NM}, R_{NM} матриці операторів у просторі $C^{N+1}\times C^{N+1}$, елементи яких є коефіцієнти Фур'є наступних функцій

$$\hat{F}_B(0,0,\lambda,\mu) = \frac{1}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}$$

$$\hat{F}_D(0,0,\lambda,\mu) = \frac{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}$$

$$\hat{F}_R(0,0,\lambda,\mu) = \frac{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}$$

відповідно,

$$B\,(k,j,m,n) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{F}_B(0,0,\lambda,\mu)e^{-i(m-k)\lambda}e^{-i(n-j)\mu}d\lambda d\mu, \tag{1.65}$$

$$D\,(k,j,m,n) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{F}_D(0,0,\lambda,\mu)e^{-i(m-k)\lambda}e^{-i(n-j)\mu}d\lambda d\mu, \tag{1.66}$$

$$R\,(k,j,m,n) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{F}_R(0,0,\lambda,\mu)e^{-i(m-k)\lambda}e^{-i(n-j)\mu}d\lambda d\mu, \tag{1.67}$$

$$0 \le k \le N, 0 \le j \le M, 0 \le m \le N, 0 \le n \le M.$$

Спектральну характеристику та величину середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки функціоналу

$$A_{NM}\xi = \sum_{k=0}^{N}\sum_{k=0}^{M} a(k,j)\xi(k,j)$$

від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ за спостереженнями $\xi(u,v)$, $u\in T=Z\backslash\{0,1,\ldots,N\}$, $v\in S=Z\backslash\{0,1,\ldots,M\}$ можна обчислити за наступними формулами

$$h(f_\xi)=A_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\mu})-C_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\mu})F_\xi^{-1}(0,0,\lambda,\mu) \tag{1.68}$$

$$\Delta(h(f_\xi),f_\xi)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mid C_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\mu})\mid^2 F_\xi^{-1}(0,0,\lambda,\mu)d\lambda d\mu=$$
$$=\left\langle B_{NM}^{-1}\boldsymbol{a}_{NM},\boldsymbol{a}_{NM}\right\rangle, \tag{1.69}$$

оператор B_{NM} визначається матрицею з елементами

$$B\left(k,j,m,n\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_\xi^{-1}(0,0,\lambda,\mu)e^{-i(m-k)\lambda}e^{i(n-j)\mu}d\lambda d\mu.$$

Теорема 1.9. *Оптимальну лінійну оцінку $\hat{\xi}(k,j)$ невідомого значення поля $\xi(t,s)$ за спостереженнями $\xi(u,v)+\eta(u,v)$, $u\in T=\mathbb{Z}\backslash\{0,1,...,N\}$, $v\in S=\mathbb{Z}\backslash\{0,1,...,M\}$ та величину середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки можна обчислити за формулами* (1.61), (1.62). *У випадку оцінки функціоналу $A_{NM}\xi=\sum_{k=0}^{N}\sum_{k=0}^{M}a(k,j)\xi(k,j)$ формули мають вигляд* (1.63), (1.64), *для оцінки функціоналу за спостереженнями без шуму* (1.68), (1.69).

Приклад 1.3. Приклад, у якому знайдено оптимальну лінійну оцінку невідомого значення функціонала

$$A_{21}\xi=\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{1}a(k,j)\xi(k,j)$$

за спостереженнями поля $\xi(t,s)$ з коваріційною функцією

$$R(t,s)=\sigma^2e^{-\alpha|t|}e^{-\beta|s|}$$

$\diamondsuit$

розміщено у додатках (Приклад 4.4).

1.3.2. Мінімаксні (робастні) оцінки за спостереженнями у цілочисельних точках площини в умовах невизначеності

У випадку неповної інформації щодо спектральних щільностей полів неперервних аргументів за спостереженнями у цілочисельних точках застосування запропонованих формул може привести до досить значної величини похибки. Тому будемо шукати мінімаксні (робастні) оцінки, які дають найменшу похибку для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей.

Лема 1.10. *Спектральні щільності $f_\eta^0(\lambda,\mu), f_\xi^0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі для заданої множини спектральних щільностей $D_{f\xi}\times D_{f\eta}$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_{NM}\xi$, якщо перетворення Фур'є $\hat{F}_D(0,0,\lambda,\mu)$, $\hat{F}_B(0,0,\lambda,\mu)$, $\hat{F}_R(0,0,\lambda,\mu)$ функцій*

$$\frac{1}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)},$$

$$\frac{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)},$$
$$\frac{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)},$$

задають оператори B_{NM}^0, D_{NM}^0, R_{NM}^0 за формулами (1.65), (1.66), (1.67), *які визначають розв'язок екстремальної задачі*

$$\sup_{(f_\xi,f_\eta)\in D}\langle B_{NM}\,\boldsymbol{c}_{NM},\boldsymbol{c}_{NM}\rangle+\langle R_{NM}\,\boldsymbol{a}_{NM},\boldsymbol{a}_{NM}\rangle=$$

$$=\left\langle B_{NM}^0\,\boldsymbol{c}_{NM},\boldsymbol{c}_{NM}\right\rangle+\left\langle R_{NM}^0\,\boldsymbol{a}_{NM},\boldsymbol{a}_{NM}\right\rangle \tag{1.70}$$

Мінімаксна спектральна характеристика обчислюєтся за формулою (1.63).

Щільності $f_\xi^0(\lambda,\mu), f_\eta^0(\lambda,\mu)$ будуть найменш сприятливими, якщо функції $F_\xi^0(\lambda,\mu), F_\eta^0(\lambda,\mu)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0=h(F_\eta^0,F_\xi^0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h;F_\xi,F_\eta)$ на множині $H_D\times D$. Нерівності сідлової точки виконуються, коли $h^0=h(F_\xi^0,F_\eta^0)$, $h(F_\xi^0,F_\eta^0)\in H_D$ і (F_ξ^0,F_η^0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f_\xi,f_\eta)\in D}\Delta(h(F_\xi^0,F_\eta^0);F_\xi^0,F_\eta^0)=\Delta(h(F_\xi^0,F_\eta^0);F_\xi^0,F_\eta^0). \tag{1.71}$$

$$\Delta(h,F_\xi,F_\eta)=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\lambda})F_\eta(0,0,\lambda,\mu)+C_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\lambda})\right|^2}{\left(F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)\right)^2}F_\xi(0,0,\lambda,\mu)d\lambda d\mu$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\lambda})F_{\xi}(0,0,\lambda,\mu)-C_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\lambda})\right|^2}{\left(F_{\xi}(0,0,\lambda,\mu)+F_{\eta}(0,0,\lambda,\mu)\right)^2}F_{\eta}(0,0,\lambda,\mu)d\lambda d\mu.$$

Лема 1.11. *Нехай* $\left(F_{\xi}^0,F_{\eta}^0\right)$ *– розв'язок екстремальної задачі* (1.71). *Спектральні щільності* $f_{\xi}^0(\lambda,\mu),f_{\eta}^0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в* $D_{f_{\xi}}\times D_{f_{\eta}}$ *при оптимальному оцінюванні функціонала* $A_{NM}\xi$*, а спектральна характеристика* $h^0=h(F_{\xi}^0,F_{\eta}^0)$ *є мінімаксною, якщо* $h\left(F_{\xi}^0,F_{\eta}^0\right)\in H_D$.

Лема 1.12. *Нехай* $U_0\left(\lambda,\mu\right)$ *– невід'ємна функція на* $L^{\infty}(\lambda,\mu)$, $\varepsilon>0$ *та*

$$D_{2\varepsilon}=\left\{f\left(\lambda,\mu\right)\,\middle|\,\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(F\left(0,0,\lambda,\mu\right)-U_0\left(\lambda,\mu\right))^2d\mu\le\varepsilon\right\}.$$

Субдиференціал індикаторної функції $\delta\left(f_0\left|D_{2\varepsilon}\right.\right)$ *має наступний вигляд*

$$\partial\delta(f_0\left|D_{2\varepsilon}\right.)=\begin{cases}\{0\}, & \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(F\left(0,0,\lambda,\mu\right)-U_0\left(\lambda,\mu\right))^2d\lambda d\mu<\varepsilon,\\ \{\gamma\phi_0\}, & \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(F\left(0,0,\lambda,\mu\right)-U_0\left(\lambda,\mu\right))^2d\lambda d\mu=\varepsilon,\end{cases}$$

$$\phi_0(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(F\left(0,0,\lambda,\mu\right)-U_0\left(\lambda,\mu\right))F\left(0,\lambda,\mu\right)\,d\lambda d\mu\,.$$

Лема 1.13. *Нехай* $U_0\left(\lambda,\mu\right),V_0\left(\lambda,\mu\right)$ *— фіксовані функції на* $L^{\infty}(\lambda,\mu)$, $\varepsilon>0$ *та*

$$D_v^u=\Bigg\{f\left(\lambda,\mu\right)\,|\,V_0\left(\lambda,\mu\right)\le F\left(0,0,\lambda,\mu\right)\le U_0\left(\lambda,\mu\right),$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(0,0,\lambda,\mu)\,d\lambda d\mu=p_1\Bigg\}.$$

Субдиференціал індикаторної функції $\delta\left(f_0\left|D_v^u\right.\right)$ *має вигляд*

$$\partial\delta(f_0\left|D_v^u\right.)=\left\{\varpi(\lambda,\mu)\right\},$$

$$\varpi(\lambda,\mu)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\gamma_1(\lambda,\mu)+\gamma_2(\lambda,\mu)+\alpha_1^{-1})F(0,0,\lambda,\mu)d\mu d\lambda,$$

де функція $\gamma_1(\lambda,\mu)\le 0$ *і* $\gamma_1\left(\lambda,\mu\right)=0$ *при* $F\left(0,0,\lambda,\mu\right)\ge V_0\left(\lambda,\mu\right)$*;*

функція $\gamma_2(\lambda,\mu)\geq 0$ *і* $\gamma_2(\lambda,\mu)=0$ *при* $F(0,0,\lambda,\mu)\leq U_0(\lambda,\mu)$.

Лема 1.14. *Нехай* $\omega_1(\lambda,\mu),\omega_2(\lambda,\mu)$ *— невід'ємні функції на* $L^{\infty}(\lambda,\mu)$, $\varepsilon>0$, *та нехай*

$$D_{\varepsilon}=\Bigg\{f(\lambda,\mu)\mid F(0,0,\lambda,\mu)=(1-\varepsilon)\,\omega_1(\lambda,\mu)+\varepsilon w_2(\lambda,\mu)\,,\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(0,0,\lambda,\mu)d\mu=p_2\Bigg\}.$$

Субдиференціал індикаторної функції $\delta(f_0\,|D_{\varepsilon})$ *має наступний вигляд*

$$\partial\delta(f_0\,|D_{2\varepsilon})=\{\psi\}\,,$$

$$\psi=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\varphi(\lambda,\mu)+\alpha_2^{-1})F(0,\lambda,\mu)d\lambda d\mu,$$

якщо функція $\varphi(\lambda,\mu)\leq 0$ *і* $\varphi(\lambda,\mu)=0$ *при* $w_0(\lambda,\mu)\geq(1-\varepsilon)w_1(\lambda,\mu)$.

Лема 1.15. *Нехай* $F_0(\lambda,\mu)$ *— невід'ємна функція на* $L^{\infty}(\lambda,\mu)$, $\varepsilon>0$ *та нехай*

$$D_{\varepsilon}=\left\{f(\lambda,\mu)|\;\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\;F(0,0,\lambda,\mu)-F_0(\lambda,\mu)\;|\;d\lambda d\mu\leq\varepsilon\right\}.$$

Субдиференціал індикаторної функції $\delta(f_0\,|D_{\varepsilon})$ *має наступний вигляд*

$$\partial\delta(f_0\,|D_{2\varepsilon})=\{\psi(\lambda)\}\,,$$

$$\psi(\lambda)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(F(0,0,\lambda,\mu)-F_0(\lambda,\mu))^2\alpha_1(\lambda,\mu)f(\lambda,\mu)d\mu,$$

де $\alpha_1(\lambda,\mu)\leq 1$ *та* $\alpha_1(\lambda,\mu)=sign(F(0,0,\lambda,\mu)-F_0(\lambda,\mu))$, *коли* $F(0,0,\lambda,\mu)\neq F_0(\lambda,\mu)$.

1.3.3. Найменш сприятливі щільності в класі $D_{2\varepsilon_1}\times D_{1\varepsilon_2}$

Умова (1.71) та леми 1.12 – 1.15 дають можливість визначити найменш сприятливі спектральні щільності для конкретних класів спектральних щільностей. Знайдемо найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$, який описує модель "$\varepsilon$ – околу" в просторі $L_2 \times L_1$:

$$D_{2\varepsilon_1} = \left\{ f_\xi(\lambda,\mu) | \, \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} | \, F_\xi(0,0,\lambda,\mu) - F_0(\lambda,\mu) \, |^2 \, d\lambda d\mu \leq \varepsilon_1 \right\},$$

$$D_{1\varepsilon_2} = \left\{ f_\eta(\lambda,\mu) | \, \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} | \, F_\eta(0,0,\lambda,\mu) - G_0(\lambda,\mu) \, | \, d\lambda d\mu \leq \varepsilon_2 \right\}.$$

Теорема 1.10. *Нехай щільності* $f_\xi^0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}$, $f_\eta^0(\lambda,\mu) \in D_{1\varepsilon_2}$ *та нехай функції*

$$h_{f_\xi}\left(F_\xi^0, F_\eta^0\right) = \frac{\left|A_{NM}\left(\lambda,\mu\right) F_\eta^0\left(0,0,\lambda,\mu\right) + C_{NM}\left(\lambda,\mu\right)\right|}{F_\xi^0\left(0,0,\lambda,\mu\right) + F_\eta^0\left(0,0,\lambda,\mu\right)}, \tag{1.72}$$

$$h_{f_\eta}\left(F_\xi^0, F_\eta^0\right) = \frac{\left|A_{NM}\left(\lambda,\mu\right) F_\xi^0\left(0,\lambda,\mu\right) - C_{NM}\left(\lambda,\mu\right)\right|}{F_\xi^0\left(0,\lambda,\mu\right) + F_\eta^0\left(0,\lambda,\mu\right)}, \tag{1.73}$$

що визначаються функціями $F_\xi^0(0,0,\lambda,\mu)$, $F_\eta^0(0,0,\lambda,\mu)$, *обмежені. Спектральні щільності* $f_\xi^0(\lambda,\mu)$, $f_\eta^0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в* $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$ *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_{NM}\xi$, *якщо* $F_\xi^0(0,0,\lambda,\mu)$, $F_\eta^0(0,0,\lambda,\mu)$ *є розв'язком систем рівнянь*

$$\begin{aligned} &\left|A_{NM}\left(\lambda,\mu\right) F_\eta\left(0,0,\lambda,\mu\right) + C_{NM}^0\left(\lambda,\mu\right)\right|^2 = \\ &\quad = \left(F_\xi\left(0,0,\lambda,\mu\right) + F_\eta\left(0,0,\lambda,\mu\right)\right)^2 \left(F_\xi(0,0,\lambda,\mu) - F_0(0,0,\lambda,\mu)\right)\alpha_1, \end{aligned} \tag{1.74}$$

$$\begin{aligned} &\left|A_{NM}\left(\lambda,\mu\right) F_\xi\left(0,0,\lambda,\mu\right) - C_{NM}^0\left(\lambda,\mu\right)\right|^2 = \\ &\quad = \left(F_\xi\left(0,0,\lambda,\mu\right) + F_\eta\left(0,0,\lambda,\mu\right)\right)^2 \varphi(\lambda,\mu))\alpha_2, \end{aligned} \tag{1.75}$$

де $|\varphi(\lambda,\mu) \leq 1|$, *причому* $\varphi(\lambda,\mu) = sign(F_\eta(0,0,\lambda,\mu) - G_0(\lambda,\mu))$ *коли* $F_\eta(0,0,\lambda,\mu) \neq G_0(\lambda,\mu)$, *виконуються умови*

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} | \, F_\xi(0,0,\lambda,\mu) - F_0(\lambda,\mu) \, |^2 \, d\lambda \, d\mu = \varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} | \, F_\eta(0,0,\lambda,\mu) - G_0(\lambda,\mu) \, | \, d\lambda \, d\mu = \varepsilon_2,$$

та $F_\xi^0(0,0,\lambda,\mu)$, $F_\eta^0(0,0,\lambda,\mu)$ *визначають розв'язок екстремальної задачі* (1.71).
Функція $h\left(f_\xi^0, f_\eta^0\right)$, *обчислена за формулою* (1.63), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_{NM}\xi$.

1.3.4. Найменш сприятливі щільності в класі $D_{f_\xi}^0 \times D_{f_\eta}^0$

Знайдемо найменш сприятливі щільності в класі $D_{f_\xi}^0 \times D_{f_\eta}^0$, де

$$D_{f_\xi}^0 = \left\{ f_\xi(\lambda,\mu) | \ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_\xi(0,0,\lambda,\mu) d\lambda d\mu \leq P_1 \right\},$$

$$D_{f_\eta}^0 = \left\{ f_\eta(\lambda,\mu) | \ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_\eta(0,0,\lambda,\mu) d\lambda d\mu \leq P_2 \right\}.$$

Нехай функції (1.72), (1.73) обмежені. Скористаємось умовою $0 \in \partial\Delta_D\left(f_\xi^0, f_\eta^0\right)$ для $D_{f_\xi}^0 \times D_{f_\eta}^0$. Дана умова виконується, якщо найменш сприятливі щільності з цього класу задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} &\left| A_{NM}(\lambda,\mu) F_\eta(0,0,\lambda,\mu) + C_{NM}^0(\lambda,\mu) \right| = \\ &\qquad = \alpha_1 \left(F_\xi(0,0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,0,\lambda,\mu) \right), \end{aligned} \tag{1.76}$$

$$\begin{aligned} &\left| A_{NM}(\lambda,\mu) F_\xi(0,0,\lambda,\mu) - C_{NM}^0(\lambda,\mu) \right| = \\ &\qquad = \alpha_2 \left(F_\xi(0,0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,0,\lambda,\mu) \right), \end{aligned} \tag{1.77}$$

де константи $\alpha_1 \geq 0$,$\alpha_2 \geq 0$. Зауважимо, що $\alpha_1 \neq 0$ і $\alpha_2 \neq 0$ якщо

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_\xi(0,0,\lambda,\mu) d\lambda d\mu = P_1,$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_\eta(0,0,\lambda,\mu) d\lambda d\mu = P_2.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1.11. *Нехай щільності* $f_\xi^0(\lambda,\mu) \in D_{f_\xi}^0$, $f_\eta^0(\lambda,\mu) \in D_{f_\eta}^0$ *задовольняють умову мінімальності і функції, що визначені за формулами* (1.72), (1.73) *обмежені. Спектральні щільності* $f_\xi^0(\lambda,\mu)$, $f_\eta^0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в* $D_{f_\xi}^0 \times D_{f_\eta}^0$ *при оптимальному лінійному оцінюван-*

ні функціонала $A_{NM}\xi$, якщо $f_\xi^0(\lambda,\mu)$, $f_\eta^0(\lambda,\mu)$ є розв'язком систем рівнянь (1.76), (1.77) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (1.71). *Функція $h\left(f_\xi^0, f_\eta^0\right)$, обчислена за формулою* (1.63), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_{NM}\xi$.*

Теорема 1.12. *Нехай поле $\xi(u,v)$ спостерігається без шуму, тобто $f_\eta(\lambda,\mu)=0$, щільність $f_\xi^0(\lambda,\mu)\in D_{uv}^{-1}$, де*

$$D_{uv}^{-1}=\left\{\, f_\xi^0(\lambda,\mu)\middle|\, 0<v(\lambda,\mu)\le F_\xi^{-1}(0,0,\lambda,\mu)\le u(\lambda,\mu),\right.$$

$$\left.\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)}d\lambda d\mu=P\right\},$$

де $v(\lambda,\mu),u(\lambda,\mu)$- задані щільності. Спектральна щільність $f_\xi^0(\lambda,\mu)$ найменш сприятлива в D_{vu}^{-1} при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_{NM}\xi$, якщо справджується рівність

$$F_0^{-1}(0,0,\lambda,\mu)=\max\Bigg\{v(\lambda,\mu),$$

$$\min\left\{u(\lambda,\mu),\left|P\sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\left(\left(B_{MN}^0\right)^{-1}a\right)_{kj}e^{i(k\lambda+j\mu)}\right|^{-2}\right\}\Bigg\}.$$

Доведення:
З умови $0\in\partial\Delta_D\left(F_\xi\right)$ при $D=D_{uv}^{-1}$ знаходимо, що коефіцієнти Фур'є функції $F_0^{-1}(0,0,\lambda,\mu)$ задовольняють рівняння

$$B_{MN}^0\boldsymbol{c}_{MN}=\boldsymbol{a}_{MN}$$

та рівняння

$$\left|\sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\left(\left(B_{MN}^0\right)^{-1}\boldsymbol{a}_{MN}\right)_{kj}e^{i(k\lambda+j\mu)}\right|^2=\psi_1(\lambda,\mu)+\psi_2(\lambda,\mu)+\alpha_0^{-2},$$

де $\psi_1(\lambda,\mu)\ge 0$ та $\psi_1(\lambda,\mu)=0$ при $F_\xi^{-1}(0,0,\lambda,\mu)\ge v(\lambda,\mu)$; $\psi_2(\lambda,\mu)\le 0$ та $\psi_2(\lambda,\mu)=0$ при $F_\xi^{-1}(0,0,\lambda,\mu)\le u(\lambda,\mu)$, α_0 невідомий множник Лагранжа. Тому при $v(\lambda,\mu)\le F_\xi^{-1}(0,0,\lambda,\mu)\le u(\lambda,\mu)$ функція $F_0^{-1}(0,0,\lambda,\mu)$

має вигляд

$$F_0^{-1}(0,0,\lambda,\mu) = \sum_{k=-M}^{M} \sum_{j=-N}^{N} r_{|k|,|j|} e^{i(k\lambda+j\mu)}, \quad r_{k,j} = \frac{Pa(k,j)}{a(0,0)}.$$

Найменш сприятливою в D_{uv}^{-1} буде щільність випадкового поля авторегресії порядку (M,N), якщо виконується співвідношення

$$v^{-1}(\lambda,\mu) \geq P \sum_{k=-M}^{M} \sum_{j=-N}^{N} \frac{a_{|k|,|j|}}{a_{0,0}} e^{i(k\lambda+j\mu)} =$$

$$= \left| \sum_{k=-M}^{M} \sum_{j=-N}^{N} \gamma_{k,j} e^{-i(k\lambda+j\mu)} \right|^2 \geq u^{-1}(\lambda,\mu)$$

Звідси

$$F_0^{-1}(0,0,\lambda,\mu) = \max \Bigg\{ v(\lambda,\mu),$$

$$\min \Bigg\{ u(\lambda,\mu), \left| P \sum_{k=0}^{M} \sum_{j=0}^{N} \left(\left(B_{MN}^0 \right)^{-1} \boldsymbol{a}_{MN} \right)_{kj} e^{i(k\lambda+j\mu)} \right|^{-2} \Bigg\} \Bigg\}.$$

Теорема доведена.

1.3.5. Найменш сприятливі щільності в класі D_P^Q

Розглянемо задачу оптимального оцінювання функціонала $A_{NM}\xi$ у тому випадку, коли поле $\xi(u,v)$ спостерігається без шуму, тобто $f_\eta(\lambda,\mu) = 0$, а щільність $f_\xi^0(\lambda,\mu) \in D_P^Q$, де

$$D_P^Q = \Bigg\{ f_\xi^0(\lambda,\mu) \mid \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_\xi^{-1}(0,0,\lambda,\mu) \cos(p\lambda)\cos(q\mu) d\lambda d\mu = r_{PQ},$$

$$0 \leq p \leq P, 0 \leq q \leq Q \Bigg\}.$$

Тут $\{r_{pq}\}_{p\in\overline{0,P};q\in\overline{0,Q}}$ – строго позитивна послідовність, тобто існують такі коефіцієнти $\alpha_{p,q}$, що $\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q} \alpha_{p,q} r_{p,q} > 0$. Проблема моментів у цьому випадку розв'язується неоднозначно [2], [47] і множина D_P^Q містить нескінченно багато щільностей. Функція

$$F_0^{-1}(0,0,\lambda,\mu)=\sum_{p=-P}^{P}\sum_{q=-Q}^{Q}r_{|p|,|q|}e^{i(p\lambda+q\mu)}$$

також належить D_P^Q. Відповідна задача на умовний екстремум має вигляд

$$\Delta_D(F_\xi)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\,C_{NM}(e^{i\lambda},e^{i\mu})\,|^2\,F_\xi^{-1}(0,0,\lambda,\mu)\;)\,d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\alpha_{pq}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_\xi^{-1}(0,0,\lambda,\mu)\cos(p\lambda)\cos(q\mu)d\lambda d\mu-r_{PQ}\right)\to\inf.$$

Звідси знаходимо таке рівняння

$$\left|\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}C(k,j)e^{i(k\lambda+j\mu)}\right|^2=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\alpha_{pq}\cos(p\lambda)\cos(q\mu)=$$

$$=\left|\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\gamma_{pq}e^{-i(p\lambda+q\mu)}\right|^2,$$

де α_{pq}– множники Лагранжа. Розглянемо наступні випадки
а) $P>N,Q>M$. У цьому випадку екстремальна задача вироджена і найменш сприятливою буде щільність $f_\xi^0(\lambda,\mu)\in D_P^Q$ така, що

$$F_0^{-1}(0,0,\lambda,\mu)=\sum_{p=-P}^{P}\sum_{q=-Q}^{Q}r_{|p|,|q|}e^{i(p\lambda+q\mu)},$$

де коефіцієнти $\left\{r_{pq},0\le p\le P,0\le q\le Q\right\}$ відомі з умови задачі.
б) $P<N,Q>M$. У цьому випадку коефіцієнти r_{pq}, $0\le p\le P$, $0\le q\le M$ відомі з визначення множини D_P^Q допустимих щільностей. Для знаходження інших коефіцієнтів r_{ij}, $P\le i\le N, 0\le j\le M$ спочатку розв'язуємо систему рівнянь

$$a_{st}=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{M}c_{kl}r_{-k+s,-l+t},\quad 0\le s\le P,\ 0\le t\le M$$

відносно c_{kl}, $0 \leq k \leq P, 0 \leq l \leq M$, потім, поклавши $c_{kl} = 0$, $P \leq k \leq N, 0 \leq l \leq M$, знаходимо невідомі r_{ij}, $P \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M$ з системи

$$a_{st} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{M} c_{kl} r_{-k+s,-l+t}$$

для $P \leq s \leq N$, $0 \leq t \leq M$. Зауважимо, що випадок $P > N, Q < M$ є симетричним до щойно розглянутого.
в) $P < N, Q < M$. Коефіцієнти r_{pq}, $0 \leq p \leq P$, $0 \leq q \leq Q$ відомі з визначення класу D_P^Q допустимих щільностей. З системи

$$a_{st} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{M} c_{kl} r_{-k+s,-l+t}, \quad 0 \leq s \leq P,\ 0 \leq t \leq Q$$

знаходимо c_{kl}, $0 \leq k \leq P$, $0 \leq l \leq Q$, потім, поклавши $c_{kl} = 0$, $P \leq k \leq N$, $Q \leq l \leq M$, знаходимо невідомі r_{ij}, $P \leq i \leq N$, $Q \leq j \leq M$ з системи

$$a_{st} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{M} c_{kl} r_{-k+s,-l+t}, \quad P \leq s \leq N,\ Q \leq t \leq M$$

і найменш сприятливу щільність $f_\xi^0(\lambda, \mu) \in D_P^Q$ таку, що

$$F_0^{-1}(0, 0, \lambda, \mu) = \sum_{p=-P}^{P} \sum_{q=-Q}^{Q} r_{|p|,|q|} e^{i(p\lambda + q\mu)}.$$

Приклад 1.4. Приклад, у якому знайдено оцінку функціоналу

$$\begin{aligned} A_{22}\xi = \xi(0,0) + 2\xi(0,1) + 4\xi(1,0) + 3\xi(1,1) + \\ + \xi(0,2) + 2\xi(1,2) + \xi(2,0) + \xi(2,1) + (1/5)\xi(2,2) \end{aligned}$$

для поля, спектральна щільність якого визначена наступним чином

$$D_P^Q = \left\{ f_\xi^0(\lambda, \mu) \middle| \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_\xi(0, 0, \lambda, \mu) \cos(p\lambda) \cos(q\mu) d\lambda d\mu = r_{PQ} \right\}$$

де

$$r_{00} = 1, r_{01} = r_{0,-1} = 2, r_{10} = r_{-10} = 2, r_{11} = r_{-1,-1} = r_{-1,1} = r_{1,-1} = 4,$$

$\diamondsuit$

розміщено у додатках (Приклад 4.5).

1.3.6. Висновки до розділу 1

Для однорідного поля $\xi(u,v)$ дискретного аргумента, що спостерігається разом з корельованим шумом $\eta(u,v)$ в точках множини $\{(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash K\}$ за умови відомої додатно визначеної матриці спектральних щільностей запропоновані інтерполяційні формули (1.4), (1.5) для обчислення спектральної характеристики $h(\lambda,\mu)$ та середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_K\xi$ від невідомих значень поля. Для знаходження оптимальної лінійної оцінки застосований метод А.М. Колмогорова, який базується на геометрії гільбертового простору. Досліджена залежність вигляду формул від геометрії області. У тому випадку, коли однорідні поля дискретних аргументів $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$– некорельовані, спектральну характеристику $h(f,g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\xi$ від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in Z \times (Z \backslash \{0,1,...,N\})$ можна обчислити за формулами (1.11), (1.12). Розглянуті спектральні щільності, що розпадаються на добутки $f(\lambda,\mu) = f_1(\lambda) f_2(\mu)$, $g(\lambda,\mu) = f_1(\lambda) g_2(\mu)$.

За умови неповної інформації щодо спектральних щільностей поля та шуму застосовано мінімаксний (робастний) підхід до задачі оцінки функціонала. Знайдені формули для обчислення мінімаксних спектральних характеристик та найменш сприятливих спектральних щільностей для конкретних класів спектральних щільностей $D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon}(\lambda)$, $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$, $D_{-0}(\lambda)$. Приведені алгоритми застосування інтерполяційних формул та приклади обчислювальної реалізації цих алгоритмів.

Для однорідного поля неперервного аргументу методом А.М. Колмогорова знайдені формули (1.32), (1.33) для обчислення спектральної характеристики $h(f,g)$ та величини середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T\xi$ у тому випадку коли поле спостерігається разом із однорідно зв'язаним шумом та формули (1.38), (1.39) для спостережень з некорельованим шумом. Знайдені мінімаксні оцінки функціонала $A_T\xi$, використовуючи методи субдиференціального числення. Визначені найменш сприятливі спектральні щільності для певних класів спектральних щільностей, а саме для класів $D_f^0 \times D_g^0$, $D_l^u \times D_\varepsilon$, $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}$.

Знайдені формули (1.52), (1.53) для обчислення спектральної характеристики $h(f,g)$ та величини середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки невідомих значень поля неперервного аргументу за спостереженнями в цілочисельних точках площини.

У тому випадку, коли оцінюється функціонал

$$A_{NM}\xi = \sum_{k=0}^{N}\sum_{k=0}^{M} a(k,j)\xi(k,j)$$

формули мають вигляд (1.63), (1.64), та (1.68), (1.69) за спостереженнями без шуму. Знайдено вигляд найменш сприятливих щільностей та мінімаксних спектральних характеристик в класах спектральних щільностей $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$, $D^0_{f_\xi} \times D^0_{f_\eta}$, D^Q_P. Основні результати цього розділу були надруковані у роботах [164], [165], [270], [272].

Розділ 2
ЗАДАЧІ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

2.1. Екстраполяція випадкових полів дискретного аргументу

2.1.1. Постановка задач

Нехай сума однорідних та однорідно зв'язаних (у широкому розумінні) випадкових полів $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ спостерігається у всіх цілочисельних точках $\mathbb{Z}^2$ за винятком деякої області K (півплощини або чверті площини).

Розглянемо задачу лінійного оцінювання функціоналу

$$A\xi = \sum\sum\nolimits_{(k,j)\in K} a(k,j)\xi(k,j)$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi\left(k,j\right),\left(k,j\right)\in K$. Необхідно за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in \mathbb{Z}^2\backslash K$ знайти таку оцінку $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ з класу лінійних оцінок, щоб мінімізувати величину середньоквадратичної похибки $\Delta = M\left|A\xi-\hat{A}\xi\right|^2$.

Найбільш поширеним методом знаходження оптимальних екстраполяційних оцінок є метод, який базується на канонічній факторизації спектральних щільностей та пошуку спектральних характеристик як граничних значень аналітичних у деякій області функцій, що задовольняють певним властивостям [148]– [152], [153], [166], [167], [220]– [223]. У статтях Моклячука М.П. та Татарінова С.В. [110], [112], [155], [156] запропонований метод оцінки функціоналів від однорідного випадкового поля дискретних аргументів, що спостерігається в точках $(k,j)\in\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}^2_+$ з білим шумом. Цей метод застосовується при умові, що спектральна щільність $f\left(\lambda,\mu\right)+\sigma^2$ допускає канонічну факторизацію

$$f\left(\lambda,\mu\right)+\sigma^2=\left|\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} d\left(u,v\right)e^{-i(u\lambda+v\mu)}\right|^2$$

і величина середньоквадратичної похибки та спектральна характеристика оптимальної оцінки мають наступний вигляд

$$h(f)=A\left(e^{-i\lambda},e^{-i\mu}\right)-r\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)d^{-1}\left(e^{-i\lambda},e^{-i\mu}\right),$$

$$\Delta(f) = \|A\,d\|^2 - \sigma^2 \, \|a\|^2 \,,$$

$$r\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) = \sum_{k,j=0}^{\infty} (Ad)_{kj} \, e^{i(k\lambda + j\mu)},$$

$$A\,\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) = \sum_{k,j=0}^{\infty} a(k,j) \, e^{i(k\lambda + j\mu)},$$

A – оператор у просторі $\ell_2 \times \ell_2$, який визначається співвідношенням

$$(Ad)_{kj} = \sum_{u,v=0}^{\infty} a(k+u, j+v) d_{uv}, k, j = 0, 1, \ldots$$

У випадку невідомої спектральної щільності поля М.П. Моклячук та С.В. Татарінов [51,53,78] застосовують мінімаксний метод, що приводить до задачі на умовний екстремум

$$\|A\,d\|^2 \to \max, f\,(\lambda,\mu) = \left| \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} d\,(u,v) \, e^{-i(u\lambda + v\mu)} \right|^2 - \sigma^2 \in D.$$

В даній роботі використовуаємо підхід до задач оцінювання, що базується на методі А.М. Колмогорова [40], який не вимагає канонічної факторизації спектральної щільності поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$. Знайдено мінімаксні оцінки та найменш сприятливі спектральні щільності для конкретних класів спектральних щільностей. Класичні та мінімаксні оцінки знайдено за даними спостережень у півплощині та за спостереженнями в усіх точках площини за винятком точок першої чверті.

2.1.2. Оптимальні оцінки за спостереженнями у півплощині

Нехай однорідне випадкове поле $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ спостерігається в точках $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, де $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля. Кореляційна структура таких полів визначається додатньо визначеною матрицею спектральних щільностей (1.1).

Нехай виконується умова мінімальності [38], [40], [148] – [152], [153]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} \, d\mu < \infty, \quad \lambda \in [-\pi; \pi] \,. \tag{2.1}$$

Розглянемо задачу лінійного середньоквадратичного оптимального оцінювання функціоналу

$$A_+\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a(k,j)\xi(k,j)$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j), k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}_+$, якщо матриця спектральних щільностей відома. Будемо вважати, що функція $a(k,j)$, яка визначає функціонал $A_+\xi$, задовольняє умови:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a(k,j)| < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,|a(\lambda,j)|^2 < \infty, \quad \lambda \in [-\pi;\pi]\,, \tag{2.2}$$

$$a(\lambda,j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k,j)e^{ik\lambda}.$$

За цих умов функціонал $A_+\xi$ має скінченний другий момент і оператор $A(\lambda)$ у просторі ℓ_2 послідовностей $d = \{d(v) : v = 0,1,\dots\}$ із скінченною сумою квадратів, який задається співвідношенням

$$\left(A(\lambda)d\right)(j) = \sum_{v=0}^{\infty} a(\lambda, j+v)d(v),\ j = 0,1,\dots \tag{2.3}$$

симетричний і компактний для всіх $\lambda \in [-\pi;\pi]$. Лінійна оцінка $\hat{A}_+\xi$ функціоналу $A_+\xi$ за даними спостережень поля $\zeta(u,v) = \xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ має вигляд

$$\hat{A}_+\xi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda,\mu)Z_\zeta(d\lambda,d\mu).$$

Функція $h(\lambda,\mu)$ належить підпростору $L_2^-(f_{\zeta\zeta})$ у просторі $L_2(f_{\zeta\zeta})$, породженому функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$. Необхідною та достатньою умовою оптимальності оцінки $\hat{A}_+\xi$ є умова ортогональності у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega,F,P)$ випадкових величин другого порядку:

$$A_+\xi - \hat{A}_+\xi \perp \zeta(k,j), \quad (k,j) \in \mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+.$$

За цієї умови

$$A_+(\lambda,\mu)\left[f_{\xi\xi}(\lambda,\,\mu) + f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)\right] - h(\lambda,\mu)f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu) = C_+(\lambda,\mu),$$

де

$$A_+(\lambda,\mu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a(k,j)e^{i(k\lambda+j\mu)}=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(\lambda\,)e^{ij\mu},$$

$$a_j(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a(k,j)e^{ik\lambda};$$

$$C_+(\lambda,\mu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}c(k,j)e^{i(k\lambda+j\mu)}=\sum_{j=0}^{\infty}c_j(\lambda)e^{ij\mu},$$

$$c_j(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c(k,j)e^{ik\lambda}.$$

Звідси знаходимо, що спектральна характеристика оптимальної оцінки обчислюється за формулою

$$h(\lambda,\mu)=\frac{A_+(\lambda,\mu)(f_{\xi\xi}(\lambda,\ \mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\ \mu))}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}-\frac{C_+(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)},\tag{2.4}$$

де функції $c_j(\lambda)$ – визначаються системою рівнянь

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_j(\lambda)d_{t-j}(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j(\lambda)b_{t-j}(\lambda),\quad t\in\mathbb{Z}_+,$$

$$b_j(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}e^{-ij\mu}d\mu,$$

$$d_j(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}e^{-ij\mu}d\mu.$$

Якщо визначити оператори $B(\lambda)$, $D(\lambda)$ у просторі ℓ_2 матрицями з елементами:

$$B_N(\lambda)\,(k,j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\mu}\frac{1}{f_{\zeta\zeta}\,(\lambda,\mu)}d\mu,$$

$$D_N(\lambda)\,(k,j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\mu}\frac{f_{\xi\xi}\,(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}\,(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}\,(\lambda,\mu)}d\mu,\ k,j=0,1,\ldots,$$

які задаються коефіцієнтами Фур'є функцій

$$\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)},\quad\frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)},$$

відповідно, то рівняння для знаходження функцій $c_j(\lambda)$ матиме вигляд

$$D(\lambda)a(\lambda) = B(\lambda)c(\lambda),$$

звідки

$$c(\lambda) = B^{-1}(\lambda)D(\lambda)a(\lambda).$$

Спектральна характеристика $h(\lambda,\mu)$ оптимальної лінійної оцінки функціоналу $A_+\xi$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}) = \min_{\hat{A}\xi} M\left|A_+\xi - \hat{A}_+\xi\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|A_+(\lambda,\mu) - h(\lambda,\mu)\right|^2 f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) - 2h(\lambda,\mu)\overline{A_+}(f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+$$

$$+2\left|h(\lambda,\mu)\right|^2 Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu) + \left|h(\lambda,\mu)\right|^2 f_{\eta\eta}(\lambda,\mu))d\lambda d\mu \qquad (2.5)$$

Отже справджуються такі твердження.

Теорема 2.1. *Нехай $\zeta(k,j) = \xi(k,j) + \eta(k,j)$ – сума однорідних та однорідно зв'язаних випадкових полів. Нехай виконуються умова мінімальності* (2.1) *та умови* (2.2)*. Спектральну характеристику $h(\lambda,\mu)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta})$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\zeta(k,j) = \xi(k,j) + \eta(k,j)$ в точках множини $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ можна обчислити за формулами* (2.4), (2.5).

Наслідок 2.1. *Нехай $\xi(k,j), \eta(k,j)$ – некорельовані однорідні випадкові поля, що мають спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$, які задовольняють умову мінімальності*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}d\mu < \infty, \quad \lambda \in [-\pi;\pi]. \qquad (2.6)$$

Нехай виконуються умови (2.2)*. Спектральну характеристику $h(f,g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ можна обчислити за формулами*

$$h(f,g) = \frac{A_+(\lambda,\mu)f(\lambda,\mu) - C_+(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)} =$$

$$= A_+(\lambda,\mu) - \frac{A_+(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)+C_+(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}, \qquad (2.7)$$

$$\Delta(f,g) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A_+(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)+C_+(\lambda,\mu)\right|^2}{\left(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)\right)^2}f(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A_+(\lambda,\mu)f(\lambda,\mu)-C_+(\lambda,\mu)\right|^2}{\left(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)\right)^2}g(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{j=0}^{\infty}(B\,(\lambda)c(\lambda))(j)\;\bar{c}(\lambda,j)+\sum_{j=0}^{\infty}(R(\lambda)\,a(\lambda))\,(j)\;\bar{a}(\lambda,j)\right]d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\langle B(\lambda)\,c(\lambda),\ c(\lambda)\rangle\right]d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\langle R(\lambda)\,a(\lambda),\ a(\lambda)\rangle\right]d\lambda, \qquad (2.8)$$

де $c(\lambda) = B^{-1}(\lambda)D(\lambda)a(\lambda)$, $\langle a(\lambda), c(\lambda)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} a\,(\lambda,j)\,\bar{c}(\lambda,j)$ *– скалярний добуток у просторі* ℓ_2*;* $B(\lambda),\ D(\lambda),\ R(\lambda)$ *- оператори у просторі* ℓ_2*, які визначаються коефіцієнтами Фур'є функцій*

$$\left(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)\right)^{-1}, \quad g(\lambda,\mu)\ \left(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)\right)^{-1},$$

$$f(\lambda,\mu)\,g(\lambda,\mu)\ \left(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)\right)^{-1},$$

відповідно

$$B(\lambda)\,(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu}\frac{1}{f\,(\lambda,\mu)+g\,(\lambda,\mu)}d\mu, \qquad (2.9)$$

$$D(\lambda)\,(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu}\frac{f\,(\lambda,\mu)}{f\,(\lambda,\mu)+g\,(\lambda,\mu)}d\mu, \qquad (2.10)$$

$$R(\lambda)\,(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu}\frac{f\,(\lambda,\mu)\,g\,(\lambda,\mu)}{f\,(\lambda,\mu)+g\,(\lambda,\mu)}d\mu; \qquad (2.11)$$

$$k,j = 0,1,\dots$$

Наслідок 2.2. *Нехай* $\xi(k,j)$ *– однорідне випадкове поле, яке має спектральну щільність* $f(\lambda,\mu)$*, що задовольняє умову мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f(\lambda,\mu)}\,d\mu < \infty, \quad \lambda \in [-\pi;\pi]\,. \qquad (2.12)$$

Нехай виконуються умови (2.2)*. Спектральну характеристику* $h(f)$

та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ можна обчислити за формулами

$$h(f) = A_+(\lambda,\mu) - C_+(\lambda,\mu) f^{-1}(\lambda,\mu) = \\ = A_+(\lambda,\mu) - r(\lambda,\mu) d^{-1}(\lambda,\mu), \tag{2.13}$$

$$\Delta(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |C_+(\lambda,\mu)|^2 f^{-1}(\lambda,\mu)\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle B^{-1}(\lambda)a(\lambda),\ a(\lambda)\right\rangle d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|A(\lambda)\, d(\lambda)\|^2 d\lambda, \tag{2.14}$$

де

$$C_+(\lambda,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} (B^{-1}(\lambda)a(\lambda))(j)\, e^{ij\mu}, \quad r(\lambda,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} (A(\lambda)d(\lambda))(j) e^{ij\mu},$$

оператор $A(\lambda)$ у просторі ℓ_2 визначається співвідношенням (2.3), а оператор $B(\lambda)$ у просторі ℓ_2 визначається матрицею з коефіцієнтів Фур'є функції $f^{-1}(\lambda,\mu)$

$$B(\lambda)(k,j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{1}{f(\lambda,\mu)} d\mu, \quad k,j = 0,1,...,$$

функція $d(\lambda) = \{d(\lambda,v) : v = 0,1,\dots\}$ визначає канонічну факторизацію спектральної щільності

$$f(\lambda,\mu) = \left| \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} d(u,v)\, e^{-i(u\lambda+v\mu)} \right|^2 = \left| \sum_{v=0}^{\infty} d(\lambda,v)\, e^{-iv\mu} \right|^2.$$

Наслідок 2.3. *Нехай $\xi(k,j)$, $\eta(k,j)$ – некорельовані однорідні випадкові поля, що мають спектральні щільності $f(\lambda,\mu) = f_1(\lambda) f_2(\mu)$, $g(\lambda,\mu) = f_1(\lambda) g_2(\mu)$, що задовольнють умову мінімальності (2.6). Нехай виконуються умови (2.2). Спектральну характеристику $h(f,g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ можна обчи-*

слити за формулами

$$h(f,g)=\frac{A_+(\lambda,\mu)f_1(\lambda)f_2(\mu)-C_+(\lambda,\mu)}{f_1(\lambda)(f_2(\mu)+g_2(\mu))}=$$

$$=A_+(\lambda,\mu)-\frac{A_+(\lambda,\mu)f_1(\lambda)g_2(\mu)+C_+(\lambda,\mu)}{f_1(\lambda)(f_2(\mu)+g_2(\mu))},\qquad(2.15)$$

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_1(\lambda)\left[\left\langle D\,a(\lambda),\ B^{-1}Da(\lambda)\right\rangle+\langle R\,a(\lambda),\ a(\lambda)\rangle\right]d\lambda,\quad(2.16)$$

де B, D, R *– оператори у просторі* ℓ_2*, які задаються матрицями з коефіцієнтів Фур'є функцій*

$$\left(f_2(\mu)+g_2(\mu)\right)^{-1},\ \ f_2(\mu)\ \left(f_2(\mu)+g_2(\mu)\right)^{-1},\ \ f_2(\mu)g_2(\mu)\left(f_2(\mu)+g_2(\mu)\right)^{-1}$$

відповідно

$$B\left(k,j\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\mu}\frac{1}{f_2\left(\mu\right)+g_2\left(\mu\right)}d\mu,\ k,j=0,1,\dots,$$

$$D\left(k,j\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\mu}\frac{f_2\left(\mu\right)}{f_2\left(\mu\right)+g_2\left(\mu\right)}d\mu,\ k,j=0,1,\dots,$$

$$R\left(k,j\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\mu}\frac{f_2\left(\mu\right)g_2\left(\mu\right)}{f_2\left(\mu\right)+g_2\left(\mu\right)}d\mu,\ k,j=0,1,\dots$$

У тому випадку, коли однорідне випадкове поле $\xi(k,j)$ *спостерігається без шуму,* ($g(\lambda,\mu)=0$)*, спектральну характеристику* $h(f)$ *та середньоквадратичну похибку* $\Delta(f)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_+\xi$ *від невідомих значень однорідного поля* $\xi(k,j)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)$ *при* $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ *можна обчислити за формулами*

$$h(f)=A_+\left(\lambda,\mu\right)-\tilde{C}_+\left(\lambda,\mu\right)\frac{1}{f_2(\mu)},\qquad(2.17)$$

$$h(f)=A_+\left(\lambda,\mu\right)-r\ \left(\lambda,\mu\right)d_2^{-1}\left(\mu\right),\qquad(2.18)$$

$$\Delta(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|C_+\left(\lambda,\mu\right)\right|^2f_1^{-1}(\lambda)\,f_2^{-1}(\mu)\,d\lambda\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_1(\lambda)\left\langle\tilde{B}^{-1}a(\lambda),\ a(\lambda)\right\rangle d\lambda=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda) \left\| A(\lambda)\, d_2 \right\|^2 d\lambda, \tag{2.19}$$

$$\tilde{C}_+ (\lambda, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{B}^{-1} a(\lambda))\, (j)\, e^{ij\mu}, \quad r\,(\lambda, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} (A(\lambda) d_2)(j) e^{ij\mu},$$

оператор $A(\lambda)$ у просторі ℓ_2 визначаєтьcя співвідношенням (2.3), а оператор $\tilde{B}$ у просторі ℓ_2 визначається матрицею з коефіцієнтів Фур'є функції $(f_2(\mu))^{-1}$:

$$\tilde{B}\ (k, j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{1}{f_2\,(\mu)} d\mu, \quad k, j = 0, 1, \ldots,$$

$d = \{d(v) : v = 0, 1, \ldots\}$ *визначає канонічну факторизацію спектральної щільності*

$$f\,(\lambda, \mu) = |d(\lambda, \mu)|^2 = \left| \sum_{v=0}^{\infty} d(\lambda, v)\, e^{-iv\mu} \right|^2 = f_1(\lambda) \left| \sum_{v=0}^{\infty} d(v)\, e^{-iv\mu} \right|^2.$$

Приклад 2.1. Приклад, у якому для однорідного випадкового поля $\xi(k, j)$, що має спектральну щільність

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\sigma^4}{4\pi^2} \frac{1}{|1 - \alpha\, e^{-i\lambda}|^2} \frac{1}{|\ 1 - \beta\, e^{-i\mu}\ |^2} = f_1(\lambda) f_2(\mu),$$

$$f_1(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \alpha\, e^{-i\lambda}|^2}, \quad f_2(\mu) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|\ 1 - \beta\, e^{-i\mu}\ |^2}, \ |\alpha| < 1, |\beta| < 1,$$

$\diamondsuit$

знайдено оцінку функціоналу $A_+\xi = \sum_{k=-1}^{1} \sum_{j=0}^{1} a(k, j) \xi(k, j)$ двома способами, подано у додатках (Приклад 4.5). Результати, отримані цими двома способами, співпадають і узгоджуються з результатами Ю.А. Розанова [153] та А.М. Яглома [168], які базуються на властивостях аналітичних функцій і пошуку спектральної характеристики як функції, що задовольняє певним властивостям.

2.1.3. Оптимальні оцінки за спостереженнями в точках площині, за винятком точок поля першої чверті

Розглянемо задачу лінійного середньоквадратичного оптимального оцінювання функціоналу

$$A_{++}\xi = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a(k,j)\xi(k,j)$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j),\ k \geq 0,\ j \geq 0$ за даними спостережень в точках $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}_+^2$ поля $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}_+^2$, яке є сумою однорідно зв'язаних випадкових полів та має спектральну щільність $f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu) = f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + 2Re f_{\xi\eta}(\lambda,\mu) + f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$, що задовольняє умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} d\lambda\, d\mu < \infty. \tag{2.20}$$

Будемо вважати, що функція $a(k,j)$, яка визначає функціонал $A_{++}\xi$, задовольняє умови

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a(k,j)| < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (k+1)(j+1)\, |a(k,j)|^2 < \infty. \tag{2.21}$$

Тоді функціонал $A_{++}\xi$ має скінченний другий момент і оператор A_{++} у просторі $\ell_{2,2}$ подвійних послідовностей $d = \{d(k,j) : k,j = 0,1,\dots\}$ зі скінченною сумою квадратів, який задається співвідношенням

$$(A_{++}d)\ (k,j) = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a(k+u, j+v) d(u,v), \tag{2.22}$$

симетричний і компактний.

Лінійну оцінку функціоналу $A_{++}\xi$ за даними спостережень поля $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$ в точках $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}_+^2$ шукаємо у вигляді

$$\hat{A}_{++}\xi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda}, e^{i\mu})\, Z_\zeta(d\lambda, d\mu).$$

Функція $h(e^{i\lambda}, e^{i\mu})$ належить підпростору $L_2^-(f_\zeta)$ у просторі $L_2(f_\zeta)$, породженому функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}_+^2$. Спектральна характеристика $h(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціоналу $A_{++}\xi$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(f_{\xi\xi}, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta}) = \min_{h \in L_2^-(f+g)} \Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta}) = \min_{\hat{A}_{++}\xi} M \left| A_{++}\xi - \hat{A}_{++}\xi \right|^2.$$

Величина $\Delta(f_{\xi\xi}, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta})$ визначається лише щільностями $f_{\xi\xi}, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta}$. Якщо щільності відомі, то, використавши властивості ортогонального проектування у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega, F, P)$ випадкових величин другого порядку, одержимо

$$h(\lambda, \mu) = \frac{A_{++}(\lambda, \mu)(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)) - C_{++}(\lambda,\, \mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\, \mu)}, \tag{2.23}$$

$$\Delta(f_{\xi\xi}, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta}) =$$

$$=$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| A_{++}(\lambda, \mu) - h(\lambda, \mu) \right|^2 f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) \; - 2h(\lambda, \mu)\overline{A_{++}}(\lambda, \mu) f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) +$$

$$+2 \left| h(\lambda, \mu) \right|^2 Re f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) + \left| h(\lambda, \mu) \right|^2 f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)) d\lambda d\mu, \tag{2.24}$$

де

$$C_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c(k, j) e^{i(k\lambda + j\mu)},$$

$$A_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a\,(k, j) e^{i(k\lambda + j\mu)},$$

$$c = B^{-1} D a,$$

$B,\ D$ – оператори у просторі $\ell_{2,2}$ які визначаються коефіцієнтами Фур'є функцій $(f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu))^{-1}$, $f_{\xi\xi}(\lambda, \mu)\ (f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu))^{-1}$, відповідно:

$$(Bc)\,(k, j) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} c\,(u, v)\, \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i((u-k)\lambda + (v-j)\mu)} \frac{1}{f_{\zeta\zeta}\,(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu,$$

$$(Dc)\,(k, j) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} c\,(u, v)\, \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i((u-k)\lambda + (v-j)\mu)} \frac{f_{\xi\xi}\,(\lambda, \mu)}{f_{\zeta\zeta}\,(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu,$$

$$k, j = 0, 1, \ldots$$

Підсумуємо викладені результати у вигляді наступної теореми.

Теорема 2.2. *Нехай $\zeta(u, v) = \xi(u, v) + \eta(u, v)$ – сума однорідних та однорідно зв'язаних випадкових полів та нехай виконуються умови* *мінімальності (2.20) та умови (2.21). Спектральну характеристику $h(\lambda,\mu)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta})$ оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$ від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в точках множини $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}^2_+$ можна обчислити за формулами (2.23), (2.24).*

Наслідок 2.4. *Нехай $\xi(k,j), \eta(k,j)$ – некорельовані однорідні випадкові поля, що мають спектральні щільності $f(\lambda,\mu), g(\lambda,\mu)$, які задовольняють умову мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)} d\lambda\, d\mu \;<\; \infty. \tag{2.25}$$

Нехай виконуються умови (2.21). Спектральну характеристику $h(f,g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$ від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}^2_+$ можна обчислити за формулами

$$h(f,g) = \frac{A_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) f(\lambda,\mu) - C_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu})}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}, \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(f,g) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) g(\lambda,\mu) + C_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu})\right|^2}{\left(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)\right)^2} f(\lambda,\mu) d\lambda d\mu \\
&+ \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) f(\lambda,\mu) - C_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu})\right|^2}{\left(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)\right)^2} g(\lambda,\mu)\, d\lambda\, d\mu = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (B\,c)(k,j)\bar{c}(k,j) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (R\,a)(k,j)\bar{a}(k,j) = \\
&= \langle B\,c, c\rangle + \langle Ra, a\rangle ,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

де

$$C_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c\,(k,j) e^{i(k\lambda + j\mu)},$$

$$A_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a\,(k,j) e^{i(k\lambda + j\mu)},$$

$$c = B^{-1} D a,$$

$\langle a, c\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a(k,j)\bar{c}(k,j)$ *- скалярний добуток у просторі* $\ell_{2,2}$

подвійних послідовностей $a = \{a(k,j) : k,j = 0,1,...\}$ *із скінченою сумою квадратів,* $B,\ D,\ R$ *- оператори у просторі* $\ell_{2,2}$ *які визначаються коефіцієнтами Фур'є функцій*

$$\left(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)\right)^{-1}, \quad g(\lambda,\mu)\ \left(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)\right)^{-1},$$

$$f(\lambda,\mu)\,g(\lambda,\mu)\ \left(f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)\right)^{-1}$$

відповідно:

$$\begin{gathered}(Bc)\,(k,j) = \\ = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} c\,(u,v)\,\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i((u-k)\lambda+(v-j)\mu)}\frac{1}{f\,(\lambda,\mu)+g\,(\lambda,\mu)}d\lambda d\mu,\end{gathered} \tag{2.28}$$

$$\begin{gathered}(Dc)\,(k,j) = \\ = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} c\,(u,v)\,\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i((u-k)\lambda+(v-j)\mu)}\frac{f\,(\lambda,\mu)}{f\,(\lambda,\mu)+g\,(\lambda,\mu)}d\lambda d\mu,\end{gathered} \tag{2.29}$$

$$\begin{gathered}(Rc)\,(k,j) = \\ = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} c\,(u,v)\,\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i((u-k)\lambda+(v-j)\mu)}\frac{f\,(\lambda,\mu)\,g\,(\lambda,\mu)}{f\,(\lambda,\mu)+g\,(\lambda,\mu)}d\lambda d\mu,\end{gathered} \tag{2.30}$$

$$k,j = 0,1,\ldots$$

Наслідок 2.5. *Нехай* $\xi(k,j)$ *– однорідне випадкове поле, що спостерігається без шуму та має спектральну щільність* $f(\lambda,\mu)$, *яка задовольняє умову мінімальності*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f(\lambda,\mu)}d\lambda\,d\mu\ <\ \infty. \tag{2.31}$$

Нехай виконуються умови (2.21). *Спектральну характеристику* $h(f)$ *та середньоквадратичну похибку* $\Delta(f)$ *оптимальної оцінки функціо-*

нала $A_{++}\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}_+^2$ можна обчислити за формулами

$$h(f) = A_{++}\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) - C_{++}\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) f^{-1}(\lambda,\mu) =$$

$$= A_{++}\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) - \left(A_{++}\, d\right)\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) d^{-1}\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right), \qquad (2.32)$$

$$\Delta(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|C_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu})\right|^2 f^{-1}(\lambda,\mu) d\lambda d\mu =$$

$$= \left\langle B^{-1}a, a\right\rangle = \left\|A_{++}d\right\|^2, \qquad (2.33)$$

де

$$C_{++}(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \left(B^{-1}a\right)(k,j)\, e^{i(k\lambda + j\mu)},$$

$$\left(A_{++}\, d\right)(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \left(A_{++}\, d\right)(k,j)\, e^{i(k\lambda + j\mu)},$$

A_{++}, B – оператори у просторі $\ell_{2,2}$, які визначаються співвідношенням (2.22) *та співвідношенням*

$$(Ba)(k,j) = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a(u,v) \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i((u-k)\lambda + (v-j)\mu)} \frac{1}{f(\lambda,\mu)} d\lambda d\mu,$$

послідовність $d = \{d(u,v) : u,v = 0,1,\ldots\}$ визначає канонічну факторизацію спектральної щільності

$$f(\lambda,\mu) = \left|\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} d(u,v)\, e^{i(u\lambda + v\mu)}\right|^2.$$

Приклад 2.2. Приклад, у якому розв'язано задачу оптимального лінійного оцінювання невідомого значення функціонала

$$A\xi = \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} a(k,j)\xi(k,j)$$

за спостереженнями випадкового однорідного поля $\xi(u,v)$ в точках множини $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}_+ \times Z_+$, спектральна щільність якого має такий самий вигляд як і в попередньому прикладі 2.1, розміщено у додатках (Приклад 4.7). $\diamondsuit$

2.1.4. Мінімаксні оцінки за спостереженнями у півплощині

Скористатись формулами для обчислення спектральної характеристики та величини середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ можна за умови, що визначені спектральні щільнояті полів, які задовольняють відповідні умови мінімальності. У тому випадку, коли спектральні щільності невідомі, а визначені лише класи можливих (допустимих) спектральних щільностей застосовують мінімаксний підхід ро задачі оцінювання функціонала. Відповідні означення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик наведені у попередніх розділах. У цьому разділі матимемо такі твердження, що є наслідком означень, тверджень теореми 2.1 та наслідків 2.1 – 2.3.

Лема 2.1. *Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі в класі допустимих спектральних щільностей $D_f\times D_g$ при оптимальнії лінійній екстраполяції функціонала $A_+\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій*

$$(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1},\quad f_0(\lambda,\mu)(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1},$$

$$f_0(\lambda,\mu)g_0(\lambda,\mu)(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1}$$

задають оператори $B^0(\lambda)$, $D^0(\lambda)$, $R^0(\lambda)$ за формулами (2.9)–(2.11), *які визначають розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\left\langle D(\lambda)a(\lambda),B^{-1}(\lambda)D(\lambda)\,a(\lambda)\right\rangle+\langle R(\lambda)\,a(\lambda),\ a(\lambda)\rangle\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\left\langle D^0(\lambda)a(\lambda),(B^0(\lambda))^{-1}D^0(\lambda)a(\lambda)\right\rangle+\left\langle R^0(\lambda)a(\lambda),a(\lambda)\right\rangle\right]d\lambda. \tag{2.34}$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0=h(f_0,g_0)$ можна обчислити за формулою (2.7) *за умови, що $h(f_0,g_0)\in H_D$.*

Лема 2.2. *Спектральна щільність однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$ яке допускає канонічний розклад рухомого середнього*

$$\xi(k,j)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=-\infty}^{j}d^0\left(k-u,j-v\right)\gamma\left(u,v\right), \tag{2.35}$$

де $\gamma(u,v)$ — стандартне поле з некорельованими значеннями, буде найменш сприятливою в класі D_f при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_+\xi$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, якщо спектральна щільність $f^0(\lambda,\mu)$ допускає канонічну факторизацію

$$f^0(\lambda,\mu) = \left|d^0(\lambda,\mu)\right|^2, \quad d^0(\lambda,\mu) = \sum_{v=0}^{\infty} d^0(\lambda,v)\, e^{-iv\mu}, \tag{2.36}$$

де $d^0(\lambda) = \left\{d^0(\lambda,v) : v = 0,1,\dots\right\}$ – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|A_+(\lambda)\, d(\lambda)\|^2\, d\lambda \to \max,$$

$$f(\lambda,\mu) = \left|\sum_{v=0}^{\infty} d(\lambda,v)\, e^{-iv\mu}\right|^2 \in D_f. \tag{2.37}$$

Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою (2.13) за умови, що $h(f_0) \in H_{D_f}$.

Найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0,g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h;f,g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки виконуються, коли $h^0 = h(f_0,g_0)$, $h(f_0,g_0) \in H_D$ і (f_0,g_0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right) = \Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f_0,g_0\right) \tag{2.38}$$

де

$$\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A_+(\lambda,\mu)\, g_0(\lambda,\mu) + C_+(\lambda,\mu)\right|^2}{\left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)^2} f(\lambda,\mu)\, d\lambda d\mu$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A_+(\lambda,\mu)\, f_0(\lambda,\mu) - C_+(\lambda,\mu)\right|^2}{\left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)^2}\, g(\lambda,\mu)\; d\lambda\, d\mu.$$

Задача на умовний екстремум (2.38) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(f,g) = -\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);\, f,g\right) + \delta\left((f,g)\left|D_f \times D_g\right.\right) \to \inf, \tag{2.39}$$

де $\delta\left((f,g)\left|D_f \times D_g\right.\right)$ - індикаторна функція множини $D_f \times D_g$. Розв'язок задачі (2.39) визначається умовою $0 \in \partial\Delta_D\left(f_0, g_0\right)$, де $\partial\Delta_D\left(f_0, g_0\right)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D\left(f, g\right)$ в точці $\left(f_0, g_0\right)$. Скористаємося даною умовою для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей для конкретних класів допустимих щільностей.

2.1.5. Найменш сприятливі щільності в класі $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k, j)$ за даними спостережень поля $\xi(u, v) + \eta(u, v)$ при $(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ за умови, що спектральні щільності полів невідомі, а визначені лише класи допустимих спектральних щільностей, що мають вигляд $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$, де

$$D_f^0(\lambda) = \left\{ f(\lambda, \mu) \mid \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda, \mu)\, d\mu \ \le P_1(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi] \right\},$$

$$D_g^0(\lambda) = \left\{ g(\lambda, \mu) \mid \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\lambda, \mu)\, d\mu \ \le P_2(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi] \right\}.$$

Нехай щільності $f_0(\lambda, \mu) \in D_f^0$, $g_0(\lambda, \mu) \in D_g^0$ та нехай функції

$$h_f\left(f_0, g_0\right) = \frac{\left|A_+\left(\lambda, \mu\right) g_0\left(\lambda, \mu\right) + C_+\left(\lambda, \mu\right)\right|}{f_0\left(\lambda, \mu\right) + g_0\left(\lambda, \mu\right)}, \tag{2.40}$$

$$h_g\left(f_0, g_0\right) = \frac{\left|A_+\left(\lambda, \mu\right) f_0\left(\lambda, \mu\right) - C_+\left(\lambda, \mu\right)\right|}{f_0\left(\lambda, \mu\right) + g_0\left(\lambda, \mu\right)}, \tag{2.41}$$

обмежені. За цих умов функціонал $\Delta\left(h\left(f_0, g_0\right); f, g\right)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі L_1. Тому з умови $0 \in \partial\Delta_D\left(f_0, g_0\right)$ при $D = D_f^0 \times D_g^0$ знаходимо, що найменш сприятливі спектральні щільності $f_0 \in D_f^0, g_0 \in D_g^0$ задовольняють рівняння

$$\left|A_+\left(\lambda, \mu\right) g_0\left(\lambda, \mu\right) + C_+^0\left(\lambda, \mu\right)\right| = \alpha_1(\lambda)\left(f_0\left(\lambda, \mu\right) + g_0\left(\lambda, \mu\right)\right), \tag{2.42}$$

$$\left|A_+\left(\lambda, \mu\right) f_0\left(\lambda, \mu\right) - C_+^0\left(\lambda, \mu\right)\right| = \alpha_2(\lambda)\left(f_0\left(\lambda, \mu\right) + g_0\left(\lambda, \mu\right)\right), \tag{2.43}$$

де константи $\alpha_1\left(\lambda\right) \ge 0$,$\alpha_2\left(\lambda\right) \ge 0$.

Зауважимо, що $\alpha(\lambda) \ne 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_0(\lambda, \mu)\, d\mu \ = P_1(\lambda), \tag{2.44}$$

та $\beta(\lambda) \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_0(\lambda, \mu)\, d\mu \ = P_2(\lambda). \tag{2.45}$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 2.3. *Нехай щільності $f_0(\lambda,\mu) \in D_f^0(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_g^0(\lambda)$ задовольняють умову мінімальності (2.6), і нехай функції $h_f\,(f_0, g_0)$, $h_g\,(f_0, g_0)$, що визначені за формулами (2.40), (2.41), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі в $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_+\xi$, якщо $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ є розв'язком систем рівнянь (2.42), (2.43) і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.34). Функція $h\,(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2.7) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_{D_f}$, є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$.*

Наслідок 2.6. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda,\mu)$ відома, спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu) \in D_g^0(\lambda)$, функція $f(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)$ задовольняє умову мінімальності (2.6), виконуються умови (2.2), функція $h_g\,(f, g_0)$, що обчислена за формулою (2.41), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятлива в класі $D_g^0(\lambda)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_+\xi$, якщо вона визначається формулою*

$$g_0\,(\lambda,\mu) = \max\left\{\, 0, \alpha_2^{-1}(\lambda)\,|A_+\,(\lambda,\mu)\, f\,(\lambda,\mu) - C_+\,(\lambda,\mu)\,| - f\,(\lambda,\mu) \,\right\}$$

і пара $f(\lambda,\mu), g_0(\lambda,\mu)$ задає розв'язок екстремальної задачі (2.34). Функція $h\,(f, g_0)$, обчислена за формулою (2.7) за умови, що $h(f, g_0) \in H_D$, є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$.

Наслідок 2.7. *Нехай виконуються умови (2.2). Спектральна щільність*

$$f^0\,(\lambda,\mu) = \left| \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} d^0\,(u,v)\, e^{-i(u\lambda+v\mu)} \right|^2 = \left| \sum_{v=0}^{\infty} d^0(\lambda,v)\, e^{-iv\mu} \right|^2$$

однорідного випадкового поля, що допускає розклад рухомого середнього

$$\xi(k,j) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{j} d^0\,(k-u, j-v)\ \gamma\,(u,v) \tag{2.46}$$

де $d^0(\lambda) = \left\{d^0(\lambda, v) : v = 0, 1, \dots\right\}$ *– власний елемент оператора* $A(\lambda)$*, що відповідає найбільшому власному значенню* $v(\lambda)$ *і задовольняє умові*

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left| d^0\left(\lambda, v\right) \right|^2 = P_1(\lambda),$$

найменш сприятлива в класі $D_f^0(\lambda)$ *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_+\xi$ *за даними спостережень поля* $\xi(u, v)$ *при* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$*. Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою* (2.13)*. Мінімаксне значення похибки оцінки функціоналу* $A_+\xi$ *дорівнює*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_1(\lambda) v^2(\lambda) d\lambda.$$

Наслідок 2.8. *Нехай* $\xi(k, j)$ *- однорідне випадкове поле, що має спектральну щільність* $f\left(\lambda, \mu\right) = f_1\left(\lambda\right) f_2\left(\mu\right)$*, де* $f_1(\lambda)$ *– фіксована щільність,* $\int_{-\pi}^{\pi} f_1\left(\lambda\right) d\lambda = P_1^2$*,* $f_2(\mu)$ *задовольняє умову умову мінімальності* (2.12)*, та*

$$f_2(\mu) \in D_f^0 = \left\{ f(\mu) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mu)\, d\mu \ \le P_2^2 \right\}.$$

Нехай виконуються умови (2.2)*. Тоді найменш сприятливою щільністю в класі* D_f^0 *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_+\xi$ *за даними спостережень поля* $\xi(u, v)$ *при* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}_+^2$ *буде щільність*

$$f_0\left(\lambda, \mu\right) = f_1\left(\lambda\right) \left| \sum_{v=0}^{\infty} d^0(v)\, e^{-iv\mu} \right|^2,$$

де $\boldsymbol{d}^0 = \left\{d^0(v) : v = 0, 1, \dots\right\}$, $\sqrt{f_1(\lambda)}\boldsymbol{d}^0$ *– власний елемент оператора* $A(\lambda)$*, що відповідає найбільшому власному значенню* $v(\lambda)$ *і задовольняє умову* $\sum_{v=0}^{\infty} \left| d^0\left(v\right) \right|^2 = P_2^2$*. Мінімаксну спектральну характеристику* $h(f)$ *можна обчислити за формулами* (2.17)*.*

Приклад 2.3. Приклад, у якому розглянуто випадкове однорідне поле із спектральною щільністю $f\left(\lambda, \mu\right) = f_1\left(\lambda\right) f_2\left(\mu\right)$, $f_1(\lambda)$ – фіксована щільність, $\int_{-\pi}^{\pi} f_1\left(\lambda\right) d\lambda = P_1^2$, точне значення щільності $f_2\left(\mu\right)$ невідомо, але відомо, що вона належить класу D_f^0, та знайдено оптимальну лінійну оцінку невідомого значення функціоналу $A\xi = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{j=0}^{1} a(k,j)\xi(k,j)$ за спостереженнями $\xi(u,v)$, $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, розміщено у додатках (Приклад 4.8).

2.1.6. Найменш сприятливі щільності в класі $D = D_v^u(\lambda) \times D_\varepsilon(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ за умови, що спектральні щільнояті полів невідомі, а визначені лише класи допустимих спектральних щільностей $D = D_v^u(\lambda) \times D_\varepsilon(\lambda)$, де клас $D_v^u(\lambda)$ описує "смугову" модель випадкових полів:

$$D_v^u(\lambda) = \Bigg\{ f(\lambda,\mu) \mid v(\lambda,\mu) \leq f(\lambda,\mu) \leq u(\lambda,\mu), \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\mu) d\mu = P_1(\lambda),\ \lambda \in [-\pi,\pi] \Bigg\},$$

клас $D_\varepsilon(\lambda)$ описує модель "ε - забруднення" випадкових полів:

$$D_\varepsilon(\lambda) = \Bigg\{ g(\lambda,\mu) \mid g(\lambda,\mu) = (1-\varepsilon)\, g_1(\lambda,\mu) + \varepsilon w(\lambda,\mu), \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda,\mu) d\mu = P_2(\lambda),\ \lambda \in [-\pi,\pi] \Bigg\},$$

спектральні щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$, $g_1(\lambda,\mu)$ задані і фіксовані і, крім того, щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$ обмежені.

Нехай $f_0(\lambda,\mu) \in D_v^u(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_\varepsilon(\lambda)$ такі спектральні щільності, що функції $h_f(f_0,g_0)$, $h_g(f_0,g_0)$, обчислені за формулами (2.40), (2.41), обмежені. З умови $0 \in \Delta_D(f_0,g_0)$ при $D = D_v^u(\lambda) \times D_\varepsilon(\lambda)$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left| A_+(\lambda,\mu)\, g_0(\lambda,\mu) + C_+^0(\lambda,\mu) \right| = \\ = (f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)) \left(\gamma_1(\lambda,\mu) + \gamma_2(\lambda,\mu) + \alpha_1^{-1}(\lambda) \right), \quad (2.47)$$

$$\left|A_+(\lambda,\mu) f_0(\lambda,\mu) - C_+^0(\lambda,\mu)\right| =$$
$$= (f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)) \left(\varphi(\lambda,\mu) + \alpha_2^{-1}(\lambda)\right), \quad (2.48)$$

де функція $\gamma_1(\lambda,\mu) \leq 0$ і $\gamma_1(\lambda,\mu) = 0$ при $f_0(\lambda,\mu) \geq v(\lambda,\mu)$; функція $\gamma_2(\lambda,\mu) \geq 0$ і $\gamma_2(\lambda,\mu) = 0$ при $f_0(\lambda,\mu) \geq u(\lambda,\mu)$; функція $\varphi(\lambda,\mu) \leq 0$ і $\varphi(\lambda,\mu) = 0$ при $g_0(\lambda,\mu) \geq (1-\varepsilon) g_1(\lambda,\mu)$.

Сформулюємо одержане твердження у вигляді теореми.

Теорема 2.4. *Нехай $f_0(\lambda,\mu) \in D_v^u(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_\varepsilon(\lambda)$, виконується умова мінімальності (2.6), умови (2.2) і функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, які обчислені за формулами (2.40), (2.41), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі в класі $D = D_v^u(\lambda) \times D_\varepsilon(\lambda)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_+\xi$, якщо вони задовольняють рівняння (2.47), (2.48), умови (2.44), (2.45) і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.34). Функція $h(f_0, g_0)$, що обчислена за формулою (2.7), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$.*

Наслідок 2.9. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda,\mu)$ зафіксована, щільність $f(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)$ задовольняє умову мінімальності (2.6), виконуються умови (2.2) і функція $h_g(f, g_0)$, обчислена за формулою (2.41), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятлива в класі D_ε при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_+\xi$, якщо*

$$g_0(\lambda,\mu) = \max\Big\{ (1-\varepsilon)\, g_1(\lambda,\mu),$$
$$\alpha_2(\lambda) \left|A_+(\lambda,\mu) f(\lambda,\mu) - C_+^0(\lambda,\mu)\right| - f(\lambda,\mu) \Big\} \quad (2.49)$$

і пара $(f(\lambda,\mu), g_0(\lambda,\mu))$ визначає розв'язок екстримальної задачі (2.34). Функція $h(f, g_0)$, обчислена за формулою (2.7) є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$.

Наслідок 2.10. *Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda,\mu) \in D_v^u$, виконується умова мінімальності (2.12), умови (2.2) та функція $h(f_0)$ обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятлива в класі D_f^0 при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_+\xi$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, якщо*

$$f_0(\lambda,\mu) = \max\left\{ v(\lambda,\mu), \min\left\{ u(\lambda,\mu), \alpha_1(\lambda) \left|C_+^0\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right)\right| \right\}\right\} \quad (2.50)$$

і функція $f_0(\lambda,\mu)$ *визначає розв'язок екстремальної задачі* (2.39) *при* $D_f = D_v^u$. *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.13) .

2.1.7. Мінімаксні оцінки за спостереженнями в усіх точках площини за винятком точок першої чверті

Розглянемо задачу лінійного середньоквадратичного оптимального оцінювання функціоналу $A_{++}\xi$ від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j),(k,j)\in\mathbb{Z}_+^2$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}_+^2$, за умови, що спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ поля $\xi(u,v)$ та поля $\eta(u,v)$ невідомі, а визначені лише класи можливих (допустимих) спектральних щільностей. У цьому разділі матимемо такі твердження, що є наслідком означень, тверджень теореми 2.2 та наслідків 2.4 – 2.5.

Лема 2.3. *Спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в* $D_f\times D_g$ *при оптимальнії лінійній екстраполяції функціонала* $A_{++}\xi$, *якщо коефіцієнти Фур'є функцій* $(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1}$, $f_0(\lambda,\mu)(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1}$, $f_0(\lambda,\mu)g_0(\lambda,\mu)(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1}$ *задають оператори* B^0, D^0, R^0, *за формулами* (2.28) – (2.30), *які визначають розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g}\left\langle Da,B^{-1}Da\right\rangle+\left\langle Ra,a\right\rangle=$$

$$=\left\langle D^0a,(B^0)^{-1}D^0a\right\rangle+\left\langle R^0a,a\right\rangle. \tag{2.51}$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0=h(f_0,g_0)$ *можна обчислити за формулою* (2.26) *за умови, що* $h(f_0,g_0)\in H_D$.

Лема 2.4. *Спектральна щільність однорідного випадкового поля* $\xi(k,j)$, *що допускає канонічний розклад рухомого середнього*

$$\xi(k,j)=\sum_{u=-\infty}^{k}\sum_{v=-\infty}^{j}d^0\left(k-u,j-v\right)\gamma\left(u,v\right), \tag{2.52}$$

де $\gamma\left(u,v\right)$ — *стандартне поле з некорельованими значеннями, буде найменш сприятливою в класі* D_f *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_{++}\xi$, *якщо спектральна щільність* $f^0\left(\lambda,\mu\right)$ *до-*

пускає канонічну факторизацію

$$f^0(\lambda,\mu)=\left|d^0(\lambda,\mu)\right|^2,\ \ d^0(\lambda,\mu)=\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}d^0(\lambda,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)},\qquad(2.53)$$

де $d^0(\lambda)=\left\{d^0(u,v):v=0,1,\dots\right\}$ *– розв'язок задачі на умовний екстремум*

$$\|A_{++}d\|^2\to\max,$$

$$f(\lambda,\mu)=\left|\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}d(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}\right|^2\in D_f.\qquad(2.54)$$

Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою (2.32) *та за умови, що* $h(f_0)\in H_{D_f}$.

Найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu),g_0(\lambda,\mu)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0=h(f_{0,}g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h;f,g)$ на множині $H_D\times D$. Нерівності сідлової точки виконуються, коли $h^0=h(f_0,g_0),h(f_0,g_0)\in H_D$ і (f_0,g_0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g)\in D_f\times D_g}\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right)=\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f_0,g_0\right),\qquad(2.55)$$

де

$$\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A_{++}\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)g_0(\lambda,\mu)+C_{++}\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)\right|^2}{\left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)^2}f(\lambda,\mu)\,d\lambda d\mu$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A_{++}\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)f_0(\lambda,\mu)-C_{++}\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)\right|^2}{\left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)^2}g(\lambda,\mu)\,d\lambda d\mu,$$

$$C_{++}(e^{i\lambda},e^{i\mu})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}c(k,j)e^{i(k\lambda+j\mu)},$$

$$A_{++}(e^{i\lambda},e^{i\mu})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a(k,j)e^{i(k\lambda+j\mu)}.$$

Задача на умовний екстремум (2.55) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(f,g)=-\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);\ f,g\right)+\delta\left((f,g)\left|D_f\times D_g\right.\right)\to\inf,\qquad(2.56)$$

де $\delta\left((f,g)\left|D_f\times D_g\right.\right)$ – індикаторна функція множини $D_f\times D_g$. Розв'язок задачі (2.56) визначається умовою $0\in\partial\Delta_D(f_0,g_0)$, де $\partial\Delta_D(f_0,g_0)$

– субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(f,g)$ в точці (f_0,g_0). Скористаємося даною умовою для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей для конкретних класів допустимих щільностей.

2.1.8. Найменш сприятливі щільності в класі $D_f^0 \times D_g^0$

Розглянемо задачу лінійного середньоквадратичного оптимального оцінювання функціоналу $A_{++}\xi$ від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j),(k,j)\in\mathbb{Z}_+^2$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}_+^2$, за умови, що спектральні щільності полів невідомі, а визначені лише класи допустимих спектральних щільностей, що мають вигляд $D_f^0\times D_g^0$, де

$$D_f^0=\left\{ f(\lambda,\mu) \middle| \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\mu)d\lambda d\mu \le P_1 \right\},$$

$$D_g^0=\left\{ g(\lambda,\mu) \middle| \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\lambda,\mu)d\lambda d\mu \le P_2 \right\}.$$

Нехай щільності $f_0(\lambda,\mu)\in D_f^0$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_g^0$ та нехай функції

$$h_f(f_0,g_0)=\frac{|A_{++}(\lambda,\mu)g_0(\lambda,\mu)+C_{++}(\lambda,\mu)|}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)}, \tag{2.57}$$

$$h_g(f_0,g_0)=\frac{|A_{++}(\lambda,\mu)f_0(\lambda,\mu)-C_{++}(\lambda,\mu)|}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)}, \tag{2.58}$$

обмежені. За цих умов функціонал $\Delta(h(f_0,g_0);f,g)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1\times L_1$. Тому

$$\partial\Delta_{D_f^0\times D_g^0}(f_0,g_0)=-\partial\Delta(h(f_0,g_0);f_0,g_0)+\partial\delta\left((f_0,g_0)\left|D_f^0\times D_g^0\right.\right).$$

З умови $0\in\partial\Delta_D(f_0,g_0)$ при $D=D_f^0\times D_g^0$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0\in D_f^0, g_0\in D_g^0$ задовольняють рівняння

$$\left|A_{++}(\lambda,\mu)g_0(\lambda,\mu)+C_{++}^0(\lambda,\mu)\right|=\alpha_1(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)), \tag{2.59}$$

$$\left|A_{++}(\lambda,\mu)f_0(\lambda,\mu)-C_{++}^0(\lambda,\mu)\right|=\alpha_2(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)), \tag{2.60}$$

константи $\alpha_1\ge 0$,$\alpha_2\ge 0$. Зауважимо, що $\alpha_1\ne 0$ при

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_0(\lambda,\mu)d\lambda d\mu=P_1, \tag{2.61}$$

та $\alpha_2 \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_0(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = P_2. \tag{2.62}$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 2.5. *Нехай щільності $f_0(\lambda, \mu) \in D_f^0$, $g_0(\lambda, \mu) \in D_g^0$ задовольняють умову мінімальності (2.25), виконуються умови (2.21), і функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, що визначені за формулами (2.57), (2.58), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda, \mu)$, $g_0(\lambda, \mu)$ найменш сприятливі в $D_f^0 \times D_g^0$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_{++}\xi$, якщо $f_0(\lambda, \mu)$, $g_0(\lambda, \mu)$ є розв'язком систем рівнянь (2.59), (2.60), задовольняють умови (2.61), (2.62), і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.51). Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2.26), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$.*

Наслідок 2.11. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda, \mu)$ відома, спектральна щільність $g_0(\lambda, \mu) \in D_g^0$, функція $f(\lambda, \mu)+g_0(\lambda, \mu)$ задовольняє умову мінімальності (2.25), виконуються умови (2.21) та функція $h_g(f, g_0)$, що обчислена за формулою (2.58), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda, \mu)$ найменш сприятлива в класі D_g^0 при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_{++}\xi$, якщо вона має вигляд*

$$g_0(\lambda, \mu) = \max\left\{ 0, \alpha_2^{-1}(\lambda) \left| A_{++}(\lambda, \mu) f(\lambda, \mu) - C_{++}(\lambda, \mu) \right| - f(\lambda, \mu) \right\}$$

і пара $f(\lambda, \mu), g_0(\lambda, \mu)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.51). Функція $h(f, g_0)$ обчислена за формулою (2.26), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 2.12. *Спектральна щільність однорідного випадкового поля, що допускає канонічний розклад рухомого середнього*

$$\xi(k, j) = \sum_{u=-\infty}^{k} \sum_{v=-\infty}^{j} d^0(k-u, j-v)\, \gamma(u, v) \tag{2.63}$$

де $d^0 = \left\{ d^0(u, v) : u, v = 0, 1, ... \right\}$ – власний елемент оператора A_{++}, що *відповідає найбільшому власному значенню v і задовольняє умові*

$$\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\left| d^0\left(u,v\right)\right|^2 = P_1,$$

найменш сприятлива в класі D_f^0 при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_{++}\xi$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}_+^2$. Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою (2.32). *Мінімаксне значення похибки оцінки функціоналу $A_{++}\xi$ дорівнює $P_1 v^2$.*

Приклад 2.4. Приклад, у якому досліджено оптимальну лінійну оцінку невідомого значення функціоналу $A\xi = \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} a(k,j)\xi(k,j)$ за спостереженнями поля $\xi(u,v)$, $(u,v)\in Z_2\backslash Z_+$ з спектральною щільністю, точне значення якої невідомо, але відомо, що вона належить класу:

$$D_f = \left\{ f(\lambda,\mu) : \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\mu)d\lambda d\mu \le P \right\}$$

розглянуто у додатках (Приклад 4.9). $\diamondsuit$

2.1.9. Найменш сприятливі щільності в класі $D = D_v^u \times D_\varepsilon$

Розглянемо задачу в класі спектральних щільностей $D = D_v^u \times D_\varepsilon$, де клас D_v^u описує "смугову" модель випадкових полів

$$D_v^u = \left\{ f\left(\lambda,\mu\right) \mid v\left(\lambda,\mu\right) \le f\left(\lambda,\mu\right) \le u\left(\lambda,\mu\right), \right.$$
$$\left. \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = P_1 \right\},$$

клас D_ε описує модель "ε - забруднення" випадкових полів:

$$D_\varepsilon = \left\{ g\left(\lambda,\mu\right) \mid g\left(\lambda,\mu\right) = \left(1-\varepsilon\right) g_1\left(\lambda,\mu\right) + \varepsilon w\left(\lambda,\mu\right), \right.$$
$$\left. \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = P_2 \right\},$$

спектральні щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$, $g_1(\lambda,\mu)$ задані і фіксовані і, крім того, щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$ обмежені.
Нехай $f_0(\lambda,\mu) \in D_v^u$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_\varepsilon$ такі спектральні щільності, що функції $h_f\left(f_0,g_0\right)$, $h_g\left(f_0,g_0\right)$, обчислені за формулами (2.57), (2.58), обмежені. З умови $0 \in \Delta_D\left(f_0,g_0\right)$ при $D = D_v^u \times D_\varepsilon$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left|A_{++}\left(\lambda,\mu\right)g_0\left(\lambda,\mu\right)+C_{++}^0\left(\lambda,\mu\right)\right| = \\ = \left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)\left(\gamma_1(\lambda,\mu)+\gamma_2(\lambda,\mu)+\alpha_1^{-1}(\lambda)\right), \quad (2.64)$$

$$\left|A_{++}\left(\lambda,\mu\right)f_0\left(\lambda,\mu\right)-C_{++}^0\left(\lambda,\mu\right)\right| = \\ = \left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)\left(\varphi(\lambda,\mu)+\alpha_2^{-1}(\lambda)\right), \quad (2.65)$$

де функція $\gamma_1\left(\lambda,\mu\right) \leq 0$ і $\gamma_1\left(\lambda,\mu\right) = 0$ при $f_0\left(\lambda,\mu\right) \geq v\left(\lambda,\mu\right)$; функція $\gamma_2\left(\lambda,\mu\right) \geq 0$ і $\gamma_2\left(\lambda,\mu\right) = 0$ при $f_0\left(\lambda,\mu\right) \geq u\left(\lambda,\mu\right)$; функція $\varphi\left(\lambda,\mu\right) \leq 0$ і $\varphi\left(\lambda,\mu\right) = 0$ при $g_0\left(\lambda,\mu\right) \geq (1-\varepsilon)g_1\left(\lambda,\mu\right)$.

Сформулюємо одержане твердження у вигляді теореми.

Теорема 2.6. *Нехай $f_0(\lambda,\mu) \in D_v^u$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_\varepsilon$ задовольняють умову мінімальності* (2.25)*, виконуються умови* (2.21)*, і функції $h_f\left(f_0,g_0\right)$, $h_g\left(f_0,g_0\right)$, що визначені за формулами* (2.57), (2.58)*, обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu), g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі в класі $D = D_v^u \times D_\varepsilon$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_{++}\xi$, якщо вони задовольняють рівняння* (2.64), (2.65)*, умови* (2.61), (2.62) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (2.51)*. Функція $h\left(f_0,g_0\right)$, обчислена за формулою* (2.26) *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$.*

Наслідок 2.13. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda,\mu)$ зафіксована, щільність $f(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)$ задовольняє умову мінімальності* (2.25)*, виконуються умови* (2.21)*, і функція $h_g\left(f,g_0\right)$ обчислена за формулою* (2.58)*, обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятлива в класі D_ε при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_{++}\xi$, якщо вона має вигляд*

$$g_0\left(\lambda,\mu\right) = \max\Big\{ \left(1-\varepsilon\right)\, g_1\left(\lambda,\mu\right), \\ \alpha_2(\lambda)\left|A_{++}\left(\lambda,\mu\right)f\left(\lambda,\mu\right)-C_{++}^0\left(\lambda,\mu\right)\right| - f\left(\lambda,\mu\right)\Big\}$$

і пара $(f(\lambda,\mu), g_0(\lambda,\mu))$ визначає розв'язок екстримальної задачі (2.51). *Функція $h(f, g_0)$, обчислена за формулою* (2.26), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$.*

Наслідок 2.14. *Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda,\mu) \in D_v^u$, задовольняє умову мінімальності* (2.31), *виконуються умови* (2.21) *та функція $h(f_0)$ обмежена. Спектральна щільність $f_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятлива в класі D_f^0 при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}_+^2$, якщо вона має вигляд*

$$f_0(\lambda,\mu) = \max\left\{ v(\lambda,\mu), \min\left\{ u(\lambda,\mu), \alpha_1(\lambda) \left|C^0\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right)\right|\right\}\right\} \quad (2.66)$$

і визначає розв'язок екстремальної задачі (2.51) *при $D_f = D_v^u$. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.32).

2.1.10. Найменш сприятливі щільності в класі $D = D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_{++}\xi$ в класі щільностей $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$, що описують моделі "$\varepsilon$–околу" випадкових полів у просторі $L_2 \times L_1$. Нехай множина щільностей

$$D_{2\varepsilon_1} = \left\{ f(\lambda,\mu) \left| \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(\lambda,\mu) - f_1(\lambda,\mu)\right|^2 d\lambda d\mu \le \varepsilon_1 \right.\right\}$$

описує "ε–окіл" у просторі L_2 заданої обмеженої спектральної щільності $f_1(\lambda,\mu)$, а множина щільностей

$$D_{1\varepsilon_2} = \left\{ g(\lambda,\mu) \left| \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|g(\lambda,\mu) - g_1(\lambda,\mu)\right| d\lambda d\mu \le \varepsilon_2 \right.\right\}$$

описує "ε–окіл" у просторі L_1 заданої обмеженої спектральної щільності $g_1(\lambda,\mu)$. Нехай $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{1\varepsilon_2}$ такі, що функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, що обчислені за формулами (2.57), (2.58), обмежені. З умови $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$ при $D = D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$ знаходимо рівняння

$$\begin{aligned} &\left|A_{++}\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) g_0(\lambda,\mu) + C^0\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right)\right| = \\ &\qquad = \left(f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)\right)^2 \left(f_0(\lambda,\mu) - f_1(\lambda,\mu)\right)\alpha_1, \quad (2.67) \end{aligned}$$

$$\left|A_{++}\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)f_0\left(\lambda,\mu\right)-C^0\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)\right|^2=$$
$$=\left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)\,\Psi(\lambda,\mu)\alpha_2, \quad (2.68)$$

де $\Psi(\lambda,\mu)\le 1$ та $\Psi(\lambda,\mu)=sign\left(g_0(\lambda,\mu)-g_1(\lambda,\mu)\right)$ при $g_0(\lambda,\mu)\ne g_1(\lambda,\mu)$, α_1, α_2– сталі величини. Рівняння (2.67), (2.68) разом з екстремальною умовою (2.51) та умовами нормування

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_0(\lambda,\mu)-f_1(\lambda,\mu)\right|^2d\lambda d\mu=\varepsilon_1, \quad (2.69)$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|g_0(\lambda,\mu)-g_1(\lambda,\mu)\right|d\lambda d\mu=\varepsilon_2, \quad (2.70)$$

визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{2\varepsilon_1}\times D_{1\varepsilon_2}$.

Справедливі такі теореми.

Теорема 2.7. *Нехай $f_0(\lambda,\mu)\in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_{1\varepsilon_2}$ задовольняють умову мінімальності (2.25), нехай виконуються умови (2.21) та нехай функції $h_f\left(f_0,g_0\right)$, $h_g\left(f_0,g_0\right)$, що обчислені за формулами (2.57), (2.58), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі в класі $D_{2\varepsilon_1}\times D_{1\varepsilon_2}$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A_{++}\xi$, якщо вони задовольняють рівняння (2.67), (2.68), умови нормування (2.69), (2.70) і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.51). Функція $h\left(f_0,g_0\right)$, що обчислена за формулою (2.26), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$.*

Наслідок 2.15. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda,\mu)$ зафіксована, щільність $g_0(\lambda,\mu)\in D_{1\varepsilon_2}$ щільність $f(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)$ задовольняє умову мінімальності (2.25), виконуються умови (2.21), і функція $h_g\left(f,g_0\right)$, що обчислена за формулою (2.58), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятлива в класі $D_{1\varepsilon_2}$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A_{++}\xi$, якщо якщо вона має вигляд*

$$g_0\left(\lambda,\mu\right)=\max\left\{g_1\left(\lambda,\mu\right),\alpha_2\left|A\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)f\left(\lambda,\mu\right)-C^0\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)\right|-f\left(\lambda,\mu\right)\right\}$$

і щільності $f(\lambda,\mu),g_0(\lambda,\mu)$визначають розв'язок екстремальної задачі (2.51). Функція $h\left(f,g_0\right)$, що обчислена за формулою (2.26), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціо-

нала $A_{++}\xi$.

Наслідок 2.16. *Нехай спектральна щільність* $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}$*, функція* $f_0^{-1}(\lambda,\mu)$ *інтегрована, виконуються умови* (2.21)*, і функція* $h(f_0)$*, обчислена за формулою* (2.32)*, обмежена. Спектральна щільність* $f_0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятлива в класі* $D_{2\varepsilon_1}$ *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A_{++}\xi$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)$ *при* $(u,v) \in \mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}_+^2$*, якщо виконується співвідношення*

$$\left|C^0\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)\right|^2 = f_0^2\left(\lambda,\mu\right)\left(f_0\left(\lambda,\mu\right) - f_1\left(\lambda,\mu\right)\right)\alpha_1$$

і функція $f_0(\lambda,\mu)$ *визначає розв'язок екстремальної задачі* (2.51)*. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.32).

2.2. Екстраполяція випадкових полів неперервного аргументу

2.2.1. Постановка задач

Нехай однорідне випадкове поле $\xi\left(u,v\right)+\eta\left(u,v\right)$, яке уявляє собою суму однорідних неперервних у середньоквадратичному полів $\xi\left(u,v\right)$ та $\eta\left(u,v\right)$, спостерігається в усіх точках площини за винятком деякої області K, яка уявляє собою півплощину або чверть півплощини. Задача лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \int\int_{(s,\,t)\in K} a(s,t)\xi(s,t)dsdt$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi\left(u,v\right),\,\left(u,v\right)\in K$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash K$ полягає у знаходженні такої оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала з класу лінійних оцінок, щоб мінімізувати величину середньоквадратичної похибки $\Delta = M\left|A\xi-\hat{A}\xi\right|^2$.

У випадку відомих спектральних щільностей процесів або полів найбільш поширеним методом знаходження оптимальних екстраполяційних оцінок є метод, який базується на канонічній факторизації спектральних щільностей [148]– [152], [153], [166], [167], [220]– [223] та пошуку спектральної характеристики оцінки як граничного значення деякої аналітичної функції, що задовольняє певним властивостям.

У цьому розділі, аналогічно тому як це зроблено для поля дискретних аргументів, знайдемо оптимальні оцінки методом А.М. Колмогорова за умови відомих спектральних щільностей полів та мінімаксні оцінки за умови спектральної невизначеності полів. При цьому ми не будемо вимагати канонічної факторизації спектральної щільності.

2.2.2. Оптимальні оцінки за спостереженнями у півплощині

Нехай випадкове поле $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$ спостерігається при $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, де $\xi(u,v), \eta(u,v)$ – середньоквадратично неперервні однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля, кореляційна структура яких визначається додатньо визначеною матрицею спектральних щільностей (1.1). Нехай спектральна щільність $f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu) = f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + 2Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu) + f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$ задовольняє умові мінімальності, яку у цьому випадку доцільно записати у вигляді

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda,\mu)|^2}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} d\mu < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.71}$$

де $\gamma(\lambda,\mu)$ – деяка функція експоненціального типу

$$\gamma(\lambda,\mu) = \int\limits_0^{\infty} \alpha(\lambda,t)\, e^{it\mu} dt.$$

Розглянемо задачу лінійного середньоквадратичного оптимального оцінювання функціонала

$$A_+\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} a(s,t)\, \xi(s,t)\, dtds$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(s,t), s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$, при умові, що спектральні щільності $f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)$, $f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$ відомі. Для того, щоб функціонал $A_+\xi$ мав скінченний другий момент припустимо, що функція $a(s,t)$ задовольняє умови

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} |\, a(s,t)\,|\, dt\, ds < \infty, \quad \int\limits_0^{\infty} t\, |a(\lambda,t)|^2\, dt < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.72}$$

де

$$a(\lambda,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(s,t)\, e^{is\lambda} ds.$$

Тоді оператор $A_+(\lambda)$ у просторі $L_2[0,\infty)$, який задається співвідношенням

$$(A_+(\lambda)d)(t) = \int\limits_0^\infty a(\lambda, t+v)\, d(v)\, dv, \tag{2.73}$$

симетричний і компактний для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$. Лінійну оцінку $\hat{A}_+\xi$ функціонала $A_+\xi$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, як завжди, шукаємо у вигляді

$$\hat{A}_+\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h\ (\lambda,\mu)\, Z_\zeta(d\lambda, d\mu),$$

де $Z_\zeta(\Delta_1,\Delta_2)$ – ортогональна випадкова міра поля $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$, $h(\lambda,\mu)$ – спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_+\xi$, яка належить підпростору $L_2^-(f_{\zeta\zeta})$ в просторі $L_2(f_{\zeta\zeta})$, що породжений функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v) \in \mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Отже, задача знаходження оптимальної оцінки зводиться до знаходження спектральної характеристики $h(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціоналу $A_+\xi$, яка мінімізує величину середньоквадратичної похибки. Використавши властивості ортогонального проектування у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega, F, P)$ випадкових величин другого порядку, одержимо

$$h(\lambda,\mu) = \frac{A_+(\lambda,\mu)(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu))}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} - \frac{C_+(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} \tag{2.74}$$

$$\Delta(h, f_{\xi\xi}, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta}) =$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg(|A_+(\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu)|^2 f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) - 2h(\lambda,\mu)\overline{A_+(\lambda,\mu)}f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)$$

$$+2|h(\lambda,\mu)|^2 Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu) + |h(\lambda,\mu)|^2 f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)\Bigg)d\lambda d\mu, \tag{2.75}$$

де

$$C_+(\lambda,\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^\infty c(s,t)\, e^{i(s\lambda+t\mu)}dtds = \int\limits_0^\infty c(\lambda,t)\, e^{it\mu}\, dt,$$

$$A_+(\lambda,\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^\infty a(s,t)\, e^{i(s\lambda+t\mu)}dtds = \int\limits_0^\infty a(\lambda,t)\, e^{it\mu}\, dt,$$

$$a(\lambda,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(s,t)\ e^{is\lambda}ds,$$

$$c(\lambda, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(s,t)\, e^{is\lambda} ds,$$

функція $c(\lambda, t)$ знаходиться з рівняння

$$c(\lambda, t) = a(\lambda) D_T(\lambda) B_T^{-1}(\lambda),$$

яке є справедливим для $(\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$; $B_T(\lambda)$, $D_T(\lambda)$ – оператори у просторі $L_2[0, \infty)$, які для $0 \le s \le \infty$ визначаються співвідношеннями:

$$(B(\lambda)c(\lambda))(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-is\mu} \left(\int\limits_{0}^{\infty} c(\lambda, v)\, e^{iv\mu} dv \right) \frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)} d\mu,$$

$$(D(\lambda)c(\lambda))(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-is\mu} \left(\int\limits_{0}^{\infty} c(\lambda, v)\, e^{iv\mu} dv \right) \frac{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)} d\mu.$$

Сформулюємо одержані результати у вигляді теореми.

Теорема 2.8. *Нехай випадкове поле $\zeta(u, v) = \xi(u, v) + \eta(u, v)$, де $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ – середньоквадратично неперервні однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля, спостерігається в точках множини $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Нехай виконуються умова мінімільності (2.71) та умови (2.72). Спектральну характеристику $h(\lambda, \mu)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta})$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень поля $\xi(s, t)$ за даними спостережень поля $\xi(u, v) + \eta(u, v)$ при $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ можна обчислити за формулами (2.74), (2.75).*

Наслідок 2.17. *Нехай $\xi(s, t), \eta(s, t)$ - некорельовані однорідні випадкові поля, що мають спектральні щільності $f(\lambda, \mu), g(\lambda, \mu)$, які задовольняють умову мінімільності*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda, \mu)|^2}{f(\lambda, \mu) + g(\lambda, \mu)} d\mu < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.76}$$

Нехай виконуються умови (2.72). Спектральну характеристику $h(f, g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень поля $\xi(s, t)$ за даними спостережень поля $\xi(u, v) + \eta(u, v)$ при $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ можна обчи-

слити за формулами

$$h\left(f,g\right)=\frac{A_{+}\left(\lambda,\mu\right)f\left(\lambda,\mu\right)-C_{+}\left(\lambda,\mu\right)}{f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)}=$$

$$=A_{+}\left(\lambda,\mu\right)-\frac{A_{+}\left(\lambda,\mu\right)g\left(\lambda,\mu\right)+C_{+}\left(\lambda,\mu\right)}{f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)},\qquad(2.77)$$

$$\Delta\left(f,g\right)=$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|A_{+}\left(\lambda,\mu\right)g\left(\lambda,\mu\right)+C_{+}\left(\lambda,\mu\right)\right|^{2}}{\left(f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)\right)^{2}}f\left(\lambda,\mu\right)\,d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|A_{+}\left(\lambda,\mu\right)f\left(\lambda,\mu\right)-C_{+}\left(\lambda,\mu\right)\right|^{2}}{\left(f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)\right)^{2}}g\left(\lambda,\mu\right)\,d\lambda\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}(B\left(\lambda\right)c(\lambda))(t)\bar{c}(\lambda,t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}(R(\lambda)a(\lambda))(t)\bar{a}(\lambda,t)dt\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\langle B(\lambda)\,c(\lambda),\ c(\lambda)\rangle+\langle R(\lambda)\,a(\lambda),\ a(\lambda)\rangle\right]d\lambda,\qquad(2.78)$$

де

$$C_{+}\left(\lambda,\mu\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}c\left(s,t\right)\,e^{i(s\lambda+t\mu)}dtds=\int_{0}^{\infty}c\left(\lambda,t\right)e^{it\mu}dt,$$

$$A_{+}\left(\lambda,\mu\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}a\left(s,t\right)e^{i(s\lambda+t\mu)}dtds=\int_{0}^{\infty}a\left(\lambda,t\right)e^{it\mu}dt,$$

$$a\left(\lambda,t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}a\left(s,t\right)\,e^{is\lambda}ds,\quad c\left(\lambda,t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}c\left(s,t\right)\,e^{is\lambda}ds,$$

$$c(\lambda)=B^{-1}(\lambda)D(\lambda)a(\lambda),$$

$$\langle a(\lambda),c(\lambda)\rangle=\int_{0}^{\infty}a(\lambda,t)\,\bar{c}(\lambda,t)dt$$

– скалярний добуток у просторі $L_2[0,\infty)$, $B(\lambda)$, $D(\lambda)$, $R(\lambda)$ *– оператори у просторі* $L_2[0,\infty)$, *які для* $0\leq s\leq\infty$ *визначаються співвідношеннями:*

$$\left(B(\lambda)c(\lambda)\right)(s)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\left(\int_{0}^{\infty}c\left(\lambda,v\right)e^{iv\mu}dv\right)\frac{1}{f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)}d\mu,\quad(2.79)$$

$$(D(\lambda)c(\lambda))\,(s) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-is\mu} \left(\int\limits_{0}^{\infty} c\,(\lambda, v)\, e^{iv\mu} dv \right) \frac{f\,(\lambda, \mu)}{f\,(\lambda, \mu) + g\,(\lambda, \mu)} d\mu, \quad (2.80)$$

$$(R(\lambda)c(\lambda))\,(s) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-is\mu} \left(\int\limits_{0}^{\infty} c\,(\lambda, v)\, e^{iv\mu} dv \right) \frac{f\,(\lambda, \mu)\, g\,(\lambda, \mu)}{f\,(\lambda, \mu) + g\,(\lambda, \mu)} d\mu. \quad (2.81)$$

Наслідок 2.18. *Нехай $\xi(s,t)$ – однорідне випадкове поле, яке має спектральну щільність $f(\lambda,\mu)$, що задовольняє умову мінімільності* (2.76) *при $g(\lambda,\mu) = 0$. Нехай виконуються умови* (2.72)*. Тоді, якщо поле $\xi(u,v)$ спостерігається без шуму, то спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(s,t)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ можна обчислити за формулами*

$$h(f) = A_+\,(\lambda, \mu) - C_+\,(\lambda, \mu)\, f^{-1}(\lambda, \mu) =$$

$$= A_+\,(\lambda, \mu) - r\,\,(\lambda, \mu)\, d^{-1}\,(\lambda, \mu)\,, \quad (2.82)$$

$$\Delta(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| C_+\,(\lambda, \mu) \right|^2 f^{-1}(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle B^{-1}(\lambda) a(\lambda), a(\lambda) \right\rangle d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\| A_+(\lambda) d(\lambda) \right\|^2 d\lambda, \quad (2.83)$$

де

$$C_+(\lambda, \mu) = \int\limits_{0}^{\infty} (B^{-1}(\lambda) a(\lambda))(t)\, e^{it\mu} dt,$$

$$r\,(\lambda, \mu) = \int\limits_{0}^{\infty} (A_+(\lambda) d(\lambda))(t) e^{it\mu} dt,$$

оператор $A_+(\lambda)$ у просторі $L_2[0,\infty)$ для $0 \le s \le \infty$ визначається співвідношенням (2.73)*, оператор $B(\lambda)$ у просторі $L_2[0,\infty)$ визначається* *співвідношенням*

$$(B(\lambda)c(\lambda))\,(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\left(\int\limits_{0}^{\infty}c\,(\lambda,v)\,e^{iv\mu}dv\right)\frac{1}{f\,(\lambda,\mu)}d\mu.$$

функція $d(\lambda)=\{d(\lambda,v):v\in\mathbb{R}_+\}$ *визначає канонічну факторизацію спектральної щільності*

$$f\,(\lambda,\mu)=\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}d\,(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}dvdu\right|^2=\left|\int\limits_{0}^{\infty}d(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}dv\right|^2,$$

$$d(\lambda,v)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d(u,v)\,e^{-iu\lambda}du.$$

Наслідок 2.19. *Нехай* $\xi(s,t)$, $\eta(s,t)$ *– некорельовані однорідні випадкові поля, що мають спектральні щільності* $f\,(\lambda,\mu)=f_1\,(\lambda)\,f_2\,(\mu)$, $g\,(\lambda,\mu)=f_1\,(\lambda)\,g_2\,(\mu)$, *які задовольняють умову мінімальності* (2.76). *Нехай виконуються умови* (2.72). *Спектральну характеристику* $h(f,g)$ *та величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(f,g)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_+\xi$ *від невідомих значень поля* $\xi(s,t)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ *при* $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ *можна обчислити за формулами*

$$h(f,g)=\frac{A_+(\lambda,\mu)f_1(\lambda)g_2(\mu)-C_+(\lambda,\mu)}{f_1(\lambda)(f_2(\mu)+g_2(\mu))}=$$

$$=A_+(\lambda,\mu)-\frac{A_+(\lambda,\mu)f_1(\lambda)g_2(\mu)+C_+(\lambda,\mu)}{f_1(\lambda)(f_2(\mu)+g_2(\mu))},$$

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda)\left[\left\langle D\,a(\lambda),B^{-1}Da(\lambda)\right\rangle+\left\langle R\,a(\lambda),a(\lambda)\right\rangle\right]d\lambda,$$

де B, D, R *– оператори у просторі* $L_2[0,\infty)$, *які визначаються співвідношеннями:*

$$(Bc)\,(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\Big(\int\limits_{0}^{\infty}c\,(v)\,e^{iv\mu}dv\Big)\frac{1}{f_2\,(\mu)+g_2\,(\mu)}d\mu, \qquad (2.84)$$

$$(Dc)\,(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-is\mu}\Big(\int\limits_{0}^{\infty}c\,(v)\,e^{iv\mu}dv\Big)\frac{f_2\,(\mu)}{f_2\,(\mu)+g_2\,(\mu)}d\mu, \qquad (2.85)$$

$$(Rc)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-is\mu}\left(\int\limits_{0}^{\infty} c(v)\, e^{iv\mu} dv\right)\frac{f_2(\mu)\, g_2(\mu)}{f_2(\mu) + g_2(\mu)} d\mu. \qquad (2.86)$$

Якщо однорідне випадкове поле $\xi(s,t)$ спостерігається без шуму, тобто $g(\lambda,\mu) = 0$, виконуються умови (2.76), (2.72), то спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(s,t)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ можна обчислити за формулами

$$h(f) = A_+(\lambda,\mu) - C_+(\lambda,\mu)\frac{1}{f_2(\mu)} =$$

$$= A_+(\lambda,\mu) - r(\lambda,\mu)\, d_2^{-1}(\mu),$$

$$\Delta(f) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |C_+(\lambda,\mu)|^2 f_1^{-1}(\lambda) f_2^{-1}(\mu) d\lambda d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\left\langle B^{-1}a(\lambda), a(\lambda)\right\rangle d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\left\| A(\lambda) d_2\right\|^2 d\lambda,$$

де

$$C_+(\lambda,\mu) = \int\limits_{0}^{\infty} (B^{-1}(\lambda)a(\lambda))(t) e^{it\mu} dt,$$

$$r(\lambda,\mu) = \int\limits_{0}^{\infty} (A_+(\lambda) d_2)(t)\, e^{it\mu} dt,$$

оператор $A(\lambda)$ у просторі $L_2[0,\infty)$ для $0 \le s \le \infty$ визначається співвідношенням (2.73), оператор B визначається співвідношенням

$$(Bc)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-is\mu}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(v)\, e^{iv\mu} dv\right)\frac{1}{f_2(\lambda,\mu)} d\mu.$$

$d_2 = \{d(v) : v \in \mathbb{R}\}$ визначає канонічну факторизацію спектральної щільності

$$f(\lambda,\mu) = f_1(\lambda)\left|\int\limits_{0}^{\infty} d(v)\, e^{-iv\mu} dv\right|^2.$$

2.2.3. Оптимальні лінійні оцінки за спостереженнями у трьох чвертях площини

Розглянемо задачу лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання функціоналу

$$A_{++}\xi = \int_0^\infty \int_0^\infty a(t,s)\,\xi(t,s)\,dtds$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(t,s)\,, t \geq 0, s \geq 0$ за даними спостережень поля $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$ в точках $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_+^2$, де $\xi(u,v)$, $\eta(u,v)$ – середньоквадратично неперервні однорідні та однорідно зв'язані випадкові поля. Нехай спектральна щільність $f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)$ задовольняє умову мінімальності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda,\ \mu)|^2}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} d\lambda\, d\mu < \infty \tag{2.87}$$

для деякої функції експоненціального типу

$$\gamma(\lambda,\mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha(t,s)\ e^{i(t\lambda+s\mu)} dt\, ds, \quad \lambda \in (-\infty,\infty)\,, \quad \mu \in (-\infty,\infty)\,.$$

Будемо вважати, що функція $a(t,s)$, яка визначає функціонал $A_{++}\xi$, задовольняє умови

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\,a(t,s)\,|\ dt\,ds < \infty, \quad \int_0^\infty \int_0^\infty ts\,|\,a(t,s)|^2\,dtds < \infty. \tag{2.88}$$

За цих умов функціонал $A_{++}\xi$ має скінченний другий момент і оператор A_{++} у просторі $L_{2,2}([0,\infty) \times [0,\infty))$ функцій двох змінних, інтегрованих у квадраті на $[0,\infty) \times [0,\infty)$, який задається співвідношенням

$$(A_{++}d)(t,s) = \int_0^\infty \int_0^\infty a(t+u, s+v)\,d(u,v)\,dudv, \tag{2.89}$$

симетричний і компактний.

Лінійна оцінка $\hat{A}_{++}\xi$ функціоналу $A_{++}\xi$ за даними спостережень поля $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_+^2$ має вигляд

$$\hat{A}_{++}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h\ (\lambda,\mu)\ Z_\zeta\,(d\lambda, d\mu)\,,$$

де спектральна характеристика оцінки $h(\lambda,\mu)$ належить підпростору $L_2^-(f_\zeta)$ в просторі $L_2(f_\zeta)$, породженому функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_+^2$. Якщо щільності відомі, то, використавши властивості ортогонального проектування у гільбертовому просторі $H=L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ випадкових величин другого порядку, одержимо

$$h(\lambda,\mu)=\frac{A_{++}(\lambda,\mu)(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\xi\eta}(\lambda,\mu))}{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+2Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)}-$$

$$-\frac{C_{++}(\lambda,\mu)}{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+2Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)},\tag{2.90}$$

$$\Delta(h,f_{\xi\xi},f_{\eta\eta},f_{\xi\eta})=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\left|A_+(\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu)\right|^2f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)-2h(\lambda,\mu)\overline{A_+(\lambda,\mu)}f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+$$

$$+2\left|h(\lambda,\mu)\right|^2Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+\left|h(\lambda,\mu)\right|^2f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)\Bigg)d\lambda d\mu,\tag{2.91}$$

де

$$C_{++}(\lambda,\mu)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty c\,(t,s)\,e^{i(t\lambda+s\mu)}dt\,ds,$$

$$A_{++}(\lambda,\mu)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty a\,(t,s)\,e^{i(t\lambda+s\mu)}dt\,ds,$$

$$c\,(t,s)=\left(B^{-1}Da\right)(t,s)\,,$$

B,D – оператори у просторі $L_2([0,\infty)\times[0,\infty))$, які визначаються співвідношеннями

$$(Bc)\,(t,s)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t\lambda+s\mu)}\left(\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty c(u,v)e^{i(u\lambda+v\mu)}dudv\right)\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}d\lambda d\mu,$$

$$(Dc)\,(t,s)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t\lambda+s\mu)}\left(\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty c(u,v)e^{i(u\lambda+v\mu)}du\ dv\right)\frac{f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}d\lambda\,d\mu,$$

$$0\le t\le\infty,\quad 0\le s\le\infty.$$

Отже справджуються такі твердження.

Теорема 2.9. *Нехай випадкове поле* $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$, *де* $\xi(u,v)$,

$\eta(u,v)$ – середньоквадратично неперервні однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля, спостерігається в точках множини $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2_+$. Нехай спектральна щільність $f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)$ задовольняє умову мінімальності (2.87). Нехай виконуються умови (2.88). Спектральну характеристику $h\left(\lambda,\mu\right)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h;f_{\xi\xi},f_{\eta\eta},f_{\xi\eta})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала A_{++} від невідомих значень поля $\xi\left(s,t\right)$ за даними спостережень поля $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в точках $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}^2_+$ можна обчислити за формулами (2.90), (2.91).

Наслідок 2.20. *Нехай $\xi\left(s,t\right)$, $\eta\left(s,t\right)$ - некорельовані однорідні випадкові поля, що мають спектральні щільності $f\left(\lambda,\mu\right)$, $g\left(\lambda,\mu\right)$, які задовольняють умову мінімальності*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\gamma\left(\lambda,\,\mu\right)\right|^{2}}{f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)}d\lambda\,d\mu<\infty \tag{2.92}$$

Нехай виконуються умови (2.88). Спектральну характеристику $h\left(f,g\right)$ величину середньоквадратичної похибки $\Delta\left(f,g\right)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень поля $\xi\left(s,t\right)$ за даними спостережень поля $\xi\left(u,v\right)+\eta\left(u,v\right)$ при $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}^2_+$ можна обчислити за формулами

$$h\left(f,g\right)=\frac{A_{++}\left(\lambda,\mu\right)f\left(\lambda,\mu\right)-C_{++}\left(\lambda,\mu\right)}{f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)}=$$

$$=A_{++}\left(\lambda,\mu\right)-\frac{A_{++}\left(\lambda,\mu\right)g\left(\lambda,\mu\right)+C_{++}\left(\lambda,\mu\right)}{f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)} \tag{2.93}$$

$$\Delta\left(f,g\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\,A_{++}\left(\lambda,\mu\right)g\left(\lambda,\mu\right)+C_{++}\left(\lambda,\mu\right)\right|^{2}}{\left(f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)\right)^{2}}f\left(\lambda,\mu\right)\,d\lambda\,d\mu+$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\,A_{++}\left(\lambda,\mu\right)f\left(\lambda,\mu\right)-C_{++}\left(\lambda,\mu\right)\right|^{2}}{\left(f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)\right)^{2}}g\left(\lambda,\mu\right)d\lambda d\mu=$$
$$=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left(Bc\right)\left(t,s\right)\bar{c}\left(t,s\right)dtds+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left(Ra\right)\left(t,s\right)\bar{a}\left(t,s\right)dt\,ds=$$
$$=\left\langle Bc,c\right\rangle+\left\langle Ra,a\right\rangle, \tag{2.94}$$

де

$$c\;(t,s)=\left(B^{-1}Da\right)\;(t,s)\,,$$

$$C_{++}(\lambda,\mu)=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}c(t,s)\,e^{i(t\lambda+s\mu)}dt\,ds,$$

$$A_{++}(\lambda,\mu)=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}a(t,s)\,e^{i(t\lambda+s\mu)}dt\,ds,$$

$\langle a,c\rangle$ – *скалярний добуток у просторі* $L_{2,2}([0,\infty)\times[0,\infty))$:

$$\langle a,c\rangle=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}a(t,s)\,\bar{c}(t,s)\;dt\,ds,$$

B,D,R – *оператори у просторі* $L_2([0,\infty)\times[0,\infty))$, *які визначаються співвідношеннями*

$$(Bc)(t,s)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t\lambda+s\mu)}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}c(u,v)e^{i(u\lambda+v\mu)}du\,dv\right)\frac{1}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}\,d\lambda\,d\mu, \quad (2.95)$$

$$(Dc)(t,s)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t\lambda+s\mu)}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}c(u,v)e^{i(u\lambda+v\mu)}du\,dv\right)\frac{f(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}\,d\lambda d\mu, \quad (2.96)$$

$$(Rc)(t,s)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t\lambda+s\mu)}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}c(u,v)e^{i(u\lambda+v\mu)}du\,dv\right)\frac{f(\lambda,\mu)\,g(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}d\lambda\,d\mu, \quad (2.97)$$

$$0\le t\le\infty,\quad 0\le s\le\infty.$$

Наслідок 2.21. *Нехай* $\xi(s,t)$ *- однорідне випадкове поле, яке має спектральну щільність* $f(\lambda,\mu)$, *що задовольняє умову мінімальності* (2.92) *при* $g(\lambda,\mu)=0$. *Нехай виконуються умови* (2.88). *Спектральну характеристику* $h(f)$ *та середньоквадратичну похибку* $\Delta(f)$ *оптимальної* *оцінки функціонала* $A\xi$ *від невідомих значень однорідного поля* $\xi(s,t)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)$ *при* $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}^2_+$ *можна обчислити за формулами*

$$h(f)=A_{++}(\lambda,\mu)-C_{++}(\lambda,\mu)\,f^{-1}(\lambda,\mu)=$$
$$=A_{++}(\lambda,\mu)-(A_{++}d)\;(\lambda,\mu)\,d^{-1}(\lambda,\mu)\,, \tag{2.98}$$
$$\Delta(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\,C_{++}(\lambda,\mu)\,|^2\,f^{-1}(\lambda,\mu)\;d\lambda\,d\mu=$$
$$=\left\langle B^{-1}a,a\right\rangle=\|\,A_{++}d\,\|^2\,, \tag{2.99}$$

де

$$C_{++}(\lambda,\mu)=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\left(B^{-1}a\right)\;(t,s)\;e^{i(s\lambda+t\mu)}dt\,ds,$$
$$(A_{++}d)\,(\lambda,\mu)=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}(A_{++}d)\;(t,s)\;e^{i(s\lambda+t\mu)}dt\,ds,$$

$d=\{d(u,v):u\geq 0,v\geq 0\}$ *визначає канонічну факторизацію спектральної щільності*

$$f(\lambda,\mu)=|d(\lambda,\mu)|^2\,,\quad d(\lambda,\mu)=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}d(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}dudv,$$

A,B *– оператори у просторі* $L_2\left([0,\infty)\times[0,\infty)\right)$*, які визначаються співвідношенням* (2.89) *та співвідношенням*

$$(Ba)\,(t,s)=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t\lambda+s\mu)}\left(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}a(u,v)e^{i(u\lambda+v\mu)}du\,dv\right)\frac{1}{f(\lambda,\mu)}\,d\lambda\,d\mu,$$
$$0\leq t\leq\infty,\quad 0\leq s\leq\infty.$$

2.2.4. Оптимальні оцінки за дискретними спостереженнями по одному аргументу

Розглянемо задачу оцінювання лінійного функціонала

$$A\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a(t,j)\,\xi(t,j)\,dt$$

за спостереженнями поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в точках $\{(u,v):u\in\mathbb{R},v\in\{\ldots,-n,-(n-1),\ldots,-1\}\}$. Для того, щоб функціонал $A\xi$ мав скінченний другий момент припустимо, що функція $a\,(s,t)$, задовольняє умови

$$\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\,a\,(t,j)|\,dt<\infty,\quad \sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(j{+}1)\,|a\,(t,j)|^2\,dt<\infty,\quad \lambda\in\mathbb{R},\tag{2.100}$$

де

$$a\,(\lambda,j)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}a\,(j,t)\;e^{it\lambda}dt.$$

За цих умов оператор $A(\lambda)$ у просторі ℓ_2 послідовностей $d=\{d(v):v=0,1,...\}$, який задається співвідношенням

$$(A(\lambda)d)\,(j)=\sum_{v=0}^{\infty}a\,(\lambda,j+v)\,d\,(v)\,,\tag{2.101}$$

симетричний і компактний для всіх $\lambda\in\mathbb{R}$. Припустимо, що виконується умова мінімальності

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{F_\xi(0;\lambda,\mu)+F_\eta(0;\lambda,\mu)}d\mu<\infty,\quad \lambda\in\mathbb{R},\tag{2.102}$$

де

$$F_\xi(s,\lambda,\mu)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{is(\mu+2\pi j)}f_\xi(\lambda,\mu+2\pi j),$$

$$F_\eta(s,\lambda,\mu)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{is(\mu+2\pi k)}f_\eta(\lambda,\mu+2\pi j).$$

Із геометрії гільбертового простору випливає, що оптимальна спектральна характеристика має вигляд

$$h(f_\xi,f_\eta)=\frac{A(e^{i\lambda},e^{i\mu})F_\xi(0,\lambda,\mu)-C(e^{i\lambda},e^{i\mu})}{F_\xi(0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,\lambda,\mu)}=$$

$$=A(e^{i\lambda},e^{i\mu})-\frac{A(e^{i\lambda},e^{i\mu})F_\eta(0,\lambda,\mu)+C(e^{i\lambda},e^{i\mu})}{F_\xi(0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,\lambda,\mu)}\tag{2.103}$$

При цьому середньоквадратична похибка набуває вигляду

$$\Delta(h,f_\xi,f_\eta)=$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\mid A(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) F_\eta(0,0,\lambda,\mu) + C(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) \mid^2}{(\ F_\xi(0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,\lambda,\mu)\ )^2} F_\xi(0,\lambda,\mu) d\lambda d\mu +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\mid A(e^{i\lambda}, e^{i\lambda}) F_\xi(0,\lambda,\mu) - C(e^{i\lambda}, e^{i\lambda}) \mid^2}{(\ F_\xi(0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,\lambda,\mu)\ )^2} F_\eta(0,\lambda,\mu) d\lambda d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\langle B(\lambda)\, \boldsymbol{c}(\lambda), \boldsymbol{c}(\lambda)\rangle + \langle R(\lambda)\, \boldsymbol{a}(\lambda), \boldsymbol{a}(\lambda)\rangle) d\lambda, \qquad (2.104)$$

де

$$\boldsymbol{a}(\lambda) = \{a(\lambda, j) : j = 0, 1, 2, ...\}, \quad \boldsymbol{c}(\lambda) = B(\lambda)^{-1} D(\lambda) \boldsymbol{a},$$

$$\langle\ \boldsymbol{c}(\lambda), \boldsymbol{a}(\lambda)\ \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c(\lambda, j) a(\lambda, j)$$

– скалярний добуток у просторі ℓ_2,

$$C(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(t,j) e^{it\lambda} e^{ij\mu} dt,$$

$$A(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(t,j) e^{it\lambda} e^{ij\mu} dt,$$

оператори $B(\lambda), D(\lambda), R(\lambda)$ у просторі ℓ_2 визначаються матрицями з елементами

$$B(\lambda)(k,j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{F_\xi(0;\lambda,\mu) + F_\eta(0;\lambda,\mu)} e^{i(j-k)\mu} d\mu, \qquad (2.105)$$

$$D(\lambda)(k,j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{F_\xi(0;\lambda,\mu)}{F_\xi(0;\lambda,\mu) + F_\eta(0;\lambda,\mu)} e^{i(j-k)\mu} d\mu, \qquad (2.106)$$

$$R(\lambda)(k,j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{F_\xi(0;\lambda,\mu) F_\eta(0;\lambda,\mu)}{F_\xi(0;\lambda,\mu) + F_\eta(0;\lambda,\mu)} e^{i(j-k)\mu} d\mu. \qquad (2.107)$$

У тому випадку, коли поле, за значеннями якого будується лінійна оцінка функціонала

$$A\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a\,(t,j)\, \xi\,(t,j)\, dt,$$

спостерігається без шуму, ми одержуємо иакі формули

$$h(f_\xi) = A\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) - C\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) F_\xi^{-1}(0;\lambda,\mu) =$$

$$= A\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) - r\,\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) d^{-1}\left(\lambda, \mu\right), \tag{2.108}$$

$$\Delta(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|C\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right)\right|^2 F_{\xi}^{-1}(0; \lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle B^{-1}(\lambda) a(\lambda),\ a(\lambda)\right\rangle d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\|A(\lambda)\, d(\lambda)\right\|^2 d\lambda, \tag{2.109}$$

$$C(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \sum_{j=0}^{\infty} (B^{-1}(\lambda)\boldsymbol{a}(\lambda))\,(j)\, e^{ij\mu},$$

$$r\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} (A(\lambda)\boldsymbol{d}(\lambda))\,(j)\, e^{ij\mu},$$

$A(\lambda)$, $B(\lambda)$ – оператори у просторі ℓ_2, оператор $A(\lambda)$ визначається співвідношенням (2.101), оператор $B(\lambda)$ визначається співвідношенням

$$\left(B(\lambda)\right)(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i((j-k)\mu)} \frac{1}{F_{\xi}\left(0; \lambda, \mu\right)}\, d\mu,$$

функція $d(\lambda) = \{d(\lambda, j) : j = 0, 1, \dots\}$ визначає канонічну факторизацію спектральної щільності

$$F_{\xi}\left(0; \lambda, \mu\right) = \left|\sum_{j=0}^{\infty} d(\lambda, j)\, e^{-ij\mu}\right|^2.$$

Отже справджується така теорема.

Теорема 2.10. *Спектральна характеристика та величина середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ невідомого значення лінійного функціоналу $A\xi$ за даними спостережень поля $\xi(u, v) + \eta(u, v)$, при $u \in \mathbb{R}, v \in \{\dots, -n, -(n-1), \dots, -1\}$ визначається формулами* (2.103), (2.104)*, а при відсутності шуму – формулами* (2.108), (2.109).

Приклад 2.5. Приклад, у якому знайдено лінійну оцінку функціоналу $A\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{1} a\left(t, j\right) \xi\left(t, j\right) dt$ від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi\left(t, j\right), t \in \mathbb{R}, s = 0, 1, 2, \dots,$ за даними спостережень поля $\xi\left(u, v\right)$ при $u \in \mathbb{R}, v \in \{\dots, -n, -(n-1), \dots, -1\}$ та за умови, що коваріаційна функція цього поля

$$R(t,s)=\sigma^2 e^{-\alpha|t|}e^{-\beta|s|}$$

подано у додатках (Приклад 4.10). $\diamondsuit$

2.2.5. Мінімаксні оцінки за спостереженнями у півплощині

Скористатись формулами для обчислення спектральної характеристики та величини середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi\,(s,t)\,, s\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}_+$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ можна при умові, що спектральні щільності $f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)$, $f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$ відомі. У тому випадку, коли спектральні щільності невідомі, а визначені лише класи можливих (допустимих) спектральних щільностей застосовують мінімаксний підхід ро задачі оцінювання функціонала. Відповідні означення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик наведені у попередніх розділах. У цьому разділі матимемо такі твердження, що є наслідком означень, тверджень теореми 2.8 та наслідків 2.17 – 2.19.

Лема 2.5. *Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі в $D_f\times D_g$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_+\xi$ від значень однорідного неперервного у середньоквадратичному поля, якщо коефіцієнти Фур'є функцій $(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1}$, $f_0(\lambda,\mu)\,(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1}$, $f_0(\lambda,\mu)\,g_0(\lambda,\mu)(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))^{-1}$ задають оператори $B^0(\lambda), D^0(\lambda), R^0(\lambda)$ за формулами* (2.79) – (2.81), *які визначають розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g}\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{0}^{\infty}(B\left(\lambda\right)c(\lambda))(t)\bar{c}(\lambda,t)dt+\int\limits_{-\infty}^{\infty}(R(\lambda)\,a(\lambda))(t)\bar{a}(\lambda,t)dt\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\langle B(\lambda)\,c(\lambda),c(\lambda)\rangle+\langle R(\lambda)\,a(\lambda),a(\lambda)\rangle\right]d\lambda, \qquad (2.110)$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0=h(f_0,g_0)$ можна обчислити за формулою (2.77) *за умови, що $h(f_0,g_0)\in H_D$.*

Лема 2.6. *Спектральна щільність однорідного випадкового поля $\xi\,(s,t)$,* *що допускає канонічний розклад рухомого середнього*

$$\xi(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s} d^0(t-u, s-v)\, d\nu(u,v), \tag{2.111}$$

де $\nu(u,v)$ *– стандартне випадкове поле з некорельованими приростами, буде найменш сприятливою в класі* D_f *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_+\xi$*, якщо*

$$f^0(\lambda,\mu) = \left| d^0(\lambda,\mu) \right|^2, \quad d^0(\lambda,\mu) = \int_0^{\infty} d^0(\lambda,s)\, e^{-is\mu} ds, \tag{2.112}$$

де $d^0(\lambda) = \left\{ d^0(\lambda,s), 0 \le s \le \infty \right\}$ *- розв'язок задачі на умовний екстремум*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|A_+(\lambda)d(\lambda)\|^2 d\lambda \to \max,$$

$$f(\lambda,\mu) = \left| \int_0^{\infty} d(\lambda,v)\, e^{-iv\mu} dv \right|^2 \in D_f. \tag{2.113}$$

Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою (2.82) *за умови, що* $h(f_0) \in H_{D_f}$.

Найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta(h(f_0,g_0); f,g) = \Delta(h(f_0,g_0); f_0,g_0) \tag{2.114}$$

Задача на умовний екстремум (2.114) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(f,g) = -\Delta(h(f_0,g_0);\, f,g) + \delta((f,g)\,|D_f \times D_g) \to \inf, \tag{2.115}$$

де $\delta((f,g)\,|D_f \times D_g)$ - індикаторна функція множини $D_f \times D_g$. Розв'язок задачі (2.115) визначається умовою $0 \in \partial\Delta_D(f_0,g_0)$, де $\partial\Delta_D(f_0,g_0)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(f,g)$ в точці (f_0,g_0). Скористаємося даною умовою для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей для конкретних класів допустимих щільностей.

2.2.6. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi\left(s,t\right)$, $s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ за умови, що спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ полів невідомі, а визначені лише класи допустимих спектральних щільностей, що мають вигляд $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$, де

$$D_f^0(\lambda) = \left\{ f(\lambda,\mu) \mid \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda,\mu)\, d\mu \ \le P_1(\lambda), \quad \lambda \in (-\infty,\infty) \right\},$$

$$D_g^0(\lambda) = \left\{ g(\lambda,\mu) \mid \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda,\mu)\, d\mu \ \le P_2(\lambda), \quad \lambda \in (-\infty,\infty) \right\}.$$

Нехай щільності $f_0(\lambda,\mu) \in D_f^0$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_g^0$ і функції

$$h_f\left(f_0,g_0\right) \ = \frac{\left|A_+\left(\lambda,\mu\right) g_0\left(\lambda,\mu\right) + C_+\left(\lambda,\mu\right)\right|}{f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)}, \tag{2.116}$$

$$h_g\left(f_0,g_0\right) \ = \frac{\left|A_+\left(\lambda,\mu\right) f_0\left(\lambda,\mu\right) - C_+\left(\lambda,\mu\right)\right|}{f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)}, \tag{2.117}$$

обмежені. За цих умов функціонал $\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right); f,g\right)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Тому за умови $0 \in \partial\Delta_D\left(f_0,g_0\right)$ при $D = D_f^0 \times D_g^0$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0 \in D_f^0$, $g_0 \in D_g^0$ задовольняють рівняння

$$\left|A_+\left(\lambda,\mu\right) g_0\left(\lambda,\mu\right) + C_+^0\left(\lambda,\mu\right)\right| = \alpha_1(\lambda)\left(f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)\right), \tag{2.118}$$

$$\left|A_+\left(\lambda,\mu\right) f_0\left(\lambda,\mu\right) - C_+^0\left(\lambda,\mu\right)\right| = \alpha_2(\lambda)\left(f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)\right), \tag{2.119}$$

де константи $\alpha_1\left(\lambda\right) \ge 0$,$\alpha_2\left(\lambda\right) \ge 0$.
Зауважимо, що $\alpha(\lambda) \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda,\mu) d\mu = P_1(\lambda), \tag{2.120}$$

і $\beta(\lambda) \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_0(\lambda,\mu) d\mu = P_2(\lambda). \tag{2.121}$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 2.11. *Нехай спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)\in D_f^0(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_g^0(\lambda)$ *некорельованих однорідних випадкових полів задовольняють умову мінімальності* (2.76). *Нехай виконуються умови* (2.72) *і нехай функції* $h_f\left(f_0,g_0\right)$, $h_g\left(f_0,g_0\right)$, *що визначені за формулами* (2.116), (2.117), *обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в* $D_f^0(\lambda)\times D_g^0(\lambda)$ *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_+\xi$, *якщо* $f_0(\lambda,\mu), g_0(\lambda,\mu)$ *є розв'язком систем рівнянь* (2.118), (2.119) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (2.110). *Функція* $h\left(f_0,g_0\right)$, *що обчислена за формулою* (2.77), *за умови* $h(f_0,g_0)\in H_D$ *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_+\xi$.

Наслідок 2.22. *Нехай* $\xi(k,j)$ *– однорідне випадкове поле, що має спектральну щільність* $f\left(\lambda,\mu\right)=f_1\left(\lambda\right)f_2\left(\mu\right)$, *де* $f_1\left(\lambda\right)$ *фіксована та* $f_2(\mu)$ *задовольняє умову мінімальності*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\gamma(\mu)\right|^2}{f_2\left(\mu\right)}d\mu<\infty,$$

де $\gamma\left(\mu\right)$ *– деяка функція експоненціального типу* $\gamma\left(\mu\right)=\int_0^{\infty}\alpha\left(t\right)\,e^{it\mu}dt$,

$$f_2(\mu)\in D_f^0=\left\{f(\mu)\middle|\;\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\mu)d\mu\le P_1^2\right\}.$$

Нехай виконуються умови (2.72). *Тоді найменш сприятливою щільністю в класі* D_f^0 *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_+\xi$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)$ *при* $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_+^2$ *буде щільність*

$$f\left(\lambda,\mu\right)=f_1\left(\lambda\right)\left|d^0(\mu)\right|^2=f_1\left(\lambda\right)\left|\int\limits_0^{\infty}d^0(v)\,e^{-iv\mu}dv\right|^2,$$

де $d^0(v), v\in\mathbb{R}_+$ *– власний елемент оператора* $A(\lambda)$, *який заданий співвідношенням* (2.73), *що відповідає найбільшому власному значенню* v *і задовольняє умові*

$$\int\limits_0^{\infty}\left|\,d^0\left(\mu\right)\right|^2d\mu=P_1^2.$$

Спектральну характеристику $h(f)$ *та середньоквадратичну похибку*

$\Delta(f)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_+\xi$ *від невідомих значень однорідного поля* $\xi(k,j)$ *за даними спостережень поля* $\xi(u,v)$ *при* $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ *можна обчислити за формулами* (2.82), (2.83).

Приклад 2.6. У прикладі, який наведено у додатках (Приклад 4.11), знайдено оцінку

$$A_+\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} a\,(t,s)\,\xi\,(t,s)\,dtds$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi\,(t,s)\,, t \in \mathbb{R}, s \geq 0$ за даними спостережень поля $\xi\,(u,v)$ в точках нижньої площини за додатковими припущеннями, що $a(s,t) \equiv a$ на $[-T,T] \times [0,1]$ та $f\,(\lambda,\mu) = f_1\,(\lambda)\,f_2\,(\mu)$, щільність $f_1\,(\lambda)$ фіксована,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1\,(\lambda)\,d\lambda = P_1^2 = 1,$$

$$f_2\,(\mu) = \left| \int_0^{\infty} g^0(v)\,e^{-iv\mu} dv \right|^2$$

така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2\,(\mu)\,d\mu = P_2^2 = 1.$$

$\diamondsuit$

2.2.7. Найменш сприятливі спектральні щільності у класі $D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi\,(s,t)\,, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$ за даними спостережень поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ за умови, що спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ полів невідомі, а визначені лише класи допустимих спектральних щільностей, що мають вигляд $D = D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$, де

$$D_{2\varepsilon_1}(\lambda) = \left\{ f\,(\lambda,\mu) \,\middle|\, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f\,(\lambda,\mu) - u_1\,(\lambda,\mu)\right)^2 d\mu \ \leq \varepsilon_1(\lambda)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}(\lambda) = \left\{ g\,(\lambda,\mu) \,\middle|\, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(g\,(\lambda,\mu) - u_2\,(\lambda,\mu)\right)^2 d\mu \ \leq \varepsilon_2(\lambda)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Теорема 2.12. *Нехай спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_2}$ *задовольняють умову мінімальності* (2.76)*. Нехай виконуються умови* (2.72) *і нехай функції* $h_f\left(f_0, g_0\right)$, $h_g\left(f_0, g_0\right)$, *що визначені за формулами* (2.116), (2.117), *обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$ *є найменш сприятливі в* $D_{2\varepsilon_1}(\lambda) \times D_{1\varepsilon_2}(\lambda)$ *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_+\xi$, *якщо* $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_2}(\lambda)$ *є розв'язком систем рівнянь*

$$\left|A_+\left(\lambda,\mu\right) f\left(\lambda,\mu\right) + C^0\left(\lambda,\mu\right)\right|^2 = \\ = \left(f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 \left(f_0(\lambda,\mu) - u_1(\lambda,\mu)\right)\gamma_1, \quad (2.122)$$

$$\left|A_+\left(\lambda,\mu\right) f\left(\lambda,\mu\right) - C^0\left(\lambda,\mu\right)\right|^2 = \\ \left(f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 \ \left(g_0(\lambda,\mu) - u_2(\lambda,\mu)\right)\gamma_2, \quad (2.123)$$

де $\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$ *єдиним чином визначаються умовами*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f\left(\lambda,\mu\right) - u_1\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 d\mu = \varepsilon_1(\lambda), \quad \lambda \in R,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(g\left(\lambda,\mu\right) - u_2\left(\lambda,\mu\right)\right)^2 d\mu = \varepsilon_2(\lambda), \quad \lambda \in R.$$

Функція $h\left(f_0, g_0\right)$, *обчислена за формулою* (2.77), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_+\xi$.

2.2.8. Найменш сприятливі спектральні щільності у класі $D = D_v^u(\lambda) \times D_\varepsilon(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi\left(s,t\right), s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ за умови, що спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ полів невідомі, а визначені лише класи допустимих спектральних щільностей, що мають вигляд $D = D_v^u \times D_\varepsilon$, де

$$D_v^u(\lambda) = \Bigg\{ f\left(\lambda,\mu\right) \mid v\left(\lambda,\mu\right) \le f\left(\lambda,\mu\right) \le u\left(\lambda,\mu\right),$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda,\mu) d\mu = p_1(\lambda),\ \lambda \in R \Bigg\},$$

$$D_\varepsilon(\lambda) = \Bigg\{ g\left(\lambda,\mu\right) \mid g\left(\lambda,\mu\right) = \left(1-\varepsilon\right) g_1\left(\lambda,\mu\right) + \varepsilon w\left(\lambda,\mu\right),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda,\mu) d\mu = p_2(\lambda),\ \lambda \in R \Bigg\},$$

де спектральні щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$, $g_1(\lambda,\mu)$ задані, фіксовані і, крім того, щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$ обмежені. Клас $D_v^u(\lambda)$ описує "смугову" модель випадкових полів. Клас $D_\varepsilon(\lambda)$ описує модель "ε– забруднення" випадкових полів.

Теорема 2.13. *Нехай спектральні щільності$f_0(\lambda,\mu) \in D_v^u$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_\varepsilon$ задовольняють умову* (2.76)*, Нехай виконуються умови* (2.72) *і нехай функції $h_f\left(f_0,g_0\right)$, $h_g\left(f_0,g_0\right)$, що визначені за формулами* (2.116), (2.117)*, обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі в класі $D = D_v^u(\lambda) \times D_\varepsilon(\lambda)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_+\xi$, якщо вони задовольняють рівняння*

$$\left|A_+\left(\lambda,\mu\right) g_0\left(\lambda,\mu\right) + C_+^0\left(\lambda,\mu\right)\right| = \\ \left(f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)\right)\left(\gamma_1(\lambda,\mu) + \gamma_2(\lambda,\mu) + \alpha_1^{-1}(\lambda)\right), \quad (2.124)$$

$$\left|A_+\left(\lambda,\mu\right) f_0\left(\lambda,\mu\right) - C_+^0\left(\lambda,\mu\right)\right| = \\ \left(f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)\right)\left(\varphi(\lambda,\mu) + \alpha_2^{-1}(\lambda)\right), \quad (2.125)$$

де функція $\gamma_1\left(\lambda,\mu\right) \le 0$ і $\gamma_1\left(\lambda,\mu\right) = 0$ при $f_0\left(\lambda,\mu\right) \ge l\left(\lambda,\mu\right)$; функція $\gamma_2\left(\lambda,\mu\right) \ge 0$ і $\gamma_2\left(\lambda,\mu\right) = 0$ при $f_0\left(\lambda,\mu\right) \le u\left(\lambda,\mu\right)$; функція $\varphi\left(\lambda,\mu\right) \le 0$ і $\varphi\left(\lambda,\mu\right) = 0$ при $g_0\left(\lambda,\mu\right) \ge (1-\varepsilon) g_1\left(\lambda,\mu\right)$, задовольняють умови

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda,\mu) d\mu = p_1(\lambda), \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_0(\lambda,\mu) d\mu = p_2(\lambda), \quad \lambda \in R, \quad (2.126)$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.114). *Функція* $h\left(f_0,g_0\right)$, *яка обчислена за формулою* (2.77), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_+\xi$.

Для доведення теореми зауважимо, що маємо прямий добуток опуклих множин $D=D_v^u(\lambda)\times D_\varepsilon(\lambda)$. Оскільки щільності $f_0(\lambda,\mu)\in D_f^0$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_g^0$ і функції $h_f\left(f_0,g_0\right)$, $h_g\left(f_0,g_0\right)$ обмежені, то за цих умов функціонал $\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1\times L_1$.

Субдиференціал індикаторної функції множини D_ε для моделі "ε–забруднення" визначається як

$$\partial\delta(f|D_\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\varphi(\lambda,\mu)+\alpha_2^{-1}(\lambda))f(\lambda,\mu)d\mu,$$

де функція $\varphi\left(\lambda,\mu\right)\leq 0$ і $\varphi\left(\lambda,\mu\right)=0$ при $g_0\left(\lambda,\mu\right)\geq(1-\varepsilon)g_1\left(\lambda,\mu\right)$,

Субдиференціал індикаторної функції множини D_v^u для смугової моделі околу визначається як

$$\partial\delta(f|D_v^u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\gamma_1(\lambda,\mu)+\gamma_2(\lambda,\mu)+\alpha_1^{-1}(\lambda))f(\lambda,\mu)d\mu,$$

де функція $\gamma_1\left(\lambda,\mu\right)\leq 0$ і $\gamma_1\left(\lambda,\mu\right)=0$ при $f_0\left(\lambda,\mu\right)\geq l\left(\lambda,\mu\right)$; функція $\gamma_2\left(\lambda,\mu\right)\geq 0$ і $\gamma_2\left(\lambda,\mu\right)=0$ при $f_0\left(\lambda,\mu\right)\leq u\left(\lambda,\mu\right)$.
За умови $0\in\partial\Delta_D\left(f_0,g_0\right)$ при $D=D_v^u(\lambda)\times D_\varepsilon(\lambda)$ знаходимо , що найменш сприятливі щільності $f_0\in D_f^0,\ g_0\in D_g^0$ задовольняють рівняння (2.124),(2.125).

2.2.9. Мінімаксні оцінки за спостереженнями у трьох чвертях площини

Скористатись формулами для обчислення спектральної характеристики та величини середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi\left(t,s\right),t\geq 0,s\geq 0$ за даними спостережень поля $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в точках $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_+^2$, можна при умові, що спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ полів відомі. У тому випадку, коли спектральні щільності невідомі, а визначені лише класи можливих (допустимих) спектральних щільностей застосовують мінімаксний підхід ро задачі оцінювання функціонала. Відповідні означення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик наведені у попередніх розділах. У цьому разділі матимемо такі твердження, що є наслідком означень та тверджень теореми 2.9 та наслідків 2.20 – 2.21.

Лема 2.7. *Спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в класі* $D = D_f \times D_g$ *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A_{++}\xi$, *якщо перетворення Фур'є функцій*

$$\left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)^{-1}, \quad f_0(\lambda,\mu)\left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)^{-1},$$

$$f_0(\lambda,\mu)\,g_0(\lambda,\mu)\left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)^{-1}$$

задають оператори B^0, D^0, R^0 *за формулами* (2.95)–(2.97), *які визначають розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g}\left\langle Da, B^{-1}Da\right\rangle + \langle Ra, a\rangle =$$

$$= \left\langle D^0 a, \left(B^0\right)^{-1} D^0 a\right\rangle + \left\langle R^0 a, a\right\rangle. \qquad (2.127)$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0, g_0)$ *можна обчислити за формулою* (2.93) *за умови, що* $h(f_0,g_0)\in H_D$.

Лема 2.8. *Спектральна щільність однорідного випадкового поля* $\xi(s,t)$, *що допускає канонічний розклад рухомого середнього*

$$\xi(t,s) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} d^0(t-u, s-v)\, d\nu(u,v), \qquad (2.128)$$

де $\nu(u,v)$ *- стандартне випадкове поле з некорельованими приростами, буде найменш сприятливою в класі* D_f *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_{++}\xi$, *якщо*

$$f^0(\lambda,\mu) = \left|\, d^0(\lambda,\mu)\right|^2, \quad d^0(\lambda,\mu) = \int_0^\infty\int_0^\infty d^0(t,s)\, e^{-i(t\lambda+s\mu)} dt ds, \quad (2.129)$$

де $d^0(t,s)$ *- розв'язок задачі на умовний екстремум*

$$\|A_{++}d\|^2 \to \max,$$

$$f(\lambda,\mu) = \left|\int_0^\infty\int_0^\infty d(t,s)\; e^{-i(t\lambda+s\mu)} dt\, ds\right|^2 \in D_f. \qquad (2.130)$$

Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою (2.98) *за умови, що* $h(f_0)\in H_{D_f}$.

Найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right)=\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f_0,g_0\right) \tag{2.131}$$

Лема 2.9. *Нехай* (f_0,g_0) *- розв'язок екстремальної задачі* (2.131). *Спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ *найменш сприятливі в* $D=D_f\times D_g$ *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A_{++}\xi$, *а спектральна характеристика* $h^0=h(f_0,g_0)$ *є мінімаксною, якщо* $h(f_0,g_0)\in H_D$

Задача на умовний екстремум (2.131) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D\left(f,g\right)=-\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);\,f,g\right)+\delta\left(\left(f,g\right)\left|D_f\times D_g\right.\right)\to\inf, \tag{2.132}$$

де $\delta\left(\left(f,g\right)\left|D_f\times D_g\right.\right)$ – індикаторна функція множини $D_f\times D_g$. Розв'язок задачі (2.132) визначається умовою $0\in\partial\Delta_D(f_0,g_0)$, де $\partial\Delta_D(f_0,g_0)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(f,g)$ в точці (f_0,g_0). Скористаємося даною умовою для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей для конкретних класів допустимих щільностей.

2.2.10. Найменш сприятливі щільності в класі $D=D_f^0\times D_g^0$

Розглянемо задачу для множини спектральних щільностей $D_f^0\times D_g^0$,

$$D_f^0=\left\{f(\lambda,\mu)\;\left|\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu\le P_1\right.\right\},$$

$$D_g^0=\left\{g(\lambda,\mu)\quad\left|\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu\le P_2\right.\right\}.$$

Нехай щільності $f(\lambda,\mu)\in D_f^0$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_g^0$ і функції

$$h_f\left(f_0,h_0\right)=\frac{\left|\,A_{++}(\lambda,\mu)\,g_0(\lambda,\mu)+C_{++}^0(\lambda,\mu)\,\right|}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)}, \tag{2.133}$$

$$h_g\left(f_0,h_0\right)=\frac{\left|\,A_{++}(\lambda,\mu)\,f_0(\lambda,\mu)-C_{++}^0(\lambda,\mu)\,\right|}{f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)}, \tag{2.134}$$

обмежені. За цих умов функціонал $\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1\times L_1$. Тому

$$\partial\Delta_{D_f^0\times D_g^0}\left(f_0,g_0\right)=-\partial\Delta\,\left(h\,\left(f_0,g_0\right);f_0,g_0\right)+\partial\delta\,\left(\left(f_0,g_0\right)\,\middle|\,D_f^0\times D_g^0\right).$$

За умови $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$ при $D = D_f^0 \times D_g^0$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0 \in D_f^0$, $g_0 \in D_g^0$ задовольняють рівняння

$$\left| A_{++}(\lambda,\mu)\; g_0(\lambda,\mu) + C^0(\lambda,\mu) \right| = \alpha_1 \left(f_0\;(\lambda,\mu) + g_0\;(\lambda,\mu) \right) \tag{2.135}$$

$$\left| A_{++}\;(\lambda,\mu)\; f_0(\lambda,\mu) - C^0(\lambda,\mu) \right| = \alpha_2\;(f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)), \tag{2.136}$$

де

$$c\;(t,s) = \left(B^{-1}Da\right)\;(t,s)\,, C_{++}(\lambda,\mu) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty c\;(\,t,s\,)\; e^{i(t\lambda+s\mu)}dt\,ds,$$

$$A_{++}(\lambda,\mu) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty a\;(t,s)\; e^{i(t\lambda+s\mu)}dt\,ds,$$

константи $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$. Зауважимо, що $\alpha_1 \neq 0$ якщо

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda,\mu)\;d\lambda\;d\mu = P_1,$$

і $\alpha_2 \neq 0$ якщо

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_0(\lambda,\mu)\;d\lambda\;d\mu = P_2.$$

Теорема 2.14. *Нехай спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu) \in D_f^0$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_g^0$ задовольняють умову мінімальності* (2.92). *Нехай виконуються умови* (2.88) *і нехай функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, що визначені за формулами* (2.133), (2.134), *обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі в $D = D_f^0 \times D_g^0$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A_{++}\xi$, якщо $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ є розв'язком системи рівнянь* (2.135), (2.136) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (2.127). *Функція $h(f_0, g_0)$, яка обчислена за формулою* (2.93) *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$.*

Наслідок 2.23. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda,\mu)$ відома, спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu) \in D_g^0$, функція $f(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)$ задовольняє умову мінімальності* (2.92). *Нехай виконуються умови* (2.88) *і нехай функція $h_g(f, g_0)$, яка обчислена за формулою* (2.134), *обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятлива в класі D_g^0 для* *оптимальної екстраполяції функціонала $A_{++}\xi$, якщо вона має вигляд*

$$g_0(\lambda,\mu) = \max\left\{0, \alpha_2^{-1} \left|A_{++}(\lambda,\mu)\, f(\lambda,\mu) - C_{++}^0(\lambda,\mu)\,\right| - f(\lambda,\mu)\right\}$$

і пара $f(\lambda,\mu), g_0(\lambda,\mu)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (2.127). *Функція $h(f,g_0)$, обчислена за формулою* (2.93), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимально оцінки функціонала $A_{++}\xi$.*

Наслідок 2.24. *Спектральна щільність однорідного випадкового поля, що допускає канонічний розклад рухомого середнього*

$$\xi(t,s) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} d^0(t-u, s-v)\; d\nu(u,v), \tag{2.137}$$

де $d^0(t,s)$ – власний елемент оператора A_{++}, який заданий у просторі $L_2([0,\infty)\times[0,\infty))$ співвідношенням (2.89), *що відповідає найбільшому власному значенню ν і задовольняє умові*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left|\, d^0(t,s)\right|^2 dtds = P_1,$$

найменш сприятлива в класі D_f^0 для оптимальної екстраполяції функціонала $A_+\xi$ за даними спостережень поля $\xi(t,s)$ при $(u,v)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_+^2$. Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою (2.98). *Мінімаксне значення похибки оцінювання функціоналу $A_+\xi$ дорівнює $P_1\,\nu^2$.*

2.2.11. Найменш сприятливі щільності в класі $D = D_v^u \times D_\varepsilon$

Розглянемо задачу для множини спектральних щільностей $D_v^u \times D_\varepsilon$, де

$$D_v^u = \left\{ f(\lambda,\mu)\,|v(\lambda,\mu) \le f(\lambda,\mu) \le u(\lambda,\mu), \right.$$

$$\left. \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda,\mu)\, d\lambda\, d\mu = P_1 \right\},$$

$$D_\varepsilon=\Big\{g(\lambda,\mu)\,|g(\lambda,\mu)=(1-\varepsilon)\,g_1(\lambda,\mu)+\varepsilon\omega(\lambda,\mu)\,,$$
$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu=P_2\Big\},$$

спектральні щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$, $g_1(\lambda,\mu)$ задані і фіксовані і, крім того, щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$ обмежені. Нехай $f_o(\lambda,\mu)\in D_v^u$, $g_o(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon$ такі спектральні щільності, що функції обчислені за формулами (2.133), (2.134), обмежені. З умови $0\in\partial\Delta_D(f_o,g_o)$ при $D=D_v^u\times D_\varepsilon$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left|A_{++}(\lambda,\mu)\;g_0(\lambda,\mu)\;+\;C^0(\lambda,\mu)\right|=$$
$$(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu))\left(\gamma_1(\lambda,\mu)\;+\;\gamma_2(\lambda,\mu)+\alpha_2^{-1}\right)\quad(2.138)$$

$$\left|A_{++}(\lambda,\mu)\;f_0(\lambda,\mu)-C^0(\lambda,\mu)\,\right|=$$
$$(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\,)\left(\varphi(\lambda,\mu)+\alpha_2^{-1}\right),\quad(2.139)$$

де функція $\gamma_1(\lambda,\mu)\le 0$ і $\gamma_1(\lambda,\mu)=0$ при $f_0(\lambda,\mu)\ge v(\lambda,\mu)$; функція $\gamma_2(\lambda,\mu)\le 0$ і $\gamma_2(\lambda,\mu)=0$ при $f_0(\lambda,\mu)\ge u(\lambda,\mu)$; функція $\varphi(\lambda,\mu)\le 0$ і $\varphi(\lambda,\mu)=0$ при $g_0(\lambda,\mu)\ge(1-\varepsilon)\,g_1(\lambda,\mu)$.

Теорема 2.15. *Нехай спектральні щільності $f_o(\lambda,\mu)\in D_v^u$, $g_o(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon$ задовольняють умову мінімальності* (2.92)*. Нехай виконуються умови* (2.88) *і нехай функції $h_f(f_0,g_0)$, $h_g(f_0,g_0)$, що визначені за формулами* (2.133), (2.134)*, обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі в класі $D=D_v^u\times D_\varepsilon$ для оптимально екстраполяція функціонала $A_{++}\xi$, якщо вони задовольняють рівняння* (2.138), (2.139) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (2.127)*. Функція $h(f_o,g_o)$, обчислена за формулою* (2.93) *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$.*

Наслідок 2.25. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda,\mu)$ зафіксована, щільність $f(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)$ задовольняє умову мінімальності* (2.92)*. Нехай виконуються умови* (2.88) *і функція $h_g(f,g_o)$, яка обчислена за формулою* (2.134)*, обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятлива в класі D_ε для оптимально екстраполяції функціонала*

$A_{++}\xi$, *якщо*

$$g_0(\lambda,\mu) = \max\Bigg\{ (1-\varepsilon)\, g_1(\lambda,\mu),$$
$$\alpha_2 \left| A_{++}(\lambda,\mu) f(\lambda,\mu) - C^0_{++}(\lambda,\mu) \right| - f(\lambda,\mu) \Bigg\}$$

і пара $(f(\lambda,\mu), g_0(\lambda,\mu))$ *визначає розв'язок оптимальної задачі* (2.127). *Функція* $h(f, g_o)$, *яка обчислена за формулою* (2.93) *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_{++}\xi$.

2.2.12. Найменш сприятливі щільності в класі $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$

Розглянемо задачу для множини спектральних щільностей $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$, де

$$D_{2\varepsilon_1} = \left\{ f(\lambda,\mu) \left| \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\lambda,\mu) - f_1(\lambda,\mu) \right|^2 d\lambda d\mu \le \varepsilon_1 \right. \right\},$$

$$D_{1\varepsilon_2} = \left\{ g(\lambda,\mu) \left| \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| g(\lambda,\mu) - g_1(\lambda,\mu) \right| d\lambda d\mu \le \varepsilon_2 \right. \right\}.$$

Нехай $f_0(\lambda,\mu) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_{1\varepsilon_2}$ такі, що функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, що обчислені за формулами (2.133), (2.134), обмежені. З умови $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$ при $D = D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$ знаходимо рівняння

$$\begin{aligned} &\left| A_{++}\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) g_0(\lambda,\mu) + C^0\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) \right| = \\ &\qquad = \left(f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)\right)^2 \left(f_0(\lambda,\mu) - f_1(\lambda,\mu)\right) \alpha_1, \end{aligned} \tag{2.140}$$

$$\begin{aligned} &\left| A_{++}\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) f_0(\lambda,\mu) - C^0\left(e^{i\lambda}, e^{i\mu}\right) \right|^2 = \\ &\qquad = \left(f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)\right) \Psi(\lambda,\mu) \alpha_2, \end{aligned} \tag{2.141}$$

де $\Psi(\lambda,\mu) \le 1$ та $\Psi(\lambda,\mu) = sign\left(g_0(\lambda,\mu) - g_1(\lambda,\mu)\right)$ за умови $g_0(\lambda,\mu) \ne g_1(\lambda,\mu)$, α_1,α_2 – сталі величини. Рівняння (2.140), (2.141) разом з екстремальною умовою (2.127) та умовами нормування

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f_0(\lambda,\mu) - f_1(\lambda,\mu) \right|^2 d\lambda d\mu = \varepsilon_1, \tag{2.142}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g_0(\lambda,\mu)-g_1(\lambda,\mu)|\,d\lambda d\mu=\varepsilon_2 \tag{2.143}$$

визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{2\varepsilon_1}\times D_{1\varepsilon_2}$.

Справедлива така теорема.

Теорема 2.16. *Нехай спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu)\in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_{1\varepsilon_2}$ задовольняють умову мінімальності* (2.92). *Нехай виконуються умови* (2.88) *і нехай функції $h_f\left(f_0,g_0\right)$, $h_g\left(f_0,g_0\right)$, що обчислені за формулами* (2.133), (2.134), *обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятливі в класі $D_{2\varepsilon_1}\times D_{1\varepsilon_2}$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A_{++}\xi$, якщо вони задовольняють рівняння* (2.140), (2.141), *умови нормування* (2.142), (2.143) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (2.127). *Функція $h\left(f_0,g_0\right)$, що обчислена за формулою* (2.93) *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$.*

Наслідок 2.26. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda,\mu)$ зафіксована, щільність $g_0(\lambda,\mu)\in D_{1\varepsilon_2}$ щільність $f(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)$ задовольняє умову мінімальностій* (2.92), *виконуються умови* (2.88), *і функція $h_g\left(f,g_0\right)$, що обчислена за формулою* (2.134), *обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu)$ найменш сприятлива в класі $D_{1\varepsilon_2}$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi_{++}$, якщо вона має вигляд*

$$g_0\left(\lambda,\mu\right)=\max\Big\{g_1\left(\lambda,\mu\right),\\ \alpha_2\left|A_{++}\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)f\left(\lambda,\mu\right)-C^0\left(e^{i\lambda},e^{i\mu}\right)\right|-f\left(\lambda,\mu\right)\Big\},$$

і щільності $f(\lambda,\mu),g_0(\lambda,\mu)$визначають розв'язок екстремальної задачі (2.127). *Функція $h\left(f,g_0\right)$, що обчислена за формулою* (2.93) *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_{++}\xi$.*

2.2.13. Висновки до розділу 2

У цьому розділі досліджені задачі оптимальної екстраполяції функціоналів від однорідного поля, що спостерігається з однорідним та онорідно зв'язаним шумом. Для знаходження оптимальних оцінок застосований метод, що базується на геометрії гільбертового простору та не вимагає канонічної факторизації спектральної щільності. Спочатку досліджений випадок поля дискретного аргументу. Для обчислення спектральної характеристики $h(\lambda, \mu)$ та середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень поля у випадку, коли поле спостерігається у півплощині запропоновані формули (2.4), (2.5). Як наслідок, запропоновані формули (2.7), (2.8) для некорельованих полів та формули (2.13), (2.14) для однорідного поля, що спостерігається без шуму. У тому випадку, коли спектральні щільності розпадаються на добутки $f(\lambda, \mu) = f_1(\lambda) f_2(\mu)$, $g(\lambda, \mu) = f_1(\lambda) g_2(\mu)$, формули приймають вигляд (2.15), (2.16). Приведено приклади застосування цих формул. Аналогічні дослідження проведені для полів $\zeta(u, v) = \xi(u, v) + \eta(u, v)$ при $(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{Z}_+^2$. Розглянуто мінімаксні оцінки та знайдено найменш сприятливі щільності в класах $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$, $D = D_v^u(\lambda) \times D_\varepsilon(\lambda)$ у випадку оцінки $A_+\xi$ та класів $D_f^0 \times D_g^0$, $D = D_v^u \times D_\varepsilon$, $D = D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$ у випадку оцінки $A_{++}\xi$.

Знайдені оптимальні та мінімаксні оцінки екстраполяції для неперервного у середньоквадратичному поля.

Окремо розглянута екстраполяція функціоналів за дискретними спостереженнями. Спектральну характеристику $h(f, g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень поля $\xi(k, j)$ за даними спостережень поля $\xi(u, v) + \eta(u, v)$ при $\{(u, v) : u \in \mathbb{R}, v \in \{\ldots, -n, -(n-1), \ldots, -1\}\}$. у цьому випадку можна обчислити за формулами (2.103), (2.104). При знаходженні мінімаксної оцінки функціонала $A\xi$ методами субдиференціонального числення розв'язана задача опуклого програмування для певних класів спектральної невизначенності, а саме для класів $D_f^0 \times D_g^0$, $D_l^u \times D_\varepsilon$, $D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}$.

Приведені приклади застосування формул для поля дискретного та аргументу та поля, неперервного у середньоквадратичному.

Основні результати цього розділу були надруковані у роботах [115], [116], [118], [120], [121].

Розділ 3

ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЇ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

3.1. Фільтрація випадкових полів дискретного аргументу

3.1.1. Постановка задач для поля дискретного аргументу

Розглянемо задачу лінійного оптимального оцінювання функціоналу від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$, $(k,j) \subset E \subset \mathbb{Z}^2$ за спостереженнями поля $\xi(k,j) + \eta(k,j)$ при $(k,j) \in E$, де $\eta(k,j)$ – однорідне випадкове поле (шум) з нульовим математичним сподіванням.

У статтях М.П. Моклячука та С.В. Татарінова [108], [109] досліджена задача оптимального оцінювання функціоналів

$$A\xi = \sum_{k,j=0}^{\infty} a(k,j)\,\xi(-k,-j), \quad A_{MN}\xi = \sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} a(k,j)\,\xi(-k,-j)$$

від однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$, що має щільність $f(\lambda,\mu)$ за результатами спостережень поля $\xi(k,j) + \eta(k,j)$ при $k \leq 0, j \leq 0$, де $\eta(k,j)$ – некорельоване з $\xi(k,j)$ однорідне випадкове поле, що має щільність $g(\lambda,\mu)$. Величина середньоквадратичної похибки та спектральна характеристика оптимальної оцінки функціоналів знайдені за умови, що спектральні щільності $f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)$, $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ допускають канонічну факторизацію. У випадку невідомої спектральної щільності у цих работах був застосований мінімаксний метод. Знайдені найменш сприятливі щільності та мінімаксні спектральні характеристики для деяких класів спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$.

В даній роботі розглянемо спочатку задачу оптимального оцінювання невідомого значення поля $\xi(k,j)$ або лінійного функціонала $A\xi = \sum_k \sum_j a(k,j)\,\xi(k,j)$ за спостереженнями поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$ в усіх точках площини. При цьому $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – однорідні та однорідно зв'язані випадкові поля. Використаємо метод А.М. Колмогорова (не вимагаючи канонічної факторизації поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$) за умови, що спектральні щільності полів відомі.

Далі розглянемо задачу оптимального оцінювання лінійного функціонала

$$A\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a\,(k,j)\,\xi\,(k,-j)$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi\,(k,j)$ у півплощині $(k,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_-$ за даними спостережень поля $\xi\,(u,v) + \eta\,(u,v)$ при $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_-$, де $\xi\,(u,v)$, $\eta\,(u,v)$– некорельовані між собою однорідні випадкові поля, які мають спектральні щільності $f\,(\lambda,\mu)$, $g\,(\lambda,\mu)$, що допускають факторизацію.

У випадку невідомих спектральних шільностей полів застосуємо мінімаксний підхід до задач оцінювання невідомих значень поля та функціоналів $A\xi$ від невідомих значень поля.

3.1.2. Оптимальні оцінки за спостереженнями в усіх точках множини $E = \mathbb{Z}^2$

Нехай спостерігається випадкове поле $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$ в точках множини $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля. Кореляційна структура таких полів визначається додатньо визначеною матрицею спектральних щільностей (1.1)

Лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ за даними спостережень поля $\xi\,(u,v) + \eta\,(u,v)$ при $(u,v) \in E$ має вигляд

$$\hat{A}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda,\mu)\, Z_\zeta(d\lambda, d\mu),$$

де $Z_\zeta(\Delta_1, \Delta_2)$ – ортогональна випадкова міра поля $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$, $h\,(\lambda,\mu)$ – спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\xi$. Функція $h\,(\lambda,\mu)$ належить підпростору $L_2\,(f_{\zeta\zeta})$, породженому функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v) \in E$

$$h\,(\lambda,\mu) = \sum_{(u,\ v)\in E}\sum h\,(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}.$$

Умови, яким має задовольняти оптимальна функція $h\,(\lambda,\mu)$ вимагають, щоб виконувались рівності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A(\lambda,\ \mu) f_{\xi\zeta}(\lambda,\ \mu) - h(\lambda,\mu) f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)) e^{-i(k\lambda+j\mu)} d\lambda d\mu = 0 \qquad (3.1)$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$. Але остання рівність показує, що всі коефіцієнти Фур'є функції $A(\lambda,\mu)(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)) - h(\lambda,\mu) f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)$ повинні дорівнювати нулю. Звідси зразу випливає, що цій рівності можна задовольнити лише при

$$h(\lambda,\mu)=\frac{A(\lambda,\mu)f_{\zeta\xi}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\,\mu)}. \tag{3.2}$$

Спектральна характеристика $h(\lambda,\mu)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(W,h(W))=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\left|A-h\right|^2 f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)-2h\overline{A}(f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+$$

$$+2\left|h\right|^2 Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu)+\left|h\right|^2 f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)\Big)d\lambda d\mu=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\mid A(\lambda,\mu)\mid^2(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)-\left|f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu)\right|^2)}{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)+2Ref_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}d\lambda d\mu. \tag{3.3}$$

Для знаходження лінійної оцінки одного довільного значення поля $\xi(k,j)$ маємо наступні формули

$$h(\lambda,\mu)=\frac{f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)} \tag{3.4}$$

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)-\left|f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu)\right|^2)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}d\lambda\, d\mu \tag{3.5}$$

Якщо поля $\xi\,(u,v)$, $\eta\,(u,v)$ некорельовані, то спектральна характеристика та величина середньоквадратичної похибки обчислюються за формулами

$$h(\lambda,\mu)=\frac{A(\lambda,\mu)f(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)} \tag{3.6}$$

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\left|A(\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu)\right|^2 f(\lambda,\mu)+\left|h(\lambda,\mu)\right|^2 g(\lambda,\mu)\Big)d\lambda d\mu=$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\left|\frac{A(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}\right|^2 f(\lambda,\mu)+\left|\frac{A(\lambda,\mu)f(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}\right|^2 g(\lambda,\mu)\right)d\lambda d\mu=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\mid A(\lambda,\mu)\mid^2 g(\lambda,\mu)f(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)}d\lambda\, d\mu \tag{3.7}$$

Формула для середньоквадратичної похибки (3.7) показує, що точне відновлення значення $A\xi$ за значеннями поля $\xi\,(u,v)+\eta\,(u,v)$ як і у випадку спостереження послідовностей можливо лише тоді, коли спектри основного поля $\xi\,(u,v)$ та поля шуму $\eta\,(u,v)$ не перекриваються, так що

$g(\lambda,\mu)f(\lambda,\mu)=0$.

Отже, доведена наступна теорема для поля.

Теорема 3.1. *Спектральну характеристику $h(\lambda,\mu)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(W,h(W))$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від випадкового поля $\xi(k,j)$ за спостереженнями поля $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$, де $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля з кореляційною структурою* (1.1) *можна знайти за формулами* (3.2),(3.3) *або за формулами* (3.4),(3.5) *у випадку оцінки одного довільного значення поля. Якщо поля $\xi(u,v),\eta(u,v)$ некорельовані та мають спектральні щільності $f(\lambda,\mu),g(\lambda,\mu)$, то спектральну характеристику та середньоквадратичну похибку можна обчислити за формулами* (3.6), (3.7).

3.1.3. Оптимальні оцінки за спостереженнями у півплощині

Нехай спектральні щільності $f(\lambda,\mu),g(\lambda,\mu)$ некорельованих між собою однорідних випадкових полів $\xi(u,v),\eta(u,v)$, що спостерігаються при $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_-$ відомі.

Розглянемо задачу лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання функціоналу

$$A\xi=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a(k,j)\,\xi(k,-j)$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$, $(k,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_-$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_-$.

Будемо вважати, що коефіцієнти $a(k,j)$, які визначають функціонал $A\xi$, задовольняють умови

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a(k,j)|<\infty,\quad \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,|a(\lambda,j)|^2<\infty,\quad \lambda\in[-\pi;\pi]\,,\qquad(3.8)$$

де $a(\lambda,j)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a(k,j)e^{ik\lambda}$.

За цих умов функціонал $A\xi$ має скінченний другий момент, а оператори, що визначені в подальшому тексті з допомогою коефіцієнтів $a(k,j)$, компактні.

Знайдемо спектральну характеристику $h(\lambda,\mu)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ яка мінімізує величину середньоквадратичної похибки $\Delta=M\left|A\xi-\hat{A}\xi\right|^2$.

Ця задача є складнішою, ніж задача фільтрації за всіма значеннями. Для її розв'язання зробимо додаткові припущення.

Нехай випадкове поле $\xi(k,j)+\eta(k,j)$ допускає канонічний розклад рухомого середнього

$$\xi(k,j)+\eta(k,j)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{v=-\infty}^{j}d(k-u,j-v)\varsigma(u,v),$$

де $\varsigma(u,v)$ - стандартне випадкове поле з некорельованими значеннями. Тоді спектральна щільність $f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)$ допускає канонічну факторизацію

$$f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)=|d(\lambda,\mu)|^2=|b(\lambda,\mu)|^{-2}, \tag{3.9}$$

$$d(\lambda,\mu)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}d(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}=\sum_{v=0}^{\infty}d(\lambda,v)\,e^{-iv\mu},$$

$$d(\lambda,v)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}d(u,v)\,e^{-iu\lambda},$$

$$b(\lambda,\mu)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}b(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}=\sum_{v=0}^{\infty}b(\lambda,v)\,e^{-iv\mu},$$

$$b(\lambda,v)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(u,v)\,e^{-iu\lambda}.$$

Далі будемо припускати, що щільність $f(\lambda,\mu)$ допускає факторизацію

$$f(\lambda,\mu)=|\varphi(\lambda,\mu)|^2, \tag{3.10}$$

$$\varphi(\lambda,\mu)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\varphi(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}=\sum_{v=0}^{\infty}\varphi(\lambda,v)\,e^{-iv\mu};$$

або щільність $g(\lambda,\mu)$ допускає факторизацію

$$g(\lambda,\mu)=|\psi(\lambda,\mu)|^2, \tag{3.11}$$

$$\psi(\lambda,\mu)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\psi(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}=\sum_{v=0}^{\infty}\psi(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}.$$

Щільності, що допускають факторизацію вигляду (3.9), (3.10),(3.11) називатимемо регулярними. Умови регулярності для однорідних випадкових полів були дослідженні у роботах [1], [128] – [130], [133] – [142], [157], [158], [162], [163], [171], [181].

Лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ за даними спостережень поля

$\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_-$ має вигляд

$$\hat{A}\xi=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h\ (\lambda,\mu)\ (Z_\xi(d\lambda,d\mu)+Z_\eta(d\lambda,d\mu)),$$

де $Z_\xi(\Delta_1,\Delta_2), Z_\eta(\Delta_1,\Delta_2)$ – ортогональні випадкові міри поля $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ відповідно, $h(\lambda,\mu)$– спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\xi$. Функція $h(\lambda,\mu)$ належить підпростору $L_2^-(f+g)$ у просторі $L_2(f+g)$, породженому функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_-$,

$$h(\lambda,\mu)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}h(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}=\sum_{v=0}^{\infty}h(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}.$$

Розглянемо

$$A\xi-\hat{A}\xi=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\lambda,\mu)\,Z_\xi(d\lambda,d\mu)-$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda,\mu)\,(Z_\xi(d\lambda,d\mu)+Z_\eta(d\lambda,d\mu))=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A(\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu))Z_\xi(d\lambda,d\mu)-$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h\ (\lambda,\mu)\,(Z_\eta(d\lambda,d\mu))\pm\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\lambda,\mu)\,Z_\eta(d\lambda,d\mu)=$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A(\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu))(Z_\xi(d\lambda,d\mu)+Z_\eta(d\lambda,d\mu))-\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\lambda,\mu)\,Z_\eta(d\lambda,d\mu).$$

Нехай спектральні щільності допускають факторизацію (3.9), (3.11). У цьому випадку середньоквадратичну похибку лінійної оцінки $\hat{A}\xi$, яка має спектральну характеристику $h(\lambda,\mu)$, можна обчислити за формулою

$$\Delta(h;f,g)=M\left|A\xi-\hat{A}\xi\right|^2=$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[|A(\lambda,\mu) - h(\lambda,\mu)|^2 (f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)) -$$

$$(A(\lambda,\mu) - h(\lambda,\mu)) \bar{A}(\lambda,\mu) g(\lambda,\mu) - (\bar{A}(\lambda,\mu) - \bar{h}(\lambda,\mu)) A(\lambda,\mu) g(\lambda,\mu) +$$

$$+ |A(\lambda,\mu)|^2 g(\lambda,\mu) \Big] d\lambda d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [((a(\lambda,k) - h(\lambda,k))(\bar{a}(\lambda,j) - \bar{h}(\lambda,j)) \sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)} d(\lambda,k-p)\, \bar{d}(\lambda,j-p) -$$

$$- \Big[((a(\lambda,k) - h(\lambda,k))\, \bar{a}(\lambda,j) + (\bar{a}(\lambda,j) - \bar{h}(\lambda,j)) a(\lambda,k) - a(\lambda,k)\, \bar{a}(\lambda,j) \Big] \times$$

$$\times \sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)} \psi(\lambda,k-p)\, \bar{\psi}(\lambda,j-p)] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\langle D(\lambda)(a(\lambda) - h(\lambda)), (a(\lambda) - h(\lambda))\rangle - \langle \Psi(\lambda) a(\lambda), (a(\lambda) - h(\lambda))\rangle] \, d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [- \langle (a(\lambda) - h(\lambda)), \Psi(\lambda) a(\lambda)\rangle + \langle a(\lambda), \Psi(\lambda)\, a(\lambda)\rangle] \, d\lambda,$$

$$A(\lambda,\mu) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a(u,v)\, e^{-i(u\lambda + v\mu)} = \sum_{v=0}^{\infty} a(\lambda,v) e^{-iv\mu},$$

$$a(\lambda,v) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u,v)\, e^{-iu\lambda},$$

$$a(\lambda) = \{a(\lambda,v) : v = 0,1,\dots\}, \quad h(\lambda) = \{h(\lambda,v) : v = 0,1,\dots\},$$

$$\langle a(\lambda), c(\lambda)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a(\lambda,k)\, \bar{c}(\lambda,k)$$

– скалярний добуток у просторі ℓ_2; $D(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ - оператори у просторі ℓ_2, які задаються матрицями з елементами

$$D(\lambda;k,j) = \sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)} d(\lambda,k-p)\, \bar{d}(\lambda,j-p), \quad k,j = 0,1,...;$$

$$\Psi(\lambda;k,j) = \sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)} \psi(\lambda,k-p)\, \bar{\psi}(\lambda,j-p), \quad k,j = 0,1,....$$

Спектральна характеристика $h(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціоналу $A\xi$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta\left(f,g\right)=\Delta\left(h\left(f,g\right);f,g\right)=\min_{h\in L_2^-(f+g)}\Delta\left(h;f,g\right).$$

Величина $\Delta\left(h;f,g\right)$ досягає мінімуму при

$$a(\lambda,k)-h(\lambda,k)=(D^{-1}(\lambda)\Psi(\lambda)\,a(\lambda))(k).$$

При цьому сам мінімум дорівнює

$$\Delta\left(f,g\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\langle\Psi(\lambda)a(\lambda),a(\lambda)\rangle-\langle B(\lambda)\Psi(\lambda)\,a(\lambda),\ \Psi(\lambda)a(\lambda)\rangle\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\langle c_g(\lambda),a(\lambda)\rangle-\langle C_g(\lambda)b(\lambda),C_g(\lambda)b(\lambda)\rangle\right]d\lambda, \qquad (3.12)$$

де $c_g(\lambda)=\Psi(\lambda)a(\lambda)$, $c_g(\lambda)=\{c_g(\lambda,v):v=0,1,\dots\}$, $B(\lambda)$ – оператор у просторі ℓ_2 який задається матрицею з елементами

$$B(\lambda;k,j)=\sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)}b(\lambda,k-p)\,\bar{b}(\lambda,j-p),\quad k,j=0,1,\dots;$$

$$b(\lambda)=\{b(\lambda,v):v=0,1,\dots\}$$

$C_g(\lambda)$ – оператор у просторі ℓ_2, який визначається матрицею з елементами $C_g(\lambda,k,j)=c_g(\lambda,k+j),k,j=0,1\dots.$ Спектральну характеристику $h\left(f,g\right)$ оптимальної оцінки $\hat{A}\xi$ можна знайти за формулою

$$h\left(f,g\right)=A\left(\lambda,\mu\right)-r_g\left(\lambda,\mu\right)d^{-1}\left(\lambda,\mu\right), \qquad (3.13)$$

$$r_g\left(\lambda,\mu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(C_g(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}.$$

Якщо спектральні щільності $f\left(\lambda,\mu\right),g\left(\lambda,\mu\right)$ допускають факторизацію (3.9), (3.10), то

$$\Delta\left(f,g\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\langle c_f(\lambda),\ a(\lambda)\rangle-\langle C_f(\lambda)b(\lambda),\ C_f(\lambda)b(\lambda)\rangle\right]d\lambda, \qquad (3.14)$$

де $c_f(\lambda)=\Phi(\lambda)a(\lambda)$, а оператори $\Phi(\lambda),C_f(\lambda)$ визначаються аналогічно тому як визначаються оператори $\Psi(\lambda),C_g(\lambda)$. Спектральна характеристика $h\left(f,g\right)$ оптимальної оцінки $A\xi$ обчислюється за формулою

$$h\left(f,g\right)=r_f\left(\lambda,\mu\right)d^{-1}\left(\lambda,\mu\right), \tag{3.15}$$

$$r_f\left(\lambda,\mu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(C_f(\lambda)\overline{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}.$$

Отже, доведена наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови* (3.8)*. Середньоквадратичну похибку* $\Delta\left(f,g\right)$ *оптимальної лінійної оцінки функціонала*

$$A\xi=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a\left(k,j\right)\xi\left(k,-j\right)$$

від випадкового поля $\xi\left(k,j\right)$ *за спостереженнями поля* $\xi\left(u,v\right)+\eta\left(u,v\right)$ *при* $\left(u,v\right)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_-$ *можна знайти за формулою* (3.12)*, якщо некорельовані однорідні випадкові поля* $\xi\left(k,j\right),\eta\left(k,j\right)$ *мають спектральні щільності* $f\left(\lambda,\mu\right)$*,* $g\left(\lambda,\mu\right)$*, які допускають факторизацію* (3.9)*,* (3.11)*. Спектральну характеристику* $h\left(f,g\right)$ *оптимальної оцінки функціоналу* $A\xi$ *у цьому випадку можна обчислити за формулою* (3.13)*. Якщо щільності* $f\left(\lambda,\mu\right)$*,* $g\left(\lambda,\mu\right)$ *допускають факторизації* (3.9)*,* (3.10)*, то величини* $\Delta\left(f,g\right)$*,* $h\left(f,g\right)$ *можна знайти за формулами* (3.14)*,* (3.15)*.*

Наслідок 3.1. *Нехай виконуються умови* (3.8) *та однорідні випадкові поля* $\xi\left(k,j\right),\eta\left(k,j\right)$ *мають спектральні щільності* $f\left(\lambda,\mu\right),g\left(\lambda,\mu\right)$*, які допускають факторизацію*

$$f\left(\lambda,\mu\right)=f_1(\lambda)\left|\varphi_2(\mu)\right|^2,$$

$$f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)=f_1(\lambda)\left|d_2(\mu)\right|^2=f_1(\lambda)\left|b_2(\mu)\right|^{-2},$$

або

$$g\left(\lambda,\mu\right)=f_1(\lambda)\left|\psi_2(\mu)\right|^2,$$
$$f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)=f_1(\lambda)\left|d_2(\mu)\right|^2=f_1(\lambda)\left|b_2(\mu)\right|^{-2},$$

де

$$\phi_2\left(\mu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\phi(k)e^{-ik\mu},\quad \psi_2\left(\mu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)e^{-ik\mu},$$

$$b_2\left(\mu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}b(k)e^{-ik\mu},\quad d_2\left(\mu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}d(k)e^{-ik\mu}.$$

Середньоквадратичну похибку $\Delta(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціоналу $A\xi$ від випадкового поля $\xi(k,j)$ за спостереженнями поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_-$ можна знайти за однією з наступних формул

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda)\left[\langle\tilde{c}_g(\lambda),\ a(\lambda)\rangle-\left\langle\tilde{C}_g(\lambda)b_2,\tilde{C}_g(\lambda)b_2\right\rangle\right]d\lambda,$$

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda)\left[\langle\tilde{c}_f(\lambda),\ a(\lambda)\rangle-\left\langle\tilde{C}_f(\lambda)b_2,\tilde{C}_f(\lambda)b_2\right\rangle\right]d\lambda,$$

де $\tilde{c}_g(\lambda)=\Psi_2 a(\lambda)$, Ψ_2 – оператор у просторі ℓ_2, який визначається матрицею з елементами

$$\Psi_2(k,j)=\sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)}\psi_2(k-p)\,\bar{\psi}_2(j-p),\quad k,j=0,1,\ldots;$$

$\tilde{C}_g(\lambda)$ – оператор у просторі ℓ_2, який визначається матрицею з елементами $\tilde{C}_g(\lambda;k,j)=\tilde{c}_g(\lambda;k+j),k,j=0,1,\ldots;$ $\tilde{C}_f(\lambda)$ – оператор у просторі ℓ_2, який визначається матрицею з елементами $\tilde{C}_f(\lambda;k,j)=\tilde{c}_f(\lambda;k+j),k,j=0,1,\ldots,$ $\tilde{c}_f(\lambda)=\Phi_2 a(\lambda)$, Φ_2 – оператор у просторі ℓ_2, який визначається матрицею з елементами

$$\Phi_2(k,j)=\sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)}\varphi_2(k-p)\,\bar{\varphi}_2(j-p),\quad k,j=0,1,\ldots$$

Оскільки

$$r_f(\lambda,\mu)=\frac{1}{\sqrt{f_1(\lambda)}}f_1(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{C}_f(\lambda)\bar{b}_2)(k)e^{-ik\mu}=\sqrt{f_1(\lambda)})\tilde{r}_f(\lambda,\mu),$$

та

$$r_g(\lambda,\mu)=\frac{1}{\sqrt{f_1(\lambda)}}f_1(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{C}_g(\lambda)\bar{b}_2)(k)e^{-ik\mu}=\sqrt{f_1(\lambda)}\tilde{r}_g(\lambda,\mu),$$

то спектральну характеристику $h(f,g)$ оптимальної оцінки функціо-

налу $A\xi$ у цьому випадку можна обчислити за однією з двох формул

$$h\left(f,g\right)=A\left(\lambda,\mu\right)-\tilde{r}_{g}\left(\lambda,\mu\right)d_{2}^{-1}\left(\mu\right),\quad \tilde{r}_{g}\left(\lambda,\mu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{C}_{g}(\lambda)\bar{b}_{2})(k)e^{-ik\mu},$$

$$h\left(f,g\right)=\tilde{r}_{f}\left(\lambda,\mu\right)d_{2}^{-1}\left(\mu\right),\quad \tilde{r}_{f}\left(\lambda,\mu\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{C}_{f}(\lambda)\bar{b}_{2})(k)e^{-ik\mu}.$$

Приклад 3.1. Приклад, у якому знайдено оцінку функціоналу

$$A\xi=\sum_{k=-1}^{1}\sum_{j=-1}^{0}\xi(k,j)$$

від поля $\xi(k,j)$, що має щільність

$$f(\lambda,\mu)=\left|1+\ \alpha e^{-i\lambda}\right|^{2}\mid 1+\ \beta e^{-i\mu}\mid^{2}=f_{1}(\lambda)\left|\varphi_{2}(\mu)\right|^{2},\alpha<1,\beta<1,$$

за результатами спостереженьв точках $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{-}$ поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$, що має щільність

$$f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)=\frac{\left|1+\ \alpha e^{-i\lambda}\right|^{2}}{V^{2}\mid 1+\ \gamma e^{-i\mu}\mid^{2}}=f_{1}(\lambda)\left|d_{2}(\mu)\right|^{2}=f_{1}(\lambda)\left|b_{2}(\mu)\right|^{-2},$$

розглянуто у додатках (Приклад 4.12). ♢

3.1.4. Мінімаксні (робастні) оцінки за спостереженнями у півплощині

Скористатись формулами для обчислення спектральної характеристики та величини середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi\left(k,j\right),k\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{Z}_{-}$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{-}$ можна при умові, що спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ відомі. У тому випадку, коли спектральні щільності невідомі, а визначені лише класи можливих (допустимих) спектральних щільностей застосовують мінімаксний підхід ро задачі оцінювання функціонала. Відповідні означення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик наведені у попередніх розділах. У цьому разділі матимемо такі твердження, що є наслідком означень, тверджень теореми 3.2 та відповідних наслідків.

Лема 3.1. *Спектральні щільності $f_0(\lambda,\mu) \in D_f$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_g$, які допускають канонічні факторизації (3.9) – (3.11), будуть найменш сприятливими в класі $D = D_f \times D_g$ при оптимальному оцінюванні функціонала $A\xi$, якщо функції $\varphi(\lambda,v)$, $\psi(\lambda,v)$, $b(\lambda,v)$, які задають ці факторизації, будуть розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\Delta(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\langle c_g(\lambda), a(\lambda)\rangle - \langle C_g(\lambda)b(\lambda), C_g(\lambda)b(\lambda)\rangle\right] d\lambda \to \sup, \quad (3.16)$$

$$g(\lambda,\mu) = \left|\sum_{v=0}^{\infty}\psi(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}\right|^2 \in D_g,$$

$$f(\lambda,\mu) = \left|\sum_{v=0}^{\infty} b(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}\right|^{-2} - g(\lambda,\mu) \in D_f,$$

або задачі на умовний екстремум

$$\Delta(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\langle c_f(\lambda), a(\lambda)\rangle - \langle C_f(\lambda)b(\lambda), C_f(\lambda)b(\lambda)\rangle\right] d\lambda \to \sup \quad (3.17)$$

$$f(\lambda,\mu) = \left|\sum_{v=0}^{\infty}\varphi(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}\right|^2 \in D_f,$$

$$g(\lambda,\mu) = \left|\sum_{v=0}^{\infty} b(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}\right|^{-2} - f(\lambda,\mu) \in D_g.$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0, g_0)$ можна обчислити за формулою (3.13) чи за формулою (3.15) за умови $h(f_0,g_0) \in H_D$.

У тому випадку, коли одна із щільностей відома, задачі (3.10), (3.11) – це задачі на умовний екстремум лише по змінній $b(\lambda,v)$.

Лема 3.2. *Якщо відома спектральна щільність $g(\lambda,\mu)$, то спектральна щільність $f_0(\lambda,\mu) \in D_f$, яка допускає канонічну факторизацію (3.9), (3.10), буде найменш сприятливою в D_f при оптимальному оцінюванні функціонала $A\xi$, якщо функція $b(\lambda,v)$ буде розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\langle C_f(\lambda)b(\lambda), C_f(\lambda)b(\lambda)\rangle\right] d\lambda \to \inf, \quad (3.18)$$

$$f(\lambda,\mu) = \left|\sum_{v=0}^{\infty} b(\lambda,v)\, e^{-iv\mu}\right|^{-2} - g(\lambda,\mu) \in D_f.$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0, g)$ *можна обчислити за формулою* (3.15) *за умови, що* $h(f_0, g) \in H_D$.

Аналогічно, спектральна щільність $g_0(\lambda,\mu) \in D_g$*, яка допускає канонічну факторизацію* (3.9), (3.11) *при відомій щільності* $f(\lambda,\mu)$*, буде найменш сприятливою в* D_g *при оптимальному оцінюванні функціоналу* $A\xi$*, якщо функція* $b(\lambda, v)$ *буде розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\langle C_g(\lambda)b(\lambda), C_g(\lambda)b(\lambda)\rangle\right] d\lambda \to \inf, \tag{3.19}$$

$$g(\lambda,\mu) = \left|\sum_{v=0}^{\infty} b(\lambda,v)\, e^{-iv\mu}\right|^{-2} - f(\lambda,\mu) \in D_g.$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f, g_0)$ *можна обчислити за формулою* (3.13) *чи за формулою* (3.15) *за умови* $h(f, g_0) \in H_D$.

Зазначимо, що найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки виконуються, коли $h^0 = h(f_0, g_0)$, $h(f_0, g_0) \in H_D$ і (f_0, g_0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta(h(f_0,g_0); f, g) = \Delta(h(f_0,g_0); f_0, g_0), \tag{3.20}$$

де

$$\Delta(h(f_0,g_0); f, g) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\, r_g(\lambda,\mu)|^2 f(\lambda,\mu)}{(f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu))} d\lambda\, d\mu +$$
$$+ \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|r_f(\lambda,\mu)|^2 g(\lambda,\mu)}{(f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu))} d\lambda d\mu,$$

а функції $r_g(\lambda,\mu)$, $r_f(\lambda,\mu)$ визначені за формулами (3.13), (3.15) при $f(\lambda,\mu) = f_0(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu) = g_0(\lambda,\mu)$. Задача на умовний екстремум (3.20) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(f,g) = -\Delta(h(f_0,g_0); f, g) + \delta((f,g)\,|D_f \times D_g) \to \inf, \tag{3.21}$$

де $\delta\left(\left(f,g\right)|D_f\times D_g\right)$ – індикаторна функція множини $D=D_f\times D_g$.

Розв'язок задачі (3.21) визначаються умовою $0\in\partial\Delta_D\left(f_0,g_0\right)$, де $\partial\Delta_D\left(f_0,g_0\right)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D\left(f,g\right)$ в точці (f_0,g_0). Скористаємося даною умовою для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей для конкретних класів допустимих щільностей.

3.1.5. Найменш сприятливі щільності в класі $D=D_v^u(\lambda)\times D_\varepsilon(\lambda)$.

Розглянемо задачу оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi\left(k,j\right),k\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{Z}_-$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_-$ за умови, що спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ полів невідомі, а визначені лише класи допустимих спектральних щільностей, що мають вигляд $D=D_v^u(\lambda)\times D_\varepsilon(\lambda)$, де

$$D_v^u(\lambda)=\Bigg\{f\left(\lambda,\mu\right)\,|\,v\left(\lambda,\mu\right)\le f\left(\lambda,\mu\right)\le u\left(\lambda,\mu\right),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\lambda,\mu)\,d\mu\;=P_1(\lambda),\;\lambda\in[-\pi,\pi]\Bigg\}.$$

$$D_\varepsilon=\Bigg\{g\left(\lambda,\mu\right)\,|\,g\left(\lambda,\mu\right)=\left(1-\varepsilon\right)g_1\left(\lambda,\mu\right)+\varepsilon w\left(\lambda,\mu\right),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(\lambda,\mu)d\mu=P_2(\lambda),\;\lambda\in[-\pi,\pi]\Bigg\},$$

спектральні щільності $v(\lambda,\mu)$,$u(\lambda,\mu)$,$g_1(\lambda,\mu)$ фіксовані і, крім того, щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$ обмежені. З умови $0\in\;\partial\Delta_D(f_o,g_o)$ при $D=D_v^u(\lambda)\times D_\varepsilon(\lambda)$ знаходимо враховуючи вигляд субдиференціалів індикаторної функції множин $D_v^u(\lambda),D_\varepsilon(\lambda)$, що найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu)\in D_v^u(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon(\lambda)$ задовольняють рівняння

$$f_0\left(\lambda,\mu\right)+g_0\left(\lambda,\mu\right)=$$

$$=\alpha_1\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_g(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}\right|^2\left(\gamma_1(\lambda,\mu)+\gamma_2(\lambda,\mu)+1\right)^{-1},\quad(3.22)$$

$$f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)=\alpha_2\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_f(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}\right|^2(\gamma_3(\lambda,\mu)+1)^{-1}, \quad (3.23)$$

де функція $\gamma_1(\lambda,\mu)\leq 0$ і $\gamma_1(\lambda,\mu)=0$ при $f_0(\lambda,\mu)\geq v(\lambda,\mu)$; функція $\gamma_2(\lambda,\mu)\leq 0$ і $\gamma_2(\lambda,\mu)=0$ при $f_0(\lambda,\mu)\leq u(\lambda,\mu)$; функція $\gamma_3(\lambda,\mu)\leq 0$ і $\gamma_3(\lambda,\mu)=0$ при $g_0(\lambda,\mu)\geq(1-\varepsilon)g_1(\lambda,\mu)$.

Коефіцієнти α_1, α_2, функція $b(\lambda,v)$, оператори $C_f(\lambda)$, $C_g(\lambda)$ визначаються за допомогою факторизації (3.9) – (3.11) щільностей $f_0(\lambda,\mu)\in D_v^u$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon$, $f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)$ та умов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_0(\lambda,\mu)\,d\mu=P_1(\lambda),\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_0(\lambda,\mu)\,d\mu=P_2(\lambda). \quad (3.24)$$

У тому випадку, коли одна із щільностей задана, найменш сприятливу щільність можна знайти, користуючись одним із співвідношень (3.22), (3.23). Якщо задана щільність $g(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon$, яка допускає канонічну факторизацію, то найменш сприятлива щільність $f_0(\lambda,\mu)\in D_v^u$ має вигляд

$$f_0(\lambda,\mu)=\max\Bigg\{v(\lambda,\mu),\min\Bigg\{u(\lambda,\mu),\ \alpha_1\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_g(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}\right|^2-g(\lambda,\mu)\Bigg\}\Bigg\}. \quad (3.25)$$

Якщо ж відома щільність $f(\lambda,\mu)\in D_v^u$, яка допускає канонічну факторизацію, то найменш сприятлива щільність $g_0(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon$ має вигляд

$$g_0(\lambda,\mu)=\max\Bigg\{(1-\varepsilon)g_1(\lambda,\mu),\ \alpha_2\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_f(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}\right|^2-f(\lambda,\mu)\Bigg\}. \quad (3.26)$$

Оператори $C_g(\lambda)$, $C_f(\lambda)$ обчислюються за факторизацією заданих щільностей $g(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon$, $f(\lambda,\mu)\in D_v^u$.

Сформулюємо одержане твердження у вигляді теореми.

Теорема 3.3. *Найменш сприятливі спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)\in D_v^u$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon$ *при оптимальному оцінюванні функціоналу* $A\xi$ *визначаються співвідношеннями* (3.22), (3.23), (3.9) – (3.11), (3.16), (3.24). *Якщо відома спектральна щільність* $g(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon$, *яка допускає кано-*

нічну факторизацію, то найменш сприятлива спектральна щільність $f_0(\lambda,\mu) \in D_v^u$ *визначається співвідношеннями* (3.25), (3.9) – (3.11), (3.18), (3.24). *Якщо задана спектральна щільність* $f(\lambda,\mu) \in D_v^u$, *що допускає канонічну факторизацію, то найменш сприятлива щільність* $g_0(\lambda,\mu) \in D_\varepsilon$ *має вигляд* (3.26) *і визначається умовами* (3.9) – (3.11), (3.19), (3.24). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки при оптимальному оцінюванні функціоналу* $A\xi$ *обчислюється за формулами* (3.13), (3.15).

3.1.6. Найменш сприятливі щільності в класі $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$

Розглянемо задачу в класі спектральних щільностей $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$, де

$$D_f^0(\lambda) = \left\{ f\left(\lambda,\mu\right) \;\middle|\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\mu)d\mu = P_1(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi,\pi] \right\},$$

$$D_g^0(\lambda) = \left\{ g\left(\lambda,\mu\right) \;\middle|\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\lambda,\mu)\,d\mu \;= P_1(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi,\pi] \right\}.$$

Враховуючи вигляд субдиференціалів індикаторної функції множин D_f^0, D_g^0 з умови $0 \in \partial\Delta_D(f_o, g_o)$ при $D_f^0 \times D_g^0$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu) \in D_f^0$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_g^0$ задовольняють рівняння

$$f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right) = \alpha_1(\lambda)\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_g(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}\right|^2, \qquad (3.27)$$

$$f_0\left(\lambda,\mu\right) + g_0\left(\lambda,\mu\right) = \alpha_2(\lambda)\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_f(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}\right|^2. \qquad (3.28)$$

Коефіцієнти $\alpha_1(\lambda)$,$\alpha_2(\lambda)$, функція $b\left(\lambda,v\right)$, оператори $C_f(\lambda)$,$C_g(\lambda)$ визначаються за допомогою факторизації (3.9) – (3.11) щільностей $f_0(\lambda,\mu) \in D_v^u$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_\varepsilon$, $f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)$ та умов

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_0\left(\lambda,\mu\right)d\mu = P_1(\lambda), \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_0(\lambda,\mu)\,d\mu \;= P_2(\lambda).$$

У тому випадку, коли одна із щільностей задана, найменш сприятиливу щільність можна знайти, користуючись одним із співвідношень

(3.27), (3.28). Якщо задана щільність $g(\lambda,\mu)$, яка допускає канонічну факторизацію, то найменш сприятлива щільність $f_0(\lambda,\mu)\in D_f^0$ має вигляд

$$f_0\left(\lambda,\mu\right)=\left[\alpha_1\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_g(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}\right|^2-g\left(\lambda,\mu\right)\right]_+. \tag{3.29}$$

Якщо задана щільність $f(\lambda,\mu)$, яка допускає канонічну факторизацію, то найменш сприятлива щільність $g_0(\lambda,\mu)\in D_g^0$ має вигляд

$$g_0\left(\lambda,\mu\right)=\left[\alpha_2\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_f(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}\right|^2-f\left(\lambda,\mu\right)\right]_+. \tag{3.30}$$

Теорема 3.4. *Найменш сприятливі спектральні щільності* $(f_0,g_0)\in D_f^0\times D_g^0$, *при оптимальному оцінюванні функціоналу* $A\xi$ *визначаються співвідношеннями* (3.27), (3.28)*. Якщо відома спектральна щільність* $g(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon$, *то найменш сприятлива спектральна щільність* $f_0(\lambda,\mu)\in D_v^u$ *визначається співвідношеннями* (3.27), (3.9) – (3.11), (3.18), (3.24)*. Якщо задана спектральна щільність* $f(\lambda,\mu)\in D_v^u$, *то найменш сприятлива щільність* $g_0(\lambda,\mu)\in D_\varepsilon$ *має вигляд* (3.20) *і визначається умовами* (3.30), (3.9) – (3.11), (3.19), (3.24)*. Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки обчислюється за формулами* (3.13), (3.15).

Приклад 3.2. Приклад, у якому досліджено оцінку функціоналf за умов спектральної невизначеності розміщено у додатках (Приклад 4.13). ♢

3.2. Фільтрація випадкових полів неперервного аргументу

3.2.1. Постановка задач для поля неперервного аргументу

У роботі Моклячука М.П. та Татарінова С.В. [111] досліджена задача оптимального оцінювання перетворень

$$A\xi=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}a\left(s,t\right)\xi\left(-s,-t\right)dsdt,$$

від однорідного неперервного у середньоквадратичному випадкового поля $\xi\left(s,t\right)$, що має щільність $f(\lambda,\mu)$ за результатами спостережень поля $\xi\left(s,t\right)+\eta\left(s,t\right)$ при $s\leq 0, t\leq 0$, де $\eta\left(s,t\right)$ – некорельоване з $\xi\left(s,t\right)$ однорідне випадкове поле, що має щільність $g(\lambda,\mu)$. Величина середньоквадратичної похибки та спектральна характеристика оптимальної оцінки функціоналів знайдені за умови, що спектральні щільності $f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)$, $f\left(\lambda,\mu\right)$, $g\left(\lambda,\mu\right)$ допускають канонічну факторизацію. У випадку невідомої спектральної щільності у цих работах був застосований мінімаксний метод та знайдені найменш сприятливі щільності та мінімаксні спектральні характеристики для класе спектральних щільностей $D=D_f\times D_g$.

Знайдемо оцінку $\hat{\xi}(t,s)$, $t\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{R}$ поля $\xi(t,s)$ для довільної (не обовязково цілочисельної) точки площини за спостереженнями значень середньоквадратично неперервного поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ у всіх цілочисельних точках $(u,v): u\in\mathbb{Z}, v\in\mathbb{Z}$.

Далі розглянемо задачу лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання функціоналу

$$A\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}a\left(t,s\right)\xi\left(t,-s\right)dtds$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi\left(s,t\right), s\in\mathbb{R}^1, t\leq 0$ за даними спостережень поля $\xi\left(u,v\right)+\eta\left(u,v\right)$ в точках множини $(u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$, де $\xi\left(s,t\right)$, $\eta\left(s,t\right)$ – некорельовані однорідні випадкові поля. У випадку невідомих спектральних щільностей полів застосуємо мінімаксний підхід до задач оцінки невідомих значень поля та функціоналів $A\xi$ від невідомих значень поля $\hat{A}\xi$.

3.2.2. Оптимальні оцінки значень поля неперервного аргументу за спостереженнями в усіх цілочисельних точках площини

Нехай шукається оцінка корисного сигналу $\hat{\xi}(t,s)$ $t\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{R}$ для довільної (не обовязково цілочисельної) точки площини за спостереженнями значень неперервного у середньоквадратичному сенсі поля $\zeta(t,s)=\xi(t,s)+\eta(t,s)$, де $\xi(t,s)$, $\eta(t,s)$ – однорідні та однорідно звязані випадкові поля, в усіх цілочисельних точках $\{(u,v): u\in\mathbb{Z}, v\in\mathbb{Z}\}$. Умови, яким має задовольняти спектральна характеоистика $h\left(\lambda,\mu\right)$ оптимальної оцінки вимагають, щоб

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{i(t\lambda+s\mu)}f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu)f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu))e^{-i(k\lambda+j\mu)}d\lambda d\mu=0,$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$.
Звідси для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(F_{\xi\zeta}(t,s,\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu)F_{\zeta\zeta}(t,s,\lambda,\mu))e^{-i(k\lambda+j\mu)}d\lambda d\mu=0, \tag{3.31}$$

де $F_{\xi\zeta}(t,s,\lambda,\mu)$, $F_{\zeta\zeta}(t,s,\lambda,\mu)$ визначені у розділі 2. Рівність (3.31) показує, що всі коефіцієнти Фур'є функції $F_{\xi\zeta}(t,s,\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu)F_{\zeta\zeta}(t,s,\lambda,\mu)$ дорівнюють нулеві. Звідси зразу випливає, що

$$h(f_{\zeta\zeta},f_{\xi\zeta})=\frac{F_{\xi\zeta}(t,s,\lambda,\mu)}{F_{\zeta\zeta}(0,0,\lambda,\mu)}. \tag{3.32}$$

Спектральна характеристика $h(f_\xi,f_\eta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{\xi}(k,j)$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки. Похибка

$$\Delta(h,f_\xi,f_\eta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F_{\xi\xi}(0,0,\lambda,\mu)F_{\zeta\zeta}(0,0,\lambda,\mu)-|F_{\xi\zeta}(t,s,\lambda,\mu)|^2}{F_{\zeta\zeta}(0,0,\lambda,\mu)}d\lambda d\mu \tag{3.33}$$

Якщо поля некорельовані, то

$$h(f_\xi,f_\eta)=\frac{F_\xi(t,s,\lambda,\mu)}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}, \tag{3.34}$$

$$\Delta(h,f_\xi,f_\eta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[F_\xi(0,0,\lambda,\mu)-\frac{|F_\xi(t,s,\lambda,\mu)|^2}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}\right]d\lambda d\mu, \tag{3.35}$$

де

$$F_\xi(t,s,\lambda,\mu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{it(\lambda+2\pi k)}e^{is(\mu+2\pi k)}f_\xi(\lambda+2\pi k,\mu+2\pi j),$$

$$F_\eta(t,s,\lambda,\mu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{it(\lambda+2\pi k)}e^{is(\mu+2\pi k)}f_\eta(\lambda+2\pi k,\mu+2\pi j),$$

Якщо $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$, тоді

$$h(f_\xi,f_\eta)=\frac{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)e^{i(k\lambda+j\mu)}}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu)+F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}, \tag{3.36}$$

$$\Delta(h, f_\xi, f_\eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F_\xi(0,0,\lambda,\mu) F_\eta(0,0,\lambda,\mu)}{F_\xi(0,0,\lambda,\mu) + F_\eta(0,0,\lambda,\mu)} d\lambda d\mu \tag{3.37}$$

Теорема 3.5. *Нехай середньоквадратично неперервне поле* $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$, *де* $\xi(u,v)$, $\eta(u,v)$ *– однорідні та однорідно зв'язані випадкові поля, спостерігається в усіх цілочисельних точках* $\{(u,v) : u \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}\}$ *площини. Нехай виконується умова мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{F_{\zeta\zeta}(0,0;\lambda,\mu)} < \infty.$$

Тоді спектральну характеристику $h(f_{\zeta\zeta}, f_{\xi\zeta})$ *та величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(h, f_{\zeta\zeta}, f_{\xi\zeta})$ *оптимальної лінійної оцінки невідомого значення поля* $\xi(t,s)$ *можна обчислити за формулами* (3.32), (3.33). *Якщо* $\xi(u,v), \eta(u,v)$ *– некорельовані однорідні випадкові поля, що мають спектральні щільності* $f_\xi(\lambda,\mu), f_\eta(\lambda,\mu)$ *та виконується умова мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{F_\xi(0,0;\lambda,\mu) + F_\eta(0,0;\lambda,\mu)} < \infty,$$

то спектральну характеристику $h(f_\xi, f_\eta)$ *та величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(h, f_\xi, f_\eta)$ *оптимальної лінійної оцінки невідомого значення поля* $\xi(t,s)$ *можна обчислити за формулами* (3.34), (3.35). *У випадку оцінки невідомого значення* $\xi(k,j)$ *при* $k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$ *формули мають вигляд* (3.36), (3.37).

3.2.3. Оптимальні оцінки за спостереженнями у півплощині

Розглянемо задачу лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання функціонала

$$A\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} a(t,s)\, \xi(t,-s)\, dt ds$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(s,t), s \in \mathbb{R}^1, t \leq 0$ за даними спостережень поля $\xi(u,v) + \eta(u,v)$, де $\xi(u,v), \eta(u,v)$ – некорельовані між собою середньоквадратично неперервні однорідні випадкові поля, які мають спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$, у точках множини $\{(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-\}$.

Будемо вважати, що функція $a\,(t,s)$, яка визначає функціонал $A\xi$, задовольняє умови

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}|a\,(t,s)|\,dtds<\infty,\qquad \int\limits_{0}^{\infty}s\;|a\,(\lambda,s)|^2\,ds<\infty,\qquad \lambda\in\mathbb{R},\tag{3.38}$$

$$a\,(\lambda,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}a\,(s,t)\,e^{is\lambda}ds.$$

За цих умов функціонал $A\xi$ має скінченний другий момент, а оператори, що визначені в подальшому тексті з допомогою коефіцієнтів $a\,(t,s)$, компактні.

Нехай $\xi\,(t,s)+\eta\,(t,s)$ допускає канонічний розклад рухомого середнього

$$\xi\,(t,s)+\eta\,(t,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{s}d(t-u,s-v)d\varsigma(u,v),\tag{3.39}$$

де $\varsigma\,(u,v)$ – стандартне випадкове поле з некорельованими приростами.

Спектральна щільність $f\,(\lambda,\mu)+g\,(\lambda,\mu)$ у цьому випадку допускає канонічну факторизацію

$$f\,(\lambda,\mu)+g\,(\lambda,\mu)=|d(\lambda,\mu)|^2=|b(\lambda,\mu)|^{-2},\tag{3.40}$$

$$d\,(\lambda,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}d\,(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}dvdu=\int\limits_{0}^{\infty}d(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}dv,$$

$$b\,(\lambda,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}b\,(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}dvdu=\int\limits_{0}^{\infty}b(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}dv.$$

Нехай щільність $f\,(\lambda,\mu)$ допускає факторизацію

$$f\,(\lambda,\mu)=|\varphi(\lambda,\mu)|^2,\tag{3.41}$$

$$\varphi\,(\lambda,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi\,(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}dvdu=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}dv;$$

а щільність $g\,(\lambda,\mu)$ допускає факторизацію

$$g\,(\lambda,\mu)=|\psi(\lambda,\mu)|^2,\tag{3.42}$$

$$\psi\,(\lambda,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\psi\,(u,v)\,e^{-i(u\lambda+v\mu)}dvdu=\int\limits_{0}^{\infty}\psi(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}dv.$$

Лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ має вигляд

$$\hat{A}\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h\ (\lambda,\mu)\ \left(Z_\xi\left(d\lambda,d\mu\right)+Z_\eta\left(d\lambda,d\mu\right)\right),$$

де $Z_\xi\left(\Delta_1,\Delta_2\right),\ Z_\eta\left(\Delta_1,\Delta_2\right)$– ортогональні випадкові міри поля $\xi\left(s,t\right)$ та $\eta\left(s,t\right)$ відповідно, $h\left(\lambda,\mu\right)$ належить підпростору $L_2^-\left(f+g\right)$ в просторі $L_2\left(f+g\right)$, породженому функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$

$$h\left(\lambda,\mu\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}h\left(u,v\right)e^{-i(u\lambda+v\mu)}dvdu=\int_{0}^{\infty}h(\lambda,v)\,e^{-iv\mu}dv.$$

Середньоквадратичну похибку лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ яка має спектральну характеристику $h\left(\lambda,\mu\right)$ можна обчислити за формулою

$$\Delta\left(h;f,g\right)=M\left|A\xi-\hat{A}\xi\right|^2=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\left|A\left(\lambda,\mu\right)-h\left(\lambda,\mu\right)\right|^2\left(f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)\right)-$$

$$-\left(A\left(\lambda,\mu\right)-h\left(\lambda,\mu\right)\right)A(\bar{\lambda},\mu)\,g\left(\lambda,\mu\right)-(\bar{A}\left(\lambda,\mu\right)-\bar{h}\left(\lambda,\mu\right))\,A(\lambda,\mu)\,g\left(\lambda,\mu\right)+$$

$$+\left|A\left(\lambda,\mu\right)\right|^2g\left(\lambda,\mu\right)\Big]d\lambda d\mu=$$

$$-\Big[((a(\lambda,t)-h(\lambda,t))\,\bar{a}(\lambda,v)+(\bar{a}(\lambda,v)-\bar{h}(\lambda,v))a(\lambda,t)-a(\lambda,t)\,\bar{a}(\lambda,v)\Big]\times$$

$$\int_{-\infty}^{\min(t,v)}\psi(\lambda,t-y)\,\bar{\psi}(\lambda,v-y)dy\Big]dtdvd\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\langle D(\lambda)(a(\lambda)-h(\lambda)),\ (a(\lambda)-h(\lambda))\rangle-\langle\Psi(\lambda)\,a(\lambda),\ (a(\lambda)-h(\lambda))\rangle\Big]d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[-\langle(a(\lambda)-h(\lambda)),\ \Psi(\lambda)\,a(\lambda)\rangle+\langle a(\lambda),\ \Psi(\lambda)\,a(\lambda)\rangle\Big]d\lambda,$$

$$A\left(\lambda,\mu\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}a\left(s,t\right)e^{-i(s\lambda+t\mu)}dsdt=\int\limits_{0}^{\infty}a(\lambda,t)\,e^{-it\mu}dt,$$

де

$$\langle a(\lambda),c(\lambda)\rangle=\int\limits_{0}^{\infty}a(\lambda,t)\,\bar{c}(\lambda,t)dt$$

– скалярний добуток у просторі $L_2[0,\infty)$; а $D(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ – оператори у просторі $L_2[0,\infty)$, які задаються ядрами

$$D(\lambda;t,v)=\int\limits_{-\infty}^{\min(t,v)}\bar{d}(\lambda,t-y)d(\lambda,v-y)dy,$$

$$\Psi(\lambda;t,v)=\int\limits_{-\infty}^{\min(t,v)}\bar{\psi}(\lambda,t-y)\psi(\lambda,v-y)dy.$$

Спектральна характеристика $h\left(f,g\right)$ оптимальної лінійної оцінки функціоналу $A\xi$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки.

Якщо спектральні щільності $f\left(\lambda,\mu\right),g\left(\lambda,\mu\right)$ допускають факторизації (3.40), (3.42), то величина $\Delta\left(h;f,g\right)$ досягає мінімуму при

$$a(\lambda,t)-h(\lambda,t)=\ ((D(\lambda,t))^{-1}\Psi(\lambda)\,a(\lambda))(t),$$

а сам мінімум дорівнює

$$\Delta\left(f,g\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\langle\Psi(\lambda)a(\lambda),\ a(\lambda)\rangle-\langle B(\lambda)\Psi(\lambda)\,a(\lambda),\ \Psi(\lambda)a(\lambda)\rangle\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\langle c_g(\lambda),a(\lambda)\rangle-\langle C_g(\lambda)b(\lambda),C_g(\lambda)b(\lambda)\rangle\right]d\lambda,\qquad(3.43)$$

де $c_g(\lambda,t)=(\Psi(\lambda)a(\lambda))(t)$, $B(\lambda)$ – оператор у просторі $L_2[0,\infty)$, який задається ядром

$$B(\lambda;t,v)=\int\limits_{-\infty}^{\min(t,v)}\bar{b}(\lambda,t-y)b(\lambda,v-y)dy,$$

$C_g(\lambda)$– оператор в $L_2[0,\infty)$, який визначається співвідношенням

$$(C_g(\lambda)b)(t)=\int\limits_{0}^{\infty}c_g(\lambda,t+v)b(\lambda,v)dv.$$

Спектральну характеристику $h\left(f,g\right)$ можна знайти за формулою

$$h\left(f,g\right)=A\left(\lambda,\mu\right)-r_{g}\left(\lambda,\mu\right)d^{-1}\left(\lambda,\mu\right), \tag{3.44}$$

$$r_{g}\left(\lambda,\mu\right)=\int\limits_{0}^{\infty}C_{g}(\lambda)b(t)e^{-it\mu}dt.$$

Якщо спектральні щільності $f\left(\lambda,\mu\right),g\left(\lambda,\mu\right)$ допускають факторизацію (3.40), (3.41), то

$$\Delta\left(f,g\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\langle c_{f}(\lambda),\ a(\lambda)\rangle-\langle C_{f}(\lambda)b(\lambda),\ C_{f}(\lambda)b(\lambda)\rangle\right]d\lambda, \tag{3.45}$$

де $c_{f}(\lambda,t)=(\Phi(\lambda)a(\lambda))(t)$, а оператори $\Phi(\lambda),C_{f}(\lambda)$ у просторі $L_{2}[0,\infty)$ визначаються так само як оператори $\Psi(\lambda),C_{g}(\lambda)$. Спектральна характеристика $h\left(f,g\right)$ оптимальної оцінки $A\xi$ обчислюється за формулою

$$h\left(f,g\right)=r_{f}\left(\lambda,\mu\right)d^{-1}\left(\lambda,\mu\right), \tag{3.46}$$

$$r_{f}\left(\lambda,\mu\right)=\int\limits_{0}^{\infty}C_{f}(\lambda)b(t)e^{-it\mu}dt.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови* (3.38). *Середньоквадратичну похибку $\Delta\left(f,g\right)$ оптимальної лінійної оцінки функціоналу $A\xi$ від випадкового поля $\xi\left(s,t\right)$ за спостереженнями поля $\xi\left(u,v\right)+\eta\left(u,v\right)$ в точках множини $\left\{(u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{-}\right\}$ можна знайти за формулою* (3.43), *а спектральну характеристику $h\left(f,g\right)$ за формулою* (3.44) *за умови, що $\xi\left(u,v\right),\eta\left(u,v\right)$ мають спектральні щільності $f\left(\lambda,\mu\right),g\left(\lambda,\mu\right)$, які допускають факторизацію* (3.40), (3.42). *Якщо ж щільності $f\left(\lambda,\mu\right)$, $g\left(\lambda,\mu\right)$ допускають факторизації* (3.40), (3.41), *то величини $\Delta\left(f,g\right)$ та $h\left(f,g\right)$ можна знайти за формулами* (3.45), (3.46).

Наслідок 3.2. *Нехай виконуються умови* (3.38) *та однорідні випадкові поля $\xi\left(u,v\right)$, $\eta\left(u,v\right)$ мають спектральні щільності $f\left(\lambda,\mu\right)$, $g\left(\lambda,\mu\right)$, які допускають факторизацію*

$$f\left(\lambda,\mu\right)=f_{1}(\lambda)\left|\varphi_{2}(\mu)\right|^{2},$$

$$f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)=f_{1}(\lambda)\left|d_{2}(\mu)\right|^{2}=f_{1}(\lambda)\left|b_{2}(\mu)\right|^{-2},$$

або

$$g\left(\lambda,\mu\right)=f_1(\lambda)\left|\psi_2(\mu)\right|^2,$$
$$f\left(\lambda,\mu\right)+g\left(\lambda,\mu\right)=f_1(\lambda)\left|d_2(\mu)\right|^2=f_1(\lambda)\left|b_2(\mu)\right|^{-2},$$

де

$$\phi_2\left(\mu\right)=\int\limits_0^\infty \phi(v)e^{-iv\mu}dv,\quad \psi_2\left(\mu\right)=\int\limits_0^\infty \psi(v)e^{-iv\mu}dv,$$
$$d_2\left(\mu\right)=\int\limits_0^\infty d_2(v)e^{-iv\mu}dv,\quad b_2\left(\mu\right)=\int\limits_0^\infty b_2(v)e^{-iv\mu}dv.$$

Середньоквадратичну похибку $\Delta\left(f,g\right)$ *оптимальної лінійної оцінки функціоналу* $A\xi$ *від випадкового поля* $\xi\left(s,t\right)$ *за спостереженнями поля* $\xi\left(u,v\right)+\eta\left(u,v\right)$ *при* $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_-$ *можна знайти за однією з наступних формул*

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda)\left[\langle\tilde{c}_g(\lambda),a(\lambda)\rangle-\left\langle\tilde{C}_g(\lambda)b_2,\tilde{C}_g(\lambda)b_2\right\rangle\right]d\lambda,$$

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda)\left[\langle\tilde{c}_f(\lambda),\ a(\lambda)\rangle-\left\langle\tilde{C}_f(\lambda)b_2,\tilde{C}_f(\lambda)b_2\right\rangle\right]d\lambda,$$

де $\tilde{c}_g(\lambda)=\Psi_2a(\lambda)$, Ψ_2 *– оператор у просторі* $L_2[0,\infty)$, *який визначається ядром*

$$\Psi_2(t,v)=\int\limits_{-\infty}^{\min(t,v)}\bar{\psi}_2(t-y)\psi_2(v-y)dy;$$

$\tilde{c}_f(\lambda)=\Phi_2a(\lambda)$, Φ_2 *– оператор у просторі* $L_2[0,\infty)$, *який визначається ядром*

$$\Phi_2(t,v)=\int\limits_{-\infty}^{\min(t,v)}\bar{\varphi}_2(t-y)\varphi_2(v-y)dy.$$

Спектральну характеристику $h\left(f,g\right)$ *оптимальної оцінки функціоналу* $A\xi$ *у цьому випадку можна обчислити за однією з двох формул*

$$h\left(f,g\right)=A\left(\lambda,\mu\right)-\tilde{r}_g\left(\lambda,\mu\right)d_2^{-1}\left(\mu\right),\quad \tilde{r}_g\left(\lambda,\mu\right)=\int\limits_0^\infty\tilde{C}_g(\lambda)b_2(t)e^{-it\mu}dt.$$

$$h\left(f,g\right)=\tilde{r}_f\left(\lambda,\mu\right)d_2^{-1}\left(\mu\right),\quad \tilde{r}_f\left(\lambda,\mu\right)=\int\limits_0^\infty\tilde{C}_f(\lambda)b_2(t)e^{-it\mu}dt.$$

3.2.4. Мінімаксні оцінки за спостереженнями у півплощині

Скористатись формулами для обчислення спектральної характеристики та величини середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi\left(s,t\right), s \in \mathbb{R}, t \leq 0$ за даними спостережень поля $\xi\left(u,v\right)+\eta\left(u,v\right)$ при $\left(u,v\right) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{-}$, де $\xi\left(u,v\right), \eta\left(u,v\right)$ – некорельовані між собою середньоквадратично неперервні однорідні випадкові поля, можна при умові, що спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ відомі. У тому випадку, коли спектральні щільності невідомі, а визначені лише класи можливих (допустимих) спектральних щільностей застосовують мінімаксний підхід ро задачі оцінювання функціонала. Відповідні означення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик наведені у попередніх розділах. У цьому разділі матимемо такі твердження, що є наслідком означень, тверджень теореми 3.6 та відповідних наслідків.

Лема 3.3. *Спектральні щільності* $f_0\left(\lambda,\mu\right) \in D_f, g_0\left(\lambda,\mu\right) \in D_g$, *які допускають канонічні факторизації* (3.40) – (3.42), *будуть найменш сприятливими в класі допустимих спектральних щільностей* $D = D_f \times D_g$ *при оптимальному оцінюванні функціонала* $A\xi$, *якщо функції* $\varphi\left(\lambda,v\right)$, $\psi\left(\lambda,v\right)$, $b\left(\lambda,v\right)$, *які задають факторизації* (3.40) – (3.42), *будуть розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\Delta\left(f,g\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\langle c_g(\lambda),a(\lambda)\rangle-\langle C_g(\lambda)b(\lambda),C_g(\lambda)b(\lambda)\rangle\right]d\lambda\to\sup, \tag{3.47}$$

$$g\left(\lambda,\mu\right)=\left|\int\limits_{0}^{\infty}\psi\left(\lambda,v\right)e^{-iv\mu}dv\right|^{2}\in D_g,$$

$$f\left(\lambda,\mu\right)=\left|\int\limits_{0}^{\infty}b\left(\lambda,v\right)e^{-iv\mu}dv\right|^{-2}-g\left(\lambda,\mu\right)\in D_f,$$

або задачі на умовний екстремум

$$\Delta\left(f,g\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\langle c_f(\lambda),a(\lambda)\rangle-\langle C_f(\lambda)b(\lambda),C_f(\lambda)b(\lambda)\rangle\right]d\lambda\to\sup, \tag{3.48}$$

$$f\left(\lambda,\mu\right)=\left|\int\limits_{0}^{\infty}\varphi\left(\lambda,v\right)e^{-iv\mu}dv\right|^{2}\in D_f,$$

$$g(\lambda,\mu) = \left| \int\limits_0^\infty b(\lambda,v)\, e^{-iv\mu} dv \right|^{-2} - f(\lambda,\mu) \in D_g,$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0, g_0)$ *можна обчислити за формулою* (3.44) *чи за формулою* (3.46) *за умови, що* $h(f_0, g_0) \in H_D$.

У тому випадку, коли одна із щільностей відома, задачі (3.47), (3.48) – це задачі на умовний екстремум лише по змінній $b(\lambda, v)$.

Лема 3.4. *Спектральна щільність* $f_0(\lambda,\mu) \in D_f$*, яка допускає канонічну факторизацію* (3.40), (3.41) *при відомій щільності* $g(\lambda,\mu)$*, буде найменш сприятливою в* D_f*, якщо функція* $b(\lambda, v)$ *буде розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\langle C_f(\lambda) b(\lambda),\ C_f(\lambda) b(\lambda) \rangle \right] d\lambda \to \inf, \tag{3.49}$$

$$f(\lambda,\mu) = \left| \int\limits_0^\infty b(\lambda,v)\, e^{-iv\mu} dv \right|^{-2} - g(\lambda,\mu) \in D_f.$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0, g_0)$ *можна обчислити за формулою* (3.46) *за умови, що* $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Лема 3.5. *Спектральна щільність* $g_0(\lambda,\mu) \in D_g$*, яка допускає канонічну факторизацію* (3.40), (3.42) *при відомій щільіності* $f(\lambda,\mu)$*, буде найменш сприятливою в* D_g*, якщо функція* $b(\lambda, v)$ *буде розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\langle C_g(\lambda) b(\lambda),\ C_g(\lambda) b(\lambda) \rangle \right] d\lambda \to \inf, \tag{3.50}$$

$$g(\lambda,\mu) = \left| \int\limits_0^\infty b(\lambda,v)\, e^{-iv\mu} dv \right|^{-2} - f(\lambda,\mu) \in D_g.$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0, g_0)$ *можна обчислити за формулою* (3.44) *чи за формулою* (3.46) *за умови, що* $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu)$, $g_0(\lambda,\mu)$ є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g)\in D_f\times D_g}\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right)=\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f_0,g_0\right), \tag{3.51}$$

де

$$\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|r_g(\lambda,\mu)\right|^2 f(\lambda,\mu)}{\left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)}d\lambda d\mu+$$
$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|r_f(\lambda,\mu)\right|^2 g(\lambda,\mu)}{\left(f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)\right)}d\lambda d\mu,$$

а функції $r_g(\lambda,\mu)$, $r_f(\lambda,\mu)$ визначені за формулами (3.44), (3.46) при $f(\lambda,\mu)=f_0(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)=g_0(\lambda,\mu)$.

Задача на умовний екстремум (3.51) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(f,g)=-\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right)+\delta\left((f,g)\left|D_f\times D_g\right.\right)\to\inf, \tag{3.52}$$

де $\delta\left((f,g)\left|D_f\times D_g\right.\right)$ – індикаторна функція множини $D=D_f\times D_g$.

Розв'язок цієї задачі визначаються умовою $0\in\partial\Delta_D(f_0,g_0)$, де $\partial\Delta_D(f_0,g_0)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(f,g)$ в точці (f_0,g_0). Скористаємося даною умовою для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей для конкретних класів допустимих щільностей.

3.2.5. Найменш сприятливі щільності в класі $D=D^0(\lambda)\times D_v^u(\lambda)$

Розглянемо задачу оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(s,t)$, $s\in\mathbb{R}, t\leq 0$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$ за умови, що спектральні щільності $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ полів невідомі, а визначені лише класи допустимих спектральних щільностей, що мають вигляд $D=D^0(\lambda)\times D_v^u(\lambda)$, де

$$D^0(\lambda)=\left\{f(\lambda,\mu)\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda,\mu)\,d\mu\leq P_1(\lambda),\quad\lambda\in[-\pi,\pi]\right.\right\},$$

$$D_v^u(\lambda) = \Bigg\{ g(\lambda,\mu) \mid v(\lambda,\mu) \le g(\lambda,\mu) \le u(\lambda,\mu)\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda,\mu)\,d\mu \;= P_2(\lambda),\ \lambda \in [-\pi,\pi] \Bigg\},$$

спектральні щільності $v(\lambda,\mu)$, $u(\lambda,\mu)$ задані і фіксовані. Оскільки задача на умовний екстремум еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(f,g) = -\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f,g\right) + \delta\left(\left(f,g\right)|D_f \times D_g\right) \to \inf, \tag{3.53}$$

то з умови $0 \in \partial\Delta_D(f_o,g_o)$ при $D = D^0(\lambda) \times D_v^u(\lambda)$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda,\mu) \in D^0(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_v^u(\lambda)$ задовольняють рівняння

$$f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu) = \alpha_1(\lambda)\left|\int\limits_0^{\infty}(C_g(\lambda)b(\lambda))(t)e^{-it\mu}dt\right|^2, \tag{3.54}$$

$$f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu) =$$
$$= \alpha_2(\lambda)\left|\int\limits_0^{\infty}(C_f(\lambda)b(\lambda))(t)e^{-it\mu}dt\right|^2(\gamma_1(\lambda,\mu)+\gamma_2(\lambda,\mu)+1)^{-1}, \tag{3.55}$$

де функція $\gamma_1(\lambda,\mu) \le 0$ і $\gamma_1(\lambda,\mu) = 0$ при $f_0(\lambda,\mu) \ge v(\lambda,\mu)$; функція $\gamma_2(\lambda,\mu) \le 0$ і $\gamma_2(\lambda,\mu) = 0$ при $f_0(\lambda,\mu) \le u(\lambda,\mu)$. Коефіцієнти $\alpha_1(\lambda)$,$\alpha_2(\lambda)$, функція $b(\lambda,v)$, оператори $C_f(\lambda)$, $C_g(\lambda)$ визначаються за допомогою факторизації (3.40) – (3.42) щільностей $f_0(\lambda,\mu) \in D^0(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu) \in D_v^u(\lambda)$, $f_0(\lambda,\mu) + g_0(\lambda,\mu)$ та умов нормування

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda,\mu)\;d\lambda d\mu = P_1(\lambda),\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_0(\lambda,\mu)d\mu = P_2(\lambda),\ \lambda \in [-\pi,\pi]\,. \tag{3.56}$$

У тому випадку, коли одна із щільностей задана, найменш сприятиливу щільність можна знайти, користуючись одним із співвідношень (3.54), (3.55). Якщо задана щільність $g(\lambda,\mu) \in D_v^u(\lambda)$, яка допускає канонічну факторизацію, то найменш сприятлива щільність $f_0(\lambda,\mu) \in D^0(\lambda)$ має вигляд

$$f_0(\lambda,\mu) = \left[\alpha_1\left|\int\limits_0^{\infty}(C_g(\lambda)b(\lambda))(t)e^{-it\mu}dt\right|^2 - g(\lambda,\mu)\right]_+. \tag{3.57}$$

Якщо ж відома щільність $f(\lambda,\mu)\in D^0(\lambda)$, яка допускає канонічну факторизацію, то найменш сприятлива щільність $g_0(\lambda,\mu)\in D_v^u(\lambda)$ має вигляд

$$g_0\left(\lambda,\mu\right)=\max\left\{v\left(\lambda,\mu\right),\min\left\{u\left(\lambda,\mu\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.\left|\int\limits_0^\infty (C_f(\lambda)b(\lambda))(t)e^{-it\mu}dt\right|^2-f\left(\lambda,\mu\right)\right\}\right\}. \quad (3.58)$$

Оператори $C_g(\lambda)$, $C_f(\lambda)$ обчислюються за факторизацією заданих щільностей $g(\lambda,\mu)\in D_v^u(\lambda)$,$f(\lambda,\mu)\in D^0(\lambda)$.

Сформулюємо одержане твердження у вигляді теореми.

Теорема 3.7. *Найменш сприятливі спектральні щільності* $f_0(\lambda,\mu)\in D^0(\lambda)$, $g_0(\lambda,\mu)\in D_v^u(\lambda)$, *в класі* $D^0(\lambda)\times D_v^u(\lambda)$ *визначаються співвідношеннями* (3.54), (3.55), (3.40) – (3.42), (3.47), (3.56). *Якщо відома спектральна щільність* $g(\lambda,\mu)\in D_v^u(\lambda)$, *яка допускає канонічну факторизацію, то найменш сприятлива в класі* $D^0(\lambda)$ *спектральна щільність* $f_0(\lambda,\mu)\in D^0(\lambda)$ *визначається співвідношеннями* (3.57), (3.40) – (3.42), (3.49), (3.56). *Якщо задана спектральна щільність* $f(\lambda,\mu)\in D^0(\lambda)$, *що допускає канонічну факторизацію, то найменш сприятлива щільність* $g_0(\lambda,\mu)\in D_v^u(\lambda)$ *має вигляд* (3.58) *і визначається умовами* (3.40) – (3.42), (3.50), (3.56). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки перетворення* $A\xi$ *обчислюється за формулами* (3.44), (3.46).

3.2.6. Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджено такі задачі.

Задача фільтрації випадкового поля дискретних аргументів $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$, де $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – однорідні та однорідно зв'язані випадкові поля, за даними спостережень поля в точках множини $\{(u,v)\in\mathbb{Z}^2\}$. Показано, що спектральну характеристику $h\left(\lambda,\mu\right)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(W,h(W))$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від випадкового поля $\xi\left(k,j\right)$ за спостереженнями поля $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$, можна знайти за формулами (3.2),(3.3); за формулами (3.4),(3.5) коли оцінюється невідоме значення поля $\xi(k,j)$ при $k\in\mathbb{Z}$, $j\in\mathbb{Z}$,; а якщо поля $\xi\left(u,v\right),\eta\left(u,v\right)$ – некорельовані та мають спектральні щільності $f\left(\lambda,\mu\right),g\left(\lambda,\mu\right)$, то за формулами (3.6), (3.7).

Задача лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a\,(k,j)\,\xi\,(k,-j)$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi\,(k,j)$, $(k,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_-$ за даними спостережень поля $\xi\,(u,v) + \eta\,(u,v)$ у півплощині $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_-$. За умови (3.8) доведено, що середньоквадратичну похибку $\Delta\,(f,g)$ та спектральну характеристику $h\,(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ можна знайти за формулою (3.12), (3.13) якщо $\xi\,(k,j)$, $\eta\,(k,j)$ мають спектральні щільності $f\,(\lambda,\mu)$, $g\,(\lambda,\mu)$, які допускають факторизацію (3.9), (3.11). Якщо щільності $f\,(\lambda,\mu)\,,\, g\,(\lambda,\mu)$ допускають факторизації (3.9), (3.10), то середньоквадратичну похибку $\Delta\,(f,g)$ та спектральну характеристику $h\,(f,g)$ можна знайти за формулами (3.14), (3.15). Розглянуто випадок, коли спектральні щільності розкладаються на множники та приклад знаходження найкращої оцінки функціонала. У випадку спектральної невизначеності щільностей $f\,(\lambda,\mu)$, $g\,(\lambda,\mu)$ знайдено найменш сприятливі щільності в класах $D = D_v^u(\lambda) \times D_\varepsilon(\lambda)$, $D_f^0(\lambda) \times D_g^0(\lambda)$.

Задача лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання невідомих значень неперервного поля $\xi(t,s)$ для довільної (не обовязково цілочисельної) точки площини за спостереженнями значень неперервного у середньоквадратичному поля $\xi(u,v)+\eta(u,v)$ в усіх цілочисельних точках $(u,v) : u \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}$. Середньоквадратична похибка $\Delta\,(f,g)$ та спектральна характеристика $h\,(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки мають вигляд (3.34), (3.35).

Задача лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання функціонала

$$A\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} a\,(t,s)\,\xi\,(t,-s)\,dtds$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi\,(t,s)\,, t \in \mathbb{R}^1, s \leq 0$ за даними спостережень поля $\xi\,(t,s) + \eta\,(t,s)$ при $(t,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$, де $\xi\,(t,s)$, $\eta\,(t,s)$ – некорельовані однорідні випадкові поля. Величину середньоквадратичної похибки $\Delta\,(f,g)$ та спектральну характеристику $h\,(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від випадкового поля $\xi\,(t,s)$ можна обчислити за формулами (3.43), (3.44) за умови, що некорельовані однорідні випадкові поля $\xi\,(t,s)\,, \eta\,(t,s)$ мають спектральні щільності $f\,(\lambda,\mu)\,,\, g\,(\lambda,\mu)$, які допускають факторизацію (3.40), (3.42).

У тому випадку, коли щільності $f\,(\lambda,\mu)\,, g\,(\lambda,\mu)$ допускають факторизації (3.40), (3.41), величини $\Delta\,(f,g)$,$h\,(f,g)$ обчислюються за формулами (3.45), (3.46).

Основні результати цього розділу були надруковані у роботах [117], [119], [122].

Розділ 4
ДОДАТКИ

4.1. Додатки 1. Задачі інтерполяції випадкових полів

Для того, щоб скористатися теоремами 1.1 – 1.5 та їх наслідками потрібно у загальному випадку:

1. Визначити вигляд області K. На практиці, у реальних задачах, область K найчастіше має наступний вигляд

   $$K = \{(k,j) : -M \leq k \leq P, 0 \leq j \leq N\}.$$

   За невідомими значеннями поля у цій області складається лінійний функціонал

   $$A_N^{-MP}\xi = \sum_{k=-M}^{P}\sum_{j=0}^{N} a(k,j)\xi(k,j),$$

   значення якого необхідно оцінити. За відомими значеннями M, P, N записати розмірність вектора $\boldsymbol{a}$.

2. Записати значення коефіцієнтів лінійного функціоналу у вигляді вектора $\boldsymbol{a}$, координати якого розташувати у наступному порядку

   $$\boldsymbol{a} = (a_{0,N}, a_{0,N-1}, \ldots, a_{0,0}, a_{-1,N}, a_{-1,N-1}, \ldots, a_{-1,0}, a_{1,N}, a_{1,N-1}, ..., \\ a_{1,0}, \ldots, a_{-M,N}, \ldots, a_{-M,0}, a_{P,N}, \ldots, a_{P,0}).$$

3. Якщо спектральні щільності полів відомі, то

   а) у випадку корельованих полів розкласти в ряд Фур'є функції

   $$\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}, \quad \frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)},$$

   та сформувати з коефіцієнтів Фур'є матриці B, D з елементами

   $$b_{kj} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}e^{-i(k\lambda+j\mu)}d\lambda d\mu,$$

   $$d_{kj} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) + f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}e^{-i(k\lambda+j\mu)}d\lambda d\mu.$$

Для визначення порядку розташування елементів у матриці B потрібно спочатку сформувати вектор

$$\boldsymbol{b} = (b_{0,0}, b_{0,1}, \ldots, b_{0,N}, b_{1,0}, b_{1,1}, \ldots, b_{1,N}, b_{-1,0}, b_{-1,1}, \ldots, \\ b_{-1,N}, \ldots, b_{l,0}, b_{l,1}, \ldots, b_{l,N}),$$

потім подвійну матрицю

$$\begin{pmatrix} b_{0,0}^{0,0} & \ldots & b_{0,N}^{0,0} & b_{1,0}^{0,0} & \ldots & b_{1,N}^{0,0} & b_{-1,0}^{0,0} & \ldots & b_{-1,N}^{0,0} & \ldots & b_{l,N}^{0,0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{0,0}^{0,N} & \ldots & b_{0,N}^{0,N} & b_{1,0}^{0,N} & ... & b_{1,N}^{0,N} & b_{-1,0}^{0,N} & \ldots & b_{-1,N}^{0,N} & \ldots & b_{l,N}^{0,N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{0,0}^{l,0} & \ldots & b_{0,N}^{l,0} & b_{1,0}^{l,0} & \ldots & b_{1,N}^{l,0} & b_{-1,0}^{l,0} & \ldots & b_{-1,N}^{l,0} & \ldots & b_{l,N}^{l,0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{0,0}^{l,N} & \ldots & b_{0,N}^{l,N} & b_{1,0}^{l,N} & \ldots & b_{1,N}^{l,N} & b_{-1,0}^{l,N} & \ldots & b_{-1,N}^{l,N} & \ldots & b_{l,N}^{l,N} \end{pmatrix}$$

і, нарешті, матрицю B з елементами $b_{s,t}^{k,j} = b_{s-k,t-j}$, тобто

$$B = \begin{pmatrix} b_{0,0} & \ldots & b_{0,N} & \ldots & \ldots & b_{l,0} & \ldots & b_{l,N} \\ \ldots & b_{0,0} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{0,-N} & \ldots & b_{0,0} & \ldots & \ldots & b_{l,-N} & \ldots & b_{l,0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{-l,0} & \ldots & b_{-l,N} & \ldots & \ldots & b_{0,0} & \ldots & b_{0,N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_{0,0} & \ldots \\ b_{-l,-N} & \ldots & b_{-l,0} & \ldots & \ldots & b_{0,-N} & \ldots & b_{0,0} \end{pmatrix}$$

Аналогічно складається матриця D з компонентами $d_{s,t}^{k,j} = d_{s-k,t-j}$.

б) у випадку некорельованих полів формуються матриці B та D з елементами

$$b_{kj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} \frac{1}{f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)} d\lambda,$$

$$d_{kj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} \frac{f(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu) + g(\lambda,\mu)} d\lambda,$$

відповідно; порядок розташування елементів визначається таким самим чином як для випадку корельованих полів.

в) у випадку, коли поле спостерігається без шуму формується лише матриця B з коефіцієнтами Фур'є функції $f^{-1}(\lambda,\mu)$:

$$b_{kj} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda}\frac{1}{f(\lambda,\mu)}d\lambda; \quad k,j = 0,1,...,N.$$

4. Розв'язати систему лінійних рівнянь відносно вектора $\boldsymbol{c}$, яка має вигляд

$$D\boldsymbol{a} = B\boldsymbol{c}$$

при спостереженні поля із шумом та

$$\boldsymbol{a} = B\boldsymbol{c}$$

у випадку, коли поле спостерігається без шуму.

У тому випадку, коли область K має вигляд, відмінний від того, що зазначений у пункті 1, то розташування елементів у матрицях D, B не формалізується. Одержуємо наступну систему рівнянь для знаходження c_{kj}, $(k,j) \in K$:

$$\sum_{(u,v)\in K} a_{uv} d_{k-u,j-v} = \sum_{(u,v)\in K} c_{uv} b_{k-u,j-v}.$$

1. Знаходимо спектральну характеристику оцінки та середньоквадратичну похибку за формулами (1.4),(1.5) у випадку корельованих полів, за формулами (1.11),(1.12) – у випадку некорельованих полів, та (1.16), (1.17) у тому випадку коли поле спостерігається без шуму.

2. Якщо спектральні щільності полів невідомі, але належать деякому класу спектральної невизначеності, то розв'язуємо задачу на умовний екстремум (1.21) або (1.22) за відсутністю шуму. Комп'ютерна реалізація здійснена для класу $D = D_{-0}(\lambda)$. Є можливість виводу на друк графіку найменш сприятливої спектральної щільності.

Розглянемо декілька прикладів для ілюстрації застосування приведеного алгоритму.

Приклад 4.1. Нехай випадкове поле $\zeta(u,v) = \xi(u,v) + \eta(u,v)$ спостерігається в точках множини $(u,v) \in Z \times (Z\backslash\{0,1\})$.

Нехай спектральні щільності задаються наступним чином

$$f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu) = \frac{A_0 B_0}{\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2\left|e^{i\mu}-\beta_2\right|^2}, \quad |\beta_1| < 1, |\beta_2| < 1,$$

$$f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu)=\frac{\left|e^{i\lambda}-\alpha_1\right|^2\left|e^{i\mu}-\alpha_2\right|^2}{\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2\left|e^{i\mu}-\beta_2\right|^2},\quad |\alpha_1|<1,|\alpha_2|<1.$$

Задача полягає в тому, щоб оцінити значення функціоналу

$$A_\xi=a(0,1)\xi(0,1)+a(0,0)\xi(0,0)+a(-1,1)\xi(-1,1)+$$
$$a(-1,0)\xi(-1,0)+a(1,1)\xi(1,1)+a(1,0)\xi(1,0).$$

Маємо

$$A(\lambda,\mu)=a(\lambda,0)+a(\lambda,1)e^{i\mu},$$

де

$$a(\lambda,0)=a(-1,0)e^{-i\lambda}+a(0,0)+a(1,0)e^{i\lambda},$$
$$a(\lambda,1)=a(-1,1)e^{-i\lambda}+a(0,1)+a(1,1)e^{i\lambda}.$$

Обчислюємо коефіцієнти Фур'є для функцій

$$\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)},\quad\frac{f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}:$$

$$\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)}=\frac{1}{A_0B_0}\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2\left|e^{i\mu}-\beta_2\right|^2=$$
$$(1/A_0B_0)\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2\left(1+\beta_2^2-\beta_2e^{-i\mu}-\beta_2e^{i\mu}\right)=$$
$$=b(\lambda,0)+b(\lambda,-1)e^{-i\mu}+b(\lambda,1)e^{i\mu},$$

$$f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu)/f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)=(1/A_0B_0)\left|e^{i\lambda}-\alpha_1\right|^2\left|e^{i\mu}-\alpha_2\right|^2=$$

$$=(1/A_0B_0)\left|e^{i\lambda}-\alpha_1\right|^2\left(1+\alpha_2^2-\alpha_2e^{-i\mu}-\alpha_2e^{i\mu}\right)=$$
$$=d(\lambda,0)+d(\lambda,-1)e^{-i\mu}+d(\lambda,1)e^{i\mu},$$

де

$$b(\lambda,0)=(1/A_0B_0)\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2\left(1+\beta_2^2\right),$$
$$b(\lambda,-1)=b(\lambda,1)=(1/A_0B_0)\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2(-\beta_2),$$
$$d(\lambda,0)=(1/A_0B_0)\left|e^{i\lambda}-\alpha_1\right|^2\left(1+\beta_2^2\right),$$
$$d(\lambda,-1)=d(\lambda,1)=(1/A_0B_0)\left|e^{i\lambda}-\alpha_1\right|^2(-\alpha_2).$$

З системи

$$D(\lambda)A_N(\lambda)=B(\lambda)C_N(\lambda),$$

яка у матричному запису має вигляд

$$\begin{pmatrix} d(\lambda,0) & d(\lambda,-1) \\ d(\lambda,1) & d(\lambda,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(\lambda,0) \\ a(\lambda,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(\lambda,0) & b(\lambda,-1) \\ b(\lambda,1) & b(\lambda,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\lambda,0) \\ c(\lambda,1) \end{pmatrix},$$

знаходимо вектор $C_N(\lambda) = (c(\lambda,0), c(\lambda,1))$.

Знаходимо спектральну характеристику оптимальної лінійної оцінки значення функціоналу за формулою

$$h(\lambda,\mu) = \frac{A_N(f_{\xi\xi}+f_{\xi\eta})}{f_{\zeta\zeta}} - \frac{C_N}{f_{\zeta\zeta}} =$$

$$= [a(\lambda,0)d(\lambda,-1) - c(\lambda,0)b(\lambda,-1)]\, e^{-i\mu} +$$
$$+ [a(\lambda,1)d(\lambda,1) - c(\lambda,1)b(\lambda,1)]\, e^{2i\mu}. \qquad \diamondsuit$$

Приклад 4.2. Нехай випадкове поле $\xi(u,v)$ спостерігається без шуму в точках множини $(u,v) \in Z \times (Z \backslash \{0,1\})$.

Нехай спектральна щільність задається наступним чином

$$f(\lambda,\mu) = f_1(\lambda) f_2(\mu) = \frac{B_0}{\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2 \left|e^{i\mu}-\beta_2\right|^2}, \quad |\beta_1| < 1, |\beta_2| < 1,$$

де

$$f_1(\lambda) = \frac{\sqrt{B_0}}{\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2}, \quad f_2(\mu) = \frac{\sqrt{B_0}}{\left|e^{i\mu}-\beta_2\right|^2}.$$

Для оцінки функціонала

$$A_2\xi = a(-1,1)\xi(-1,1) + (-1,0)\xi(-1,0) + a(1,1)\xi(1,1) + a(1,0)\xi(1,0),$$

для якого

$$A(\lambda,\mu) = a(\lambda,0) + a(\lambda,1)e^{i\mu},$$

де

$$a(\lambda,0) = a(-1,0)e^{-i\lambda} + a(1,0)e^{i\lambda},$$
$$a(\lambda,1) = a(-1,1)e^{-i\lambda} + a(1,1)e^{i\lambda},$$

обчислимо коефіцієнти Фур'є функції $1/f(\lambda,\mu)$

$$1/f(\lambda,\mu) = (1/B_0)\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2 \left|e^{i\mu}-\beta_2\right|^2 =$$

$$= (1/B_0)\left|e^{i\lambda}-\beta_1\right|^2 \left(1+\beta_2^2-\beta_2 e^{-i\mu}-\beta_2 e^{i\mu}\right) =$$
$$= \frac{1}{f_1(\lambda)}(b(0) + b(-1)e^{-i\mu} + b(1)e^{i\mu}),$$

$$b(0) = 1 + \beta_2^2, b(-1) = b(1) = -\beta_2.$$

З системи рівнянь

$$A_N(\lambda) = B_2 C_N(\lambda),$$

де

$$B_2 = \begin{pmatrix} b(0) & b(-1) \\ b(1) & b(0) \end{pmatrix}$$

одержуємо вектор

$$C_N(\lambda) = (c(\lambda,0), c(\lambda,1)),$$

де

$$c(\lambda,0) = \frac{b(0)a(\lambda,0) - b(1)a(\lambda,1)}{b(0)^2 - b(1)^2}, \quad c(\lambda,1) = \frac{b(1)a(\lambda,1) - b(0)a(\lambda,0)}{b(0)^2 - b(1)^2}.$$

Спектральну характеристику оптимальної лінійної оцінки значення функціоналу знаходимо за формулою

$$h(\lambda,\mu) = a(\lambda,0) + a(\lambda,1)e^{i\mu} -$$

$$-\frac{1}{f_1(\lambda)}\left(c(\lambda,0) + c(\lambda,1)e^{-i\mu}\right)\left(b(0) + b(1)e^{i\mu} + b(-1)e^{-i\mu}\right) =$$
$$= \left(-\frac{1}{f_1(\lambda)}c(\lambda,0)b(-1)\right)e^{-i\mu} + \left(-\frac{1}{f_1(\lambda)}c(\lambda,1)b(1)\right)e^{2i\mu}.$$

$\diamondsuit$

Приклад 4.3. Нехай на площині спостерігається однорідне випадкове поле з корельованим шумом, значення якого є недосяжними в області

$$K = \{(u,v) : u \in \{-1,0,1\}, v \in \{0,1\}\}.$$

Потрібно оцінити функціонал від невідомих значень поля

$$A_\xi = 5\xi(0,1) + 25\xi(0,0) + \xi(-1,1) + 2\xi(-1,0) + 4\xi(1,1) + 10\xi(1,0)$$

якщо відомі наступні спектральні щільності полів

$$f_{\zeta\zeta} = 1/(10 + 4\cos\mu + 1,6\cos\lambda + 0,8\cos(\lambda+\mu) + 0,8\cos(\lambda-\mu)),$$

$$f_{\xi\zeta} = \frac{(30 + 28\cos\mu + 22\cos\lambda + 12\cos(\lambda+\mu) + 8\cos(\lambda-\mu))}{(10 + 4\cos\mu + 1,6\cos\lambda + 0,8\cos(\lambda+\mu) + 0,8\cos(\lambda-\mu))}.$$

Спочатку обчислюємо коефіцієнти Фур'є для функцій

$$\frac{1}{f_{\zeta\zeta}}, \quad \frac{f_{\xi\zeta}}{f_{\zeta\zeta}}.$$

Спеціальним чином складаємо вектор $\boldsymbol{a}$ з коефіцієнтів функціоналу A_ξ та матриці D та B з коефіцієнтів Фур'є.
З системи лінійних рівнянь $D\boldsymbol{a} = B\boldsymbol{c}$ одержуємо вектор $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{c} = (37,8; 82,5; 9,4; 27,9; 29,9; 50,9)$$

Шукаємо спектральну характеристику за формулою

$$h(\lambda,\mu) = \frac{A_N(f_{\xi\xi} + f_{\xi\eta})}{f_{\zeta\zeta}} - \frac{C_N}{f_{\zeta\zeta}}.$$

Шукана оцінка функціоналу

$$\hat{A}_N\xi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda,\mu)\, Z_\zeta(d\lambda, d\mu) =$$

$$= 73,222\xi(2,0) + 59,629\xi(2,1) + 12,012\xi(2,2) + 10,905\xi(1,2) +$$
$$+ 10,905\xi(1,2) + 0,48\xi(0,2) + 0,071\xi(-1,2) + 0,245\xi(-2,2) +$$
$$+ 0,329\xi(-2,1) + 1,922\xi(-2,0) + 0,838\xi(-2,-1) + 89,177\xi(-1,-1) +$$
$$+ 221,137\xi(0,-1) + 105,01\xi(1,-1) + 19,605\xi(2,-1). \qquad \diamondsuit$$

Приклад 4.4. Нехай розглядається однорідне поле $\xi(s,t)$ з кореляційною функцією

$$R(s,t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} e^{-\alpha|s|}.$$

Тоді спектральна щільність цього поля

$$f(\lambda,\mu) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R(t,s) e^{-i\lambda t} e^{-i\mu s} dt ds =$$

$$= \frac{\sigma^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-i\lambda t} e^{-\beta|s|} e^{-i\mu s} dt ds =$$

$$= \frac{\sigma^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} e^{-\beta|s|} e^{-i\mu s} ds =$$

$$= \frac{\sigma^2}{4\pi^2}\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}\frac{\beta}{\beta^2+\mu^2} = f_1(\lambda) f_2(\mu)$$

Умови ортогональності у гільбертовому просторі

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i(s\lambda+t\mu)}-h(\lambda,\mu))f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu))e^{-i(u\lambda+v\mu)}d\lambda d\mu=0$$

можна записати у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda,\mu)f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)e^{-i(u\lambda+v\mu)}d\lambda d\mu=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)e^{-i((s-u)\lambda+(v-t)\mu)}d\lambda d\mu,$$

або

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda,\mu)f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)e^{-iv\mu}d\mu=R(s-u,v-t)$$

для всіх $(u,v)\in R\times(R\backslash[-T,T])$.
Інтегральне рівняння виду

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)f_{\zeta\zeta}(\mu)e^{-it\mu}d\mu=R(t)$$

має розв'язок $h(\mu)$ з простору $L_2^T(f)$, який шукається у вигляді

$$h(\mu)=\int_{-T}^{T}c(t)e^{it\mu}dt,$$

де

$$c(t)=\frac{1}{2\pi}Q(\frac{d}{dt})Q(-\frac{d}{dt})x(t),x(t)=\frac{R(t)}{p_0^2}$$

для випадку, коли $m=0$, m,n - степені многочленів канонічної факторизації спектральної щільності.
Отже для для оцінки $\hat{\xi}(s,t)$

$$h(\lambda,\mu)=\frac{1}{f_1(\lambda)}e^{is\lambda}\int_{-T}^{T}c(t)e^{it\mu}dt=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\alpha e^{is\lambda}}{\alpha^2+\lambda^2}\left(e^{-i\mu T}\frac{sh\alpha(T-t)}{sh2\alpha T}+e^{i\mu T}\frac{sh\alpha(T+t)}{sh2\alpha T}\right)$$

$$\hat{\xi}(s,t)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}\left(\frac{sh\alpha(T-t)}{sh2\alpha T}\xi(s,-T)+\frac{sh\alpha(T+t)}{sh2\alpha T}\xi(s,T)\right). \qquad \diamondsuit$$

Приклад 4.5. Нехай маємо поле неперервного аргументу, що спостерігається у дискретних точках $\mathbb{Z}$, за виключенням точок з координатами $\{(k,j)\,:\,k,j=0,1,2\}$. Задача полягає в тому щоб оцінити значення функціоналу

$$A_{22}\xi=\xi(0,0)+2\xi(0,1)+4\xi(1,0)+3\xi(1,1)+\xi(0,2)+$$

$$+2\xi(1,2)+\xi(2,0)+\xi(2,1)+0.5\xi(2,2)$$

за умови, що спектральна щільність поля невідома, а визначений лише клас допустимих спектральних щільностей, що описується множиною

$$D_P^Q=\left\{f_\xi^0(\lambda,\mu)\mid\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_\xi(0,0,\lambda,\mu)\cos(p\lambda)\cos(q\mu)d\lambda d\mu=r_{PQ}\right\},$$

$P=1,\ Q=1, N=2, M=2,\ r_{00}=1, r_{01}=r_{0,-1}=2,\ r_{10}=r_{-10}=2,$ $r_{11}=r_{-1,-1}=r_{-1,1}=r_{1,-1}=4.$
Спочатку з системи для $s=0,1; t=0,1$ знайдемо $c_{kj},\ k=0,1; j=0,1$:

$$\begin{cases} c_{00}+2c_{01}+2c_{10}+4c_{11}=1\\ 2c_{00}+1c_{01}+4c_{10}+2c_{11}=2\\ 4c_{00}+2c_{01}+2c_{10}+1c_{11}=3\\ 2c_{00}+4c_{01}+1c_{10}+2c_{11}=4\end{cases}$$

Маємо $c_{00}=-\frac{7}{9}, c_{01}=\frac{14}{9}, c_{10}=\frac{8}{9}, c_{11}=-\frac{7}{9}$.
Далі, поклавши $c_{01}=c_{20}=c_{12}=c_{21}=c_{22}=0$, запишемо систему $s=0,2; t=0,2$ для визначення $r_{02}, r_{20}, r_{21}, r_{12}, r_{22}$:

$$\begin{cases} c_{00}r_{02}+c_{01}r_{01}+c_{10}r_{-12}+c_{11}r_{-1,1}=a_{02}\\ c_{00}r_{12}+c_{01}r_{11}+c_{10}r_{02}+c_{11}r_{02}=a_{12}\\ c_{00}r_{20}+c_{01}r_{2,-1}+c_{10}r_{10}+c_{11}r_{1,-1}=a_{20}\\ c_{00}r_{21}+c_{01}r_{20}+c_{10}r_{11}+c_{11}r_{10}=a_{21}\\ c_{00}r_{22}+c_{01}r_{21}+c_{10}r_{12}+c_{11}r_{11}=a_{22}\end{cases}$$

Враховуючи, що $r_{00}, r_{01}, r_{10}, r_{11}$ та $a_{02}, a_{12}, a_{20}, a_{21}, a_{22}$ – задані, з цієї системи знаходимо

$$r_{02}=-\frac{43}{5},\ r_{12}=-\frac{32}{5},\ r_{20}=\frac{1}{7},\ r_{21}=\frac{11}{7},\ r_{22}=-\frac{59}{7}. \qquad \diamondsuit$$

Отже, всі коефіцієнти для визначення найменш сприятливої щільності знайдені.

4.2. Додатки 2. Задачі екстраполяції випадкових полів

Приклад 4.6. Нехай у нижній півплощині спостерігається випадкове однорідне поле $\xi(k,j)$ із спектральною щільністю:

$$f(\lambda,\mu)=\frac{\sigma^4}{4\pi^2}\frac{1}{\left|1-\alpha\, e^{-i\lambda}\right|^2}\frac{1}{\left|\ 1-\beta\, e^{-i\mu}\ \right|^2}=f_1(\lambda)f_2(\mu),$$

$$f_1(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{\left|1-\alpha\, e^{-i\lambda}\right|^2};\quad f_2(\mu)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{\left|\ 1-\beta\, e^{-i\mu}\ \right|^2},\ \ |\alpha|<1,\ |\beta|<1,$$

Знайдемо оцінку функціонала

$$A_+\xi=\sum_{k=-1}^{1}\sum_{j=0}^{1}a(k,j)\xi(k,j)$$

двома способами.

I спосіб. За формулою (2.17).

Знайдемо розклад в ряд Фур'є функції

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}r(\lambda,j)e^{ij\mu}.$$

Маємо

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)}=\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\alpha\, e^{-i\lambda}\right|^2\cdot(1+\beta^2-\beta\, e^{-i\mu}-\beta\, e^{i\mu})=$$

$$=r(\lambda,0)+r(\lambda,-1)e^{-i\mu}+r(\lambda,1)e^{i\mu},$$

де

$$r(\lambda,0)=\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2\cdot(1+\beta^2);$$

$$r(\lambda,1)=r(\lambda,-1)=-\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2\beta;$$
$r(\lambda,k)=0\ ,\ k\in Z, k\neq 0,1,-1.$

Оптимальну лінійну оцінку невідомого значення функціонала

$$A_+(\lambda,\mu)=a(\lambda,0)+a(\lambda,1)e^{i\mu},$$

де

$$a(\lambda,0)=a(-1,0)e^{-i\lambda}+a(0,0)+a(1,0)e^{i\lambda},$$

$$a(\lambda,1)=a(-1,1)e^{-i\lambda}+a(0,1)+a(1,1)e^{i\lambda},$$

можна обчислити за формулою (2.17). Враховуючи, що

$$a(\lambda,0)=r(\lambda,0)c(\lambda,0)+r(\lambda,-1)c(\lambda,1)$$

$$\begin{gathered}
a(\lambda,1)=r(\lambda,0)c(\lambda,1)+r(\lambda,1)c(\lambda,0)+r(\lambda,-1)c(\lambda,2)\\
0=r(\lambda,0)c(\lambda,2)+r(\lambda,1)c(\lambda,1)+r(\lambda,-1)c(\lambda,3)\\
0=r(\lambda,0)c(\lambda,k)+r(\lambda,1)c(\lambda,k-1)+r(\lambda,-1)c(\lambda,k+1),\\
k\in Z_+, k\neq 0,1;
\end{gathered}$$

маємо

$$h(f)=a(\lambda,0)+a(\lambda,1)e^{i\mu}-(r(\lambda,-1)c(\lambda,0)e^{-i\mu}+r(\lambda,-1)c(\lambda,1)+$$

$$\begin{gathered}
+r(\lambda,-1)c(\lambda,2)e^{-i\mu}+r(\lambda,-1)c(\lambda,3)e^{-2i\mu}+\cdots\\
+r(\lambda,0)c(\lambda,0)+r(\lambda,0)c(\lambda,1)e^{i\mu}+r(\lambda,0)c(\lambda,2)e^{2i\mu}+r(\lambda,0)c(\lambda,3)e^{3i\mu}+\cdots\\
+r(\lambda,1)c(\lambda,0)e^{i\mu}+r(\lambda,1)c(\lambda,1)e^{2i\mu}+r(\lambda,1)c(\lambda,2)e^{2i\mu}+r(\lambda,1)c(\lambda,3)e^{3i\mu}+...)\\
=-r(\lambda,-1)c(\lambda,0)e^{-i\mu},
\end{gathered}$$

де

$$c(\lambda,0)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(B^{-1}(\lambda)a(\lambda)\right)(j),$$

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}
r(\lambda,0) & r(\lambda,-1) & 0 & 0 & 0 & ... & 0\\
r(\lambda,1) & r(\lambda,0) & r(\lambda,-1) & 0 & 0 & ... & 0\\
0 & r(\lambda,1) & r(\lambda,0) & r(\lambda,-1) & 0 & ... & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0\\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r(\lambda,1) & r(\lambda,0)
\end{pmatrix}=$$

$$
= K_0(\lambda) \begin{pmatrix} 1+\beta^2 & -\beta & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\beta^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix}_{N\times N}
$$

де

$$
K_0(\lambda) = \frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2 = \frac{2\pi}{\sigma^2} f_1^{-1}(\lambda).
$$

Тоді визначник $n-$го порядку матриці B дорівнює

$$
\Delta_B = K_0^N(\lambda)\frac{1-\beta^{2(N+1)}}{1-\beta},
$$

Оскільки

$$
\Delta_n = \Delta_{n-1}(1+\beta^2) - \beta^2\Delta_{n-2}.
$$

За формулами Крамера

$$
c(\lambda,0)_N = \frac{a(\lambda,0)(1-\beta^{2N}) + a(\lambda,1)\beta(1-\beta^{2(N-1)})}{K_0(\lambda)(1-\beta^{2(N+1)})}
$$

$$
c(\lambda,0) = \lim_{N\to\infty} c(\lambda,0)_N = (a(\lambda,0) + a(\lambda,1)\beta)/K_0(\lambda).
$$

Отже спектральна характеристика оптимальної оцінки має вигляд

$$
h(\lambda,\mu) = e^{-i\mu}\beta(a(\lambda,0) + a(\lambda,1)\beta) =
$$

$$
= e^{-i\mu-i\lambda}\beta a(-1,0) + e^{-i\mu}\beta a(0,0) + e^{-i\mu+i\lambda}\beta a(1,0) +
$$
$$
+ e^{-i\lambda-i\mu}\beta^2 a(-1,1) + e^{-i\mu}\beta^2 a(0,1) + e^{i\lambda-i\mu}\beta^2 a(1,1).
$$

Шукана оцінка функціоналу має вигляд

$$
\hat{A}_+\xi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda,\mu)\, Z_\xi(d\lambda,d\mu) =
$$

$$
= \xi(-1,-1)(\beta a(-1,0) + \beta^2 a(-1,1)) + \xi(0,-1)(\beta a(0,0) + \beta^2 a(0,1)) +
$$
$$
+ \xi(1,-1)(\beta a(1,0) + \beta^2 a(1,1)).
$$

Отже, оцінка залежить не від усіх значень поля у нижній півплощині, а лише від значень поля $\xi(-1,-1), \xi(0,-1), \xi(1,-1)$.

II спосіб. За формулою (2.18).
Якщо

$$f(\lambda,\mu)=\frac{\sigma^4}{4\pi^2}\frac{1}{|1-\alpha\, e^{-i\lambda}|^2}\frac{1}{|\ 1-\beta\, e^{-i\mu}\ |^2},\quad |\alpha|<1,\ \ |\beta|<1,$$

тоді

$$d(\lambda,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma}{1-\alpha\, e^{-i\lambda}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma}{1-\beta\, e^{-i\mu}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma}{1-\alpha\, e^{-i\lambda}}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta e^{-i\mu})^k=\sqrt{f_1(\lambda)}d_2(\mu)$$

і оператор $A(\lambda)d$, заданий співвідношенням (2.3) має вигляд

$$A(\lambda)d=\begin{pmatrix} a(\lambda,0) & a(\lambda,1)\\ a(\lambda,1) & 0\end{pmatrix}\frac{\sigma^2}{2\pi(1-\alpha e^{-i\lambda})}\begin{pmatrix}1\\ \beta\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\pi(1-\alpha e^{-i\lambda})}\begin{pmatrix} a(\lambda,0)+\beta a(\lambda,1)\\ a(\lambda,1)\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$r\ (\lambda,\mu)=\sqrt{f_1(\lambda)}\sum_{j=0}^{\infty}(A(\lambda)d_2)\,(j)\,e^{ij\mu}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma}{1-\alpha e^{-i\lambda}}(a(\lambda,0)+\beta a(\lambda,1)+a(\lambda,1)e^{i\mu}).$$

Тоді

$$h(f)=A_+\,(\lambda,\mu)-r\ (\lambda,\mu)\,d_2^{-1}\,(\mu)=$$
$$a(\lambda,0)+a(\lambda,1)e^{i\mu}-(a(\lambda,0)+\beta a(\lambda,1)+a(\lambda,1)e^{i\mu})(1-\beta e^{-i\mu})=$$
$$=\beta e^{-i\mu}(a(\lambda,0)+\beta a(\lambda,1)).$$

Оцінка функціонала має вигляд

$$\hat{A}_+\xi=\xi(-1,-1)(\beta a(-1,0)+\beta^2 a(-1,1))+\xi(0,-1)(\beta a(0,0)+\beta^2 a(0,1))+$$

$$+\xi(1,-1)(\beta a(1,0)+\beta^2 a(1,1))\qquad\diamondsuit$$

Отже результати, отримані цими двома способами співпадають і узгоджуються з результатами Ю.А. Розанова та А.М. Яглома, які базуються на властивостях аналітичних функцій і пошуку спектральної характеристики як функції, що задовольняє певним властивостям.

Приклад 4.7. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання невідомого значення функціонала

$$A\xi = \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} a(k,j)\xi(k,j)$$

за спостереженнями випадкового однорідного поля $\xi(u,v), (u,v) \in Z^2 \backslash Z_+ \times Z_+$, спектральна щільність якого, як і в прикладі 4.6, має вигляд

$$f(\lambda,\mu) = \frac{\sigma^4}{4\pi^2} \frac{1}{|1-\alpha\, e^{-i\lambda}|^2} \frac{1}{|\ 1-\beta\, e^{-i\mu}\ |^2}.$$

Тоді

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)} = \frac{4\pi^2}{\sigma^2}(1+\alpha^2-\alpha\, e^{-i\lambda}-\alpha\, e^{i\lambda})(1+\beta^2-\beta\, e^{-i\mu}-\beta\, e^{i\mu}) =$$

$$= \frac{4\pi^2}{\sigma^2}((1+\alpha^2)(1+\beta^2)-\alpha(1+\beta^2)\, e^{-i\lambda}-\alpha(1+\beta^2)\, e^{i\lambda}-(1+\alpha^2)\beta e^{-i\mu}+$$

$$+\alpha\beta\, e^{-i(\lambda+\mu)}+\alpha\beta\, e^{i(\lambda-\mu)}-(1+\alpha^2)\beta e^{i\mu}+\alpha\beta\, e^{i(-\lambda+\mu)}+\alpha\beta\, e^{i(\lambda+\mu)})$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є функції $\frac{1}{f(\lambda,\mu)}$:

$$r_{00} = \frac{4\pi^2}{\sigma^2}(1+\alpha^2)(1+\beta^2);$$

$$r_{10} = r_{-10} = -\frac{4\pi^2}{\sigma^2}\alpha\ (1+\beta^2); r_{0,-1} = r_{01} = -\frac{4\pi^2}{\sigma^2}(1+\alpha^2)\beta;$$

$$r_{1,-1} = r_{-1,1} = r_{1,1} = r_{-1,-1} = \frac{4\pi^2}{\sigma^2}\alpha\,\beta;$$

$$r_{kj} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f(\lambda,\mu)}e^{i(k\lambda+j\mu)}d\lambda d\mu = 0,$$

$$k \in Z, k \neq 0, 1-1; \quad j \in Z, j \neq 0, 1; -1.$$

Оскільки

$$C_+\,(\lambda,\mu)\, f^{-1}(\lambda,\mu) =$$

$$\Big(r_{00}+r_{01}e^{i\mu}+r_{-10}e^{-i\lambda}+r_{-11}e^{i(-\lambda+\mu)}+r_{10}e^{i\lambda}+$$

$$+r_{11}e^{i(\lambda+\mu)}+r_{0,-1}e^{-i\mu}+r_{-1-1}e^{i(-\lambda-\mu)}+r_{1,-1}e^{i(\lambda-\mu)}\Big)\times$$

$$\times\left(\sum_{k=0} c_{0k}e^{i\mu k}+\sum_{k=0} c_{1k}e^{i\lambda+i\mu k}+\sum_{k=0} c_{2k}e^{2i\lambda+i\mu k}+\sum_{k=0} c_{3k}e^{3i\lambda+i\mu k}+\dots\right)$$

та враховуючи, що

$$a_{01}=r_{00}c_{01}+r_{01}c_{00}+r_{-10}c_{11}+r_{-11}c_{10}+r_{0,-1}c_{02}+r_{-1-1}c_{12},$$

$$a_{00}=r_{00}c_{00}+r_{-10}c_{10}+r_{0,-1}c_{01}+r_{-1-1}c_{11},$$
$$a_{11}=r_{00}c_{11}+r_{01}c_{10}+r_{-10}c_{21}+r_{-11}c_{20}+r_{10}c_{01}+$$
$$+r_{11}c_{00}+r_{0,-1}c_{12}+r_{-1-1}c_{22}+r_{1,-1}c_{02},$$
$$a_{10}=r_{00}c_{10}+r_{-10}c_{20}+r_{10}c_{00}+r_{0,-1}c_{11}+r_{-1-1}c_{21}+r_{1,-1}c_{01},$$

$$0=\sum_{k=2}^{\infty}a_{0k}=r_{00}\sum_{k=2}^{\infty}c_{0k}+r_{01}\sum_{k=1}^{\infty}c_{0k}+r_{-10}\sum_{k=2}^{\infty}c_{1k}+r_{-11}\sum_{k=1}^{\infty}c_{1k}+$$
$$+r_{0,-1}\sum_{k=3}^{\infty}c_{0k}+r_{-1-1}\sum_{k=3}^{\infty}c_{1k},$$

$$0=\sum_{k=2}^{\infty}a_{1k}=r_{00}\sum_{k=2}^{\infty}c_{1k}+r_{01}\sum_{k=1}^{\infty}c_{1k}+r_{-10}\sum_{k=2}^{\infty}c_{2k}+r_{-11}\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k}+$$
$$+r_{10}\sum_{k=2}^{\infty}c_{0k}+r_{11}\sum_{k=1}^{\infty}c_{0k}+r_{0,-1}\sum_{k=3}^{\infty}c_{1k}+r_{-1-1}\sum_{k=3}^{\infty}c_{2k}+r_{1,-1}\sum_{k=3}^{\infty}c_{0k},$$

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}=r_{00}\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}+r_{01}\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}+r_{-10}\sum_{k=0}^{\infty}c_{3k}+r_{-11}\sum_{k=0}^{\infty}c_{3k}+$$
$$+r_{10}\sum_{k=0}^{\infty}c_{1k}+r_{11}\sum_{k=0}^{\infty}c_{1k}+r_{0,-1}\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k}+r_{-1-1}\sum_{k=1}^{\infty}c_{3k}+r_{1,-1}\sum_{k=1}^{\infty}c_{1k},$$

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk},\ n=\pm3,\pm4,\dots,$$

маємо

$$h(f)=r_{0,-1}e^{-i\mu}\sum_{l=0}^{\infty}c_{l0}e^{il\lambda}+r_{-1,1}e^{-i(\lambda+\mu)}(\sum_{r=1}^{\infty}c_{r0}e^{ir\lambda}+\sum_{j=0}^{\infty}c_{0j}e^{ij\mu})+$$

$$+r_{1,-1}e^{i(\lambda-\mu)}\sum_{l=0}^{\infty}c_{l0}e^{il\lambda}+r_{-1,0}e^{-i\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}c_{0k}e^{ik\mu}+r_{-1,-1}e^{-i(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{\infty}c_{0k}e^{ik\mu}$$

$$=r_{0,-1}e^{-i\mu}c(\lambda,0)+r_{-1,-1}e^{-i(\lambda+\mu)}(c(\lambda,0)+c(0,\mu))+r_{1,-1}e^{i(\lambda-\mu)}c(\lambda,0)+$$

$$+r_{-1,0}e^{-i\lambda}c(0,\mu)+r_{-1,1}e^{-i(\lambda+\mu)}c(0,\mu)-r_{-1,-1}c_{00}e^{-i(\lambda+\mu)}=$$

$$=e^{-i\lambda}c(0,\mu)(r_{-1,-1}e^{-i\mu}+r_{-1,-0}+r_{-1,1}e^{-i\mu}))+$$

$$e^{-i\mu}c(\lambda,0)(r_{0,-1}+r_{-1,-1}e^{-i\lambda}+r_{1,-1}e^{i\lambda})-r_{-1,-1}c_{00}e^{-i(\lambda+\mu)}=$$

$$=e^{-i\mu}c(\lambda,0)\left(-\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\right)(\beta+\beta\alpha^2-\beta\alpha e^{-i\lambda}-\beta\alpha e^{i\lambda})+$$

$$+e^{-i\lambda}c(0,\mu)\left(-\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\right)(\beta+\beta\alpha^2-\beta\alpha e^{-i\mu}-\beta\alpha e^{i\mu})\left(-\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\right)\alpha\beta c_{00}e^{-i(\lambda+\mu)}=$$

$$=r(\lambda,-1)c(\lambda,0)e^{-i\mu}+r(-1,\mu)c(0,\mu)e^{-i\lambda}-r_{-1,-1}c_{00}e^{-i(\lambda+\mu)},$$

де

$$r(\lambda,-1)=-\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2\beta=-\frac{4\pi^2}{\sigma^4}(\beta+\beta\alpha^2-\beta\alpha e^{-i\lambda}-\beta\alpha e^{i\lambda})=K_0(\lambda)\beta;$$

$$r(-1,\mu)=-\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\beta e^{-i\mu}\right|^2\alpha=K_1(\mu)\alpha;$$

Зважаючи на те, що

$$c(\lambda,0)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(B^{-1}(\lambda)a(\lambda)\right)(j),$$

$$c(\lambda,0)=\lim_{N\to\infty}c(\lambda,0)_N=(a(\lambda,0)+a(\lambda,1)\beta)/K_0(\lambda),$$

$$c(\lambda,0)=(a(0,0)+a(1,0)e^{i\lambda}+\beta(a(0,1)+a(1,1)e^{i\lambda}))/K_0(\lambda),$$

$$K_0(\lambda)=\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2,$$

$$c(0,\mu)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(B^{-1}(\mu)a(\mu)\right)(j),$$

$$c(0,\mu)=\lim_{N\to\infty}c(0,\mu)_N=(a(0,\mu)+a(1,\mu)\alpha)/K_1(\mu),$$

$$K_1(\mu)=\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\beta e^{-i\mu}\right|^2,$$

маємо

$$c(0,0)=a(0,0)+\beta a(0,1)+\alpha a(1,0)+\alpha\beta a(1,1).$$

Спектральна характеристика оптимальної оцінки

$$h(\lambda,\mu)=e^{-i\mu}\beta(a(\lambda,0)+a(\lambda,1)\beta)-r_{-1,-1}c_{00}e^{-i(\lambda+\mu)}=$$

$$=\beta e^{-i\mu}(a(0,0)+\beta a(0,1))+\alpha e^{-i\lambda}(a(0,0)+\alpha a(0,1))+$$
$$+\beta e^{i\lambda-i\mu}(a(1,0)+\beta a(1,1))+\alpha e^{-i\lambda+i\mu}(a(0,1)+\alpha a(1,1))-$$
$$-\alpha\beta e^{-i\lambda-i\mu}(a(0,0)+\beta a(0,1)+\alpha a(1,0)+\alpha\beta a(1,1)).$$

Шукана оцінка функціонала

$$\hat{A}_{11}\xi=\beta(a(0,0)+\beta a(0,1))\xi(0,-1)+\alpha(a(0,0)+\alpha a(0,1))\xi(-1,0)+$$

$$+\beta(a(1,0)+\beta a(1,1))\xi(1,-1)+\alpha(a(0,1)+\alpha a(1,1))\xi(-1,1)-$$
$$-\alpha\beta(a(0,0)+\beta a(0,1)+\alpha a(1,0)+\alpha\beta a(1,1))\xi(-1,-1).$$

II спосіб. За формулою, що використовує факторизацію спектральної щільності. Якщо

$$f(\lambda,\mu)=\frac{\sigma^4}{4\pi^2}\frac{1}{|1-\alpha\,e^{-i\lambda}|^2}\frac{1}{|\,1-\beta\,e^{-i\mu}\,|^2},\ |\alpha|<1,\ |\beta|<1,$$

тоді

$$d(\lambda,\mu)=\frac{\sigma}{1-\alpha\,e^{-i\lambda}}\frac{\sigma}{1-\beta\,e^{-i\mu}}=\sigma^2\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha e^{-i\lambda})^k\sum_{k=0}^{\infty}(\beta e^{-i\mu})^k,$$

отже

$$d(0,0)=\sigma^2,\quad d(0,1)=\sigma^2\beta,$$
$$d(1,0)=\sigma^2\alpha,\quad d(1,1)=\sigma^2\alpha\beta.$$

Оператор $A(\lambda)d$, заданий співвідношенням (2.3), має вигляд

$$A(\lambda)d=\begin{pmatrix}a(0,0)&a(0,1)&a(1,0)&a(1,1)\\a(0,1)&0&a(1,1)&0\\a(1,0)&a(1,1)&0&0\\a(1,1)&0&0&0\end{pmatrix}\sigma^2\begin{pmatrix}1\\\beta\\\alpha\\\alpha\beta\end{pmatrix}=$$

$$\sigma^2\begin{pmatrix}a(0,0)+\beta a(0,1)+\alpha a(1,0)+\alpha\beta a(1,1)\\a(0,1)+\alpha a(1,1)\\a(1,0)+\beta a(1,1)\\a(1,1)\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$r\,(\lambda,\mu)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(A(\lambda)d(\lambda)\right)(j)\,e^{ij\mu}=$$
$$=\sigma^2(a(0,0)+\beta a(0,1)+\alpha a(1,0)+\alpha\beta a(1,1))+(a(0,1)+\alpha a(1,1))e^{i\mu}+$$
$$+(a(1,0)+\beta a(1,1))e^{i\lambda}+a(1,1)e^{i(\lambda+\mu)}).$$

Спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(f)=A_+\,(\lambda,\mu)-r\,(\lambda,\mu)\,d^{-1}\,(\lambda,\mu)=$$
$$=\beta e^{-i\mu}(a(0,0)+\beta a(0,1))+\alpha e^{-i\lambda}(a(0,0)+\alpha a(0,1))+$$
$$+\beta e^{i\lambda-i\mu}(a(1,0)+\beta a(1,1))+\alpha e^{-i\lambda+i\mu}(a(0,1)+\alpha a(1,1))-$$
$$-\alpha\beta e^{-i\lambda-i\mu}(a(0,0)+\beta a(0,1)+\alpha a(1,0)+\alpha\beta a(1,1)).$$

Шукана оцінка функціонала така

$$\hat{A}_{11}\xi=\beta(a(0,0)+\beta a(0,1))\xi(0,-1)+\alpha(a(0,0)+\alpha a(0,1))\xi(-1,0)+$$
$$+\beta(a(1,0)+\beta a(1,1))\xi(1,-1)++\alpha(a(0,1)+\alpha a(1,1))\xi(-1,1)-$$
$$-\alpha\beta(a(0,0)+\beta a(0,1)+\alpha a(1,0)+\alpha\beta a(1,1))\xi(-1,-1).\qquad\diamondsuit$$

Приклад 4.8. Нехай спостерігається випадкове однорідне поле з спектральною щільністю $f\,(\lambda,\mu)=f_1\,(\lambda)\,f_2\,(\mu)$, щільність $f_1(\lambda)$ фіксована,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f_1\,(\lambda)\,d\lambda={P_1}^2,$$

точне значення щільності $f_2\,(\mu)$ невідомо, але відомо, що вона належить класу D_f^0.

Для знаходження оптимальної лінійної оцінки невідомого значення функціоналу

$$A\xi=\sum_{k=-N}^{N}\sum_{j=0}^{1}a(k,j)\xi(k,j)$$

за спостереженнями $\xi(u,v)$, $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$, знайдемо власні значення оператора $A(\lambda)$ розв'язавши систему рівнянь

$$A(\lambda)\boldsymbol{d}=\nu\boldsymbol{d},$$

де оператор $A(\lambda)$ задається співвідношенням (2.3). Система рівнянь записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} a(\lambda,0) & a(\lambda,1) \\ a(\lambda,1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(0) \\ d(1) \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} d(0) \\ d(1) \end{pmatrix},$$

де

$$a(\lambda,0) = \sum_{k=-N}^{N} a(-k,0)e^{i\lambda k}, \quad a(\lambda,1) = \sum_{k=-N}^{N} a(-k,1)e^{i\lambda k}.$$

Нехай $N = 1$, $a(-k,0) = a(-k,1) = 1$, для $k = -1, 0, 1$.
Тоді

$$a(\lambda,0) = e^{-i\lambda} + 1 + e^{i\lambda} = \alpha(\lambda),\ a(\lambda,1) = e^{-i\lambda} + 1 + e^{i\lambda} = \alpha(\lambda)$$

Характеристичне рівняння матиме вигляд

$$\begin{vmatrix} a(\lambda,0)-\nu & a(\lambda,1) \\ a(\lambda,1) & -\nu \end{vmatrix} = 0$$

Звідки

$$\nu^2 - a(\lambda,0)\nu - a(\lambda,1)^2 = 0.$$

Отже найбільше власне значення

$$\nu_{\max}(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda) + \alpha(\lambda)\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha(\lambda).$$

Власний елемент, що відповідає найбільшому власному значенню має вигляд

$$\boldsymbol{d}^0(\lambda) = \sqrt{f_1(\lambda)} \left\{ S;\ S\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\}.$$

Константу S знайдемо з умови нормування

$$\| \boldsymbol{d}^0 \|^2 = \frac{S^2(10+2\sqrt{5})}{4} = P^2.$$

Отже

$$S = P\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},$$

$$\boldsymbol{d}^0(\lambda,\nu) = \sqrt{f_1(\lambda)}P \left\{ \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}};\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \right\}.$$

Найменш сприятлива щільність має вигляд

$$f(\lambda)=f_1(\lambda)|P|^2\left|\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}e^{-i\mu}\right|^2.$$

Для обчислення мінімаксної спектральної характеристики знайдемо $r\ (\lambda,\mu)$, $d_2{}^{-1}$

$$r\ (\lambda,\mu)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(A(\lambda)d_2\right)(j)\,e^{ij\mu}=$$

$$=a(\lambda,0)d(0)+a(\lambda,1)d(1)+a(\lambda,1)d(0)e^{i\mu}=$$

$$=a(\lambda,0)P\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}+a(\lambda,1)P\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}+a(\lambda,1)e^{i\mu}P\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},$$

$$d_2{}^{-1}(\mu)=(P)^{-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}e^{-i\mu}}=$$

$$\left(P\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^{-1}\frac{1}{(1+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}e^{-i\mu})}=$$

$$=\left(P\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}e^{-i\mu}\right)^k.$$

Отже

$$h(f)=a(\lambda,0)+a(\lambda,1)e^{i\mu}-$$

$$\left(a(\lambda,0)P\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}+a(\lambda,1)P\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}+a(\lambda,1)Pe^{i\mu}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\times$$

$$\times\left(P\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}e^{-i\mu}\right)^k=$$

$$=-a(\lambda,0)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}e^{-i\mu}\right)^k-$$

$$-a(\lambda,1)\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}e^{-i\mu}\right)^k-$$

$$-a(\lambda,1)e^{i\mu}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}e^{-i\mu}\right)^k$$

$$=-a(\lambda,0)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}e^{-i\mu}\right)^k-$$

$$-a(\lambda,1)\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}e^{-i\mu}\right)^k+$$

$$+a(\lambda,1)\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}e^{-i\mu}\right)^k$$

$$=-a(\lambda,0)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}e^{-i\mu}\right)^k.$$

Отже

$$h=-a(\lambda,0)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\gamma^k e^{-i\mu k},$$

де

$$\gamma=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

$$\hat{A}\xi=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\gamma^k\xi(-1,-k)-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\gamma^k\xi(0,-k)-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\gamma^k\xi(1,-k)$$

$\diamondsuit$

.

Приклад 4.9. Нехай спостерігається однорідне випадкове поле із спектральною щільністю, точне значення якої невідомо, але відомо, що вона належить наступному класу:

$$D_f=\left\{f(\lambda,\mu):\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda,\mu)d\lambda d\mu\leq P\right\}.$$

Для знаходження оптимальної лінійної оцінки невідомого значення функціоналу

$$A\xi = \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} a(k,j)\xi(k,j)$$

за спостереженнями $\xi(u,v)$, $(u,v)\in\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ знайдемо власні значення оператора A_{++} , розвязавши систему рівнянь

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{d} = \nu\boldsymbol{d},$$

де

$$(Ad)(k,j) = \sum_{u=0}^{1}\sum_{v=0}^{1} a(k+u, j+v)d(u,v),$$

$$f\left(\lambda,\mu\right) = \left|\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} d\left(u,v\right)e^{-i(u\lambda+v\mu)}\right|^2.$$

У матричному записі ця система має вигляд

$$\begin{pmatrix} a(0,0) & a(0,1) & a(1,0) & a(1,1) \\ a(0,1) & 0 & a(1,1) & 0 \\ a(1,0) & a(1,1) & 0 & 0 \\ a(1,1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d(0,0) \\ d(0,1) \\ d(1,0) \\ d(1,1)\end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix} d(0,0) \\ d(0,1) \\ d(1,0) \\ d(1,1)\end{pmatrix}.$$

Нехай

$$a(0,0) = a(1,0) = a(0,1) = a(1,1) = 1.$$

Тоді характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1-\nu & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\nu & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\nu & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} = 0.$$

Звідки

$$\nu^4 - \nu^3 - 4\nu^2 - \nu + 1 = 0,$$

$$\nu_1 = -1,\ \nu_2 = -1,\ \nu_3 = \frac{(3+\sqrt{5})}{2},\ \nu_4 = \frac{(3-\sqrt{5})}{2}.$$

Отже найбільше власне значення

$$\nu_{\max} = \frac{(3+\sqrt{5})}{2}.$$

Власний елемент, що відповідає найбільшому власному значенню має вигляд

$$\boldsymbol{d}^0(u,v) = S\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right\}.$$

Константу S знайдемо з умови нормування

$$\| \boldsymbol{d}^0 \|^2 = \frac{S^2(30+10\sqrt{5})}{4} = P = 1.$$

Отже

$$S = \frac{2}{5+\sqrt{5}},$$

$$\boldsymbol{d}^0(u,v) = \left\{\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5-\sqrt{5}}{10}\right\}.$$

Найменш сприятливе випадкове поле має вигляд

$$\xi(k,j) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\gamma(k,j) + \frac{\sqrt{5}}{5}\gamma(k,j-1) +$$

$$+\frac{\sqrt{5}}{5}\gamma(k-1,j) + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\gamma(k-1,j-1),$$

де $\gamma(k,j)$ – стандартне однорідне випадкове поле з ортогональними значеннями.

Оцінки невідомих значень поля мають вигляд:

$$\hat{\xi}(0,0) = \frac{\sqrt{5}}{5}\gamma(0,-1) + \frac{\sqrt{5}}{5}\gamma(-1,0) + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\gamma(-1,-1),$$

$$\hat{\xi}(1,0) = \frac{\sqrt{5}}{5}\gamma(1,-1) + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\gamma(0,-1),$$

$$\hat{\xi}(0,1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\gamma(0,-1) + \frac{\sqrt{5}}{5}\gamma(-1,1) + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\gamma(-1,0),$$

$$\hat{\xi}(1,1) = 0.$$

Шукана мінімаксна лінійна оцінка $\hat{A}_{11}\xi$ функціонала $A_{11}\xi$ дорівнює

$$\hat{A}_{11}\xi = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\gamma(0,-1) + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\gamma(-1,0) +$$

$$+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\gamma(-1,-1) + \frac{\sqrt{5}}{5}\gamma(1,-1) + \frac{\sqrt{5}}{5}\gamma(-1,1).$$

При цьому похибка оцінки не перевищує значення

$$P_1 v^2 = \frac{(7+3\sqrt{5})}{2}$$

і досягається на полі вказаного вигляду.
Похибку можна найти в інший спосіб. Оскільки

$$A_{11}\xi - \hat{A}_{11}\xi =$$

$$\frac{5+\sqrt{5}}{10}\gamma(1,1) + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\gamma(1,0) + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\gamma(0,1) + \frac{10+4\sqrt{5}}{10}\gamma(0,0),$$

то

$$\left\| A_{11}\xi - \hat{A}_{11}\xi \right\|^2 =$$

$$= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)^2 + 2\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)^2 + \left(\frac{10+4\sqrt{5}}{10}\right)^2 =$$

$$= \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

Найменш сприятлива щільність має вигляд

$$f(\lambda,\mu) = \left| \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} d^0(u,v)\, e^{-i(u\lambda+v\mu)} \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{\sqrt{5}}{5}e^{-i\mu} + \frac{\sqrt{5}}{5}e^{-i\lambda} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}e^{-i(\lambda+\mu)} \right|^2 =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}e^{-i\mu} + \frac{\sqrt{5}}{5}e^{-i\lambda} + \frac{\sqrt{5}}{5}e^{i\mu} + \frac{\sqrt{5}}{5}e^{i\lambda} +$$

$$+ \frac{1}{5}e^{-i(\lambda+\mu)} + \frac{1}{5}e^{-i(\lambda-\mu)} + \frac{1}{5}e^{-i(\mu-\lambda)} + \frac{1}{5}e^{i(\lambda+\mu)}.$$

◇

Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою (2.32).

Приклад 4.10. Розглянемо лінійне оцінювання функціоналу

$$A\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{1} a(t,j)\,\xi(t,j)\,dt$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(t,j)$, $t \in \mathbb{R}, s = 0,1,2,\ldots$, за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $u \in \mathbb{R}, v \in \{\ldots,-n,-(n-1),\ldots$

Нехай коваріаційна функція цього поля

$$R(t,s) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} e^{-\beta|s|}.$$

Тоді

$$F(0,\lambda,\mu) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}\frac{1-e^{-2\beta}}{\left|1-e^{-\beta}e^{-i\mu}\right|^2} = f_1(\lambda)f_2(\mu),$$

де

$$f_1(\lambda) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}, \quad f_2(\mu) = \frac{1-e^{-2\beta}}{\left|1-e^{-\beta}e^{-i\mu}\right|^2}.$$

Оскільки

$$A(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a\,(t,j)\,e^{it\lambda}e^{ij\mu}dt = \sum_{j=0}^{\infty} a\,(\lambda,j)\,e^{ij\mu},$$

$$a(\lambda,j) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a\,(t,j)\,e^{it\lambda}dt,$$

то в нашому прикладі

$$A(e^{i\lambda}, e^{i\mu}) = a\,(\lambda,0) + a\,(\lambda,1)\,e^{i\mu},$$

$$a(\lambda,0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a\,(t,0)\,e^{it\lambda}dt, \quad a(\lambda,1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a\,(1,j)\,e^{it\lambda}dt.$$

$$F_\xi\,(0;\lambda,\mu) = |d(0,\lambda,\mu)\,|^2 = \left|\sum_{j=0}^{\infty} d(\lambda,j)\,e^{-ij\mu}\right|^2,$$

$$d(\lambda,0) = w(\lambda), \quad d(\lambda,1) = w(\lambda)b,$$

бо

$$d(\lambda,\mu) = \sqrt{f_1(\lambda)}\frac{1-b^2}{1-b\,e^{-i\mu}} = \sqrt{f_1(\lambda)}(1-b^2)\sum_{k=0}^{\infty}(be^{-i\mu})^k = w(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(be^{-i\mu})^k,$$

$$b = e^{-\beta}, \quad w(\lambda) = \sqrt{f_1(\lambda)}(1-b^2).$$

Тоді

$$d^{-1}(\lambda,\mu) = \frac{1-be^{-i\mu}}{w(\lambda)}.$$

Оператор $A(\lambda)d$, заданий співвідношенням (2.101), має вигляд

$$A(\lambda)d = w(\lambda)\begin{pmatrix} a(\lambda,0) & a(\lambda,1) \\ a(\lambda,1) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = w(\lambda)\begin{pmatrix} a(\lambda,0)+ba(\lambda,1) \\ a(\lambda,1) \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$r\ (\lambda,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(A(\lambda)d\right)(j)\, e^{ij\mu} =$$
$$= w(\lambda)(a(\lambda,0)+ba(\lambda,1)+a(\lambda,1)e^{i\mu}).$$

Тоді

$$h(f) = A\,(\lambda,\mu) - r\ (\lambda,\mu)\, d^{-1}\,(\lambda,\mu) = a(\lambda,0)+a(\lambda,1)e^{i\mu}-$$

$$-(a(\lambda,0)+ba(\lambda,1)+a(\lambda,1)e^{i\mu})(1-be^{-i\mu}) = be^{-i\mu}(a(\lambda,0)+ba(\lambda,1)).$$

Нехай $a(t,s)=e^{-\alpha|t|}$ для $t\in\mathbb{R}, s=0,1$.
Тоді

$$h(f) = be^{-i\mu}(a(\lambda,0)+ba(\lambda,1)) =$$
$$= be^{-i\mu}\left(\int_{-\infty}^{\infty} a\,(t,0)\, e^{it\lambda}dt + b\int_{-\infty}^{\infty} a\,(t,1)\, e^{it\lambda}dt\right) =$$
$$= be^{-i\mu}\left((1+b)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}e^{it\lambda}dt\right) =$$
$$= b(1+b)e^{-i\mu}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}.$$

Шукана оцінка

$$\hat{A}\xi(t,s) = b(1+b)\frac{2\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}\xi(0,-1).$$

$\diamondsuit$

Приклад 4.11. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_+\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} a\,(t,s)\,\xi\,(t,s)\,dtds$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi\,(t,s)\,,\ t\in\mathbb{R}, s\geq 0$ за даними спостережень поля $\xi\,(u,v)$ в точках нижньої площини.
Нехай $a(s,t)\equiv a$ на $[-T,T]\times[0,1]$ та $f\,(\lambda,\mu) = f_1\,(\lambda)\, f_2\,(\mu)\,,\ f_1\,(\lambda)$ фі-

ксована,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\, d\lambda = {P_1}^2 = 1,$$

$$f_2(\mu) = \left| \int\limits_0^{\infty} g^0(v)\, e^{-iv\mu} dv \right|^2, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(\mu)\, d\mu = {P_2}^2 = 1.$$

Отже

$$M|\xi(t,s)|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda,\mu) d\lambda d\mu = {P_1}^2 {P_2}^2 = 1.$$

Задача зводиться до розв'язання інтегрального рівняння

$$\int\limits_0^1 K(\lambda, x, y)\, g(x)\, dx = \chi^2(\lambda) g(y), \quad y \in [0,1],$$

де

$$K(\lambda, x, y) = \int\limits_0^{\min(1-x,1-y)} a(\lambda, x+u) a(\lambda, y+u) du =$$

$$= \int\limits_0^{\min(1-x,1-y)} ab(\lambda) ab(\lambda) du =$$

$$= a^2 b^2(\lambda) \int\limits_0^{\min(1-x,1-y)} du = a^2 b^2(\lambda) \min(1-x, 1-y),$$

$$a(\lambda, t) = \int\limits_{-T}^{T} a(s,t)\, e^{is\lambda} ds = a \frac{e^{i\lambda T} - e^{-i\lambda T}}{i\lambda} =$$

$$= a \frac{2\sin(\lambda T)}{\lambda} = ab(\lambda), \quad t \in [0,1], \quad b(\lambda) = \frac{2\sin(\lambda T)}{\lambda}.$$

З іншого боку

$$\chi^2 g(y) = \left((1-y) \int\limits_0^y g(u) dx + \int\limits_y^1 (1-x) g(x) dx \right) a^2 b^2(\lambda).$$

Продиференціювавши двічі по y, маємо лінійне однорідне рівняння

$$\frac{\chi^2(\lambda)}{a^2 b^2(\lambda)} g''(y) + g(y) = 0, \quad g(1) = g'(0) = 0.$$

Звідси

$$g(y) = C_1 e^{i\frac{ab(\lambda)}{\chi}y} + C_2 e^{-i\frac{ab(\lambda)}{\chi}y} = C_1 \cos\left(\frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)}y\right) + C_2 \sin\left(\frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)}y\right),$$

$$g'(y) = -C_1 \frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)} \sin\left(\frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)}y\right) + C_2 \frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)} \cos\left(\frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)}y\right).$$

З граничних умов маємо

$$g(1) = C_1 \cos\left(\frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)}\right) + C_2 \sin\left(\frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)}\right) = 0,$$

$$g'(0) = C_2 \frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)} = 0,$$

$$C_2 = 0, \quad \cos\frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)} = 0,$$

$$\frac{ab(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z,$$

$$\chi_k(\lambda) = \frac{ab(\lambda)}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, \ k \in Z.$$

Отже,

$$\nu = \max \chi_k = \frac{2ab(\lambda)}{\pi}.$$

Тоді

$$g(y) = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right).$$

Константу C_1 знайдемо з умови нормування

$$\int_0^1 g^2(u)du = 1,$$

$$C_1{}^2 \int_0^1 \cos^2(\frac{\pi}{2}u)du = C_1{}^2 \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos(\pi u))du = C_1{}^2 \frac{1}{2}, \ C_1 = \sqrt{2}.$$

Власний елемент оператора A у просторі $L_2\left([0,1]\right)$, що відповідає найбільшому власному значенню ν має вигляд

$$g^0\left(y\right) = \sqrt{2} \cos\frac{\pi}{2}y, \quad y \in [0,1].$$

Найменш сприятлива щільність

$$f(\lambda,\mu) = f_1(\lambda)\left|\int\limits_0^1 g^0(y)e^{-i\mu y}dy\right|^2 =$$

$$\left|\int\limits_0^{\infty} d_1(t)\, e^{-i\lambda t}dt\right|^2 \left|\int\limits_0^1 g^0(y)\, e^{-i\mu y}dy\right|^2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 d_1(t)\, g^0(y)\, e^{-it\lambda}e^{-i\mu y}dtdy.$$

Найменш сприятливе випадкове поле має вигляд

$$\xi(t,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{s-1}^{s} d_1(t-u)\, g_0(s-v)d\eta(u,v).$$

Оцінка $\hat{\xi}(t,s)$ має вигляд

$$\hat{\xi}(t,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{s-1}^{0} d_1(t-u)\, g_0(s-v)d\eta(u,v),$$

де $\eta(u,v)$ стандартне випадкове поле з некорельованими значеннями.

$$\hat{A}_+\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 a(t,s)\,\hat{\xi}(t,s)\,dtds.$$

Мінімаксне значення похибки оцінювання функціоналу дорівнює

$$\Delta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\|Ad_2\|^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)(ab(\lambda))^2 d\lambda.$$

$\diamondsuit$

4.3. Додатки 3. Задачі фільтрації випадкових полів

Приклад 4.12. Розглянемо задачу оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{k=-1}^{1}\sum_{j=-1}^{0}\xi(k,j)$$

від поля $\xi(k,j)$, що має щільність

$$f(\lambda,\mu) = \left|1+\ \alpha e^{-i\lambda}\right|^2 \mid 1+\ \beta e^{-i\mu}\ \mid^2 = f_1(\lambda)\left|\varphi_2(\mu)\right|^2, \alpha<1, \beta<1,$$

за результатами спостережень поля $\xi(k,j)+\eta(k,j)$, що має щільність

$$f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu) = \frac{\left|1+\ \alpha e^{-i\lambda}\right|^2}{V^2 \mid 1+\ \gamma e^{-i\mu}\ \mid^2} = f_1(\lambda)|d_2(\mu)|^2 = f_1(\lambda)|b_2(\mu)|^{-2},$$

$$V^{-2} \geq \left|1+\ \beta e^{-i\mu}\right|^2 \mid 1+\ \gamma e^{-i\mu}\ \mid^2,$$

$$b_2(\mu) = V(1+\ \gamma e^{-i\mu}), \quad d_2(\mu) = \frac{1}{V(1+\ \gamma e^{-i\mu})}, \quad \phi_2(\mu) = 1+\ \beta e^{-i\mu},$$

$$b_2(0)=V,\ b_2(1)=\gamma V,\ b_2(v)=0,\ v\geq 2,$$

$$\phi_2(0)=1,\ \phi_2(1)=\beta,\ \phi_2(v)=0,\ v\geq 2.$$

Нехай

$$A\left(\lambda,\mu\right) = \sum_{v=0}^{\infty} a(\lambda,-v)\, e^{-iv\mu} = a(\lambda,0)+a(\lambda,-1)\, e^{-i\mu},$$

де

$$a(\lambda,0) = a(-1,0)e^{-i\lambda}+a(0,0)+a(1,0)e^{i\lambda},$$

$$a(\lambda,-1) = a(-1,-1)e^{-i\lambda}+a(0,-1)+a(1,-1)e^{i\lambda},$$

$$a(-1,0)=a(0,0)=a(1,0)=a(-1,-1)=a(0,-1)=a(1,-1)=1.$$

Для обчислення

$$\tilde{c}_f(\lambda) = \Phi_2 a(\lambda)$$

знайдемо оператор Φ_2, який задається співвідношенням

$$\Phi_2(k,j) = \sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)} \phi_2(k-p)\overline{\phi}_2(j-p),\ k,j=0,1,\ldots.$$

Матимемо
$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$
Тоді
$$\tilde{c}_f(\lambda) = (e^{-i\lambda} + 1 + e^{i\lambda}) \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 + \beta \\ 1 + \beta^2 + \beta \\ \beta \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C}_f(\lambda) = (e^{-i\lambda} + 1 + e^{i\lambda}) \begin{pmatrix} (1 + \beta^2 + \beta) & 1 + \beta^2 + \beta & \beta \\ 1 + \beta^2 + \beta & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси
$$\tilde{r}_f\,(\lambda, \mu) = (e^{-i\lambda} + 1 + e^{i\lambda})V \times$$

$$\times \left((1 + \beta + \beta^2)(1 + \gamma) + (1 + \beta + \beta^2 + \gamma\beta)e^{-i\mu} + \beta e^{-2i\mu}\right).$$

Спектральна характеристика оптимальної оцінки обчислюється за формулою
$$h\,(f, g) = \left(1 + \gamma e^{-i\mu}\right)(e^{-i\lambda} + 1 + e^{i\lambda})V^2 \times$$
$$\times \left((1 + \beta + \beta^2)(1 + \gamma) + (1 + \beta + \beta^2 + \gamma\beta)e^{-i\mu} + \beta e^{-2i\mu}\right) =$$

$$= (e^{-i\lambda} + 1 + e^{i\lambda})V^2 \times$$

$$\times \left(\chi_0 + \chi_0(1 + \gamma)e^{-i\mu} + \chi_{-1}(1 + \gamma)e^{-2i\mu} + \chi_{-2}\gamma e^{-3i\mu}\right).$$
Лінійна оцінка функціонала дорівнює

$$\hat{A}\xi = V^2\left[\chi_0\xi(0, 0) + \chi_0(1 + \gamma)\xi(0, -1) + \chi_{-1}(1 + \gamma)\xi(0, -2) + \right.$$

$$+\chi_{-2}\gamma\xi(0, -3) + \chi_0\xi(-1, 0) + \chi_0(1 + \gamma)\xi(-1, -1) +$$

$$+\chi_{-1}(1+\gamma)\xi(-1,-2)+\chi_{-2}\gamma\xi(-1,-3)+\chi_0\xi(1,0)+$$

$$\chi_0(1+\gamma)\xi(1,-1)+\chi_{-1}(1+\gamma)\xi(1,-2)+\chi_{-2}\gamma\xi(1,-3)\,],$$

де

$$\chi_0=(1+\beta+\beta^2)(1+\gamma);\quad \chi_{-1}=(1+\beta+\beta^2+\gamma\beta);\quad \chi_{-2}=\beta. \qquad \diamondsuit$$

Приклад 4.13. Розглянемо задачу оцінювання функціоналу

$$A\xi=\sum_{k=-1}^{1}\sum_{j=-1}^{0}\xi(k,j)$$

від поля $\xi(k,j)$, що має щільність $f(\lambda,\mu)\in D_f^0$,

$$f(\lambda,\mu)=\left|1+\ \alpha e^{-i\lambda}\right|^2|\ 1+\ \beta e^{-i\mu}\ |^2=f_1(\lambda)\left|\varphi_2(\mu)\right|^2,\alpha<1,\beta<1,$$

за результатами спостережень поля $\xi(k,j)+\eta(k,j)$, що має щільність $f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)$,

$$g(\lambda,\mu)=\left|1+\ \alpha e^{-i\lambda}\right|^2|\ 1+\ \beta e^{-i\mu}\ |^2=f_1(\lambda)|\psi_2(\mu)|^2,$$

$$f_1(\lambda)=\left|1+\ ae^{-i\lambda}\right|^2,\quad |\psi_2(\mu)|^2=|\ 1+\ \beta e^{-i\mu}\,|^2,$$

$$f(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)|d_2|^2=f_1(\lambda)|b_2|^{-2},$$

b_2,d_2 – невідомі,

$$\phi_2(0)=1,\quad \phi_2(1)=\beta,\quad \phi_2(v)=0,\ v\geq 2,$$

Нехай

$$A\,(\lambda,\mu)=\sum_{v=0}^{\infty}a(\lambda,-v)\,e^{-iv\mu}=a(\lambda,0),$$

де

$$a(\lambda,0)=a(-1,0)e^{-i\lambda}+a(0,0)+a(1,0)e^{i\lambda},$$

$$a(-1,0)=a(0,0)=a(1,0)=a(-1,-1)=a(0,-1)=a(1,-1)=1.$$

Тоді

$$\tilde{C}_g(\lambda)=(e^{-i\lambda}+1+e^{i\lambda})\begin{pmatrix}1+\beta^2 & \beta\\ \beta & 0\end{pmatrix}.$$

Якщо $\beta = 1$, то

$$\tilde{C}_g(\lambda) = (e^{-i\lambda} + 1 + e^{i\lambda}) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб розв'язати задачу

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda) \left[\left\langle \tilde{C}_g(\lambda) b(\lambda),\ \tilde{C}_g(\lambda) b(\lambda) \right\rangle \right] d\lambda \to \max,$$

знайдемо розв'язки характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\sigma & 1 \\ 1 & -\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Нехай $\sigma_0 = 1 + \sqrt{2}$ – найбільше власне число цього характеристичного рівняння. Тоді $\sigma_0(e^{-i\lambda}+1+e^{i\lambda})$ – найбільше власне число матриці $\tilde{C}_g(\lambda)$; $\bar{b}_2 = \left(k; \left(\sqrt{2}-1\right) k\right)$ -– власний вектор, що йому відповідає.
Маємо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g\left(\lambda, \mu\right) d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1 + \beta^2 + \beta e^{-i\mu} + \beta e^{i\mu}) d\mu =$$

$$= (1+\beta^2)\left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2 = 2\left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2.$$

Оскільки $f_0(\lambda, \mu) \in D_f^0$, то умова нормування власного вектора $\bar{b}_2 = \left(k; \left(\sqrt{2}-1\right) k\right)$ має вигляд

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_0\left(\lambda, \mu\right) + g\left(\lambda, \mu\right)) d\mu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} b_2(j) e^{-ij\mu} \right|^{-2} d\mu$$

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_0\left(\lambda, \mu\right) + g\left(\lambda, \mu\right)) d\mu =$$

$$= 2\left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2 + P\left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2 = (2+P)\left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2$$

та

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}b_2(j)e^{-ij\mu}\right|^{-2}d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|b_2(0)+b_2(1)e^{-i\mu}|^2}d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi(b_2(0))^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\left|1+\frac{b_2(1)}{b_2(0)}e^{-i\mu}\right|^2}d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi(b_2(0))^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{b_2(1)}{b_2(0)}e^{-i\mu}\right)^n\right|^2d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi(b_2(0))^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b_2(1)}{b_2(0)}\right)^{2n}d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi k^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-(1-\sqrt{2})^2}d\mu=\frac{1}{k^2 2\left(\sqrt{2}-1\right)}.$$

Звідси

$$\frac{1}{k^2 2\left(\sqrt{2}-1\right)}=\left|1+ae^{-i\lambda}\right|^2(2+P)\,.$$

Отже

$$k^2=\frac{1}{|1+ae^{-i\lambda}|^2(2+P)\,2\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1+\sqrt{2}}{|1+ae^{-i\lambda}|^2(2+P)\,2}.$$

Нехай

$$P=2\sqrt{2},\quad k^2=\frac{1}{|1+ae^{-i\lambda}|^2 4},\quad k=\frac{1}{2\,|1+ae^{-i\lambda}|}.$$

Тоді

$$\bar{b}_2=\frac{1}{|1+ae^{-i\lambda}|}\left(1/2;\left(\sqrt{2}-1\right)/2\right).$$

Константу $\alpha_1(\lambda)$ знайдемо проінтегрувавши праву та ліву частини рівняння (3.27)

$$f_0(\lambda,\mu)+g_0(\lambda,\mu)=\alpha_1(\lambda)\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_g(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}\right|^2.$$

Матимемо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_0(\lambda,\mu)+g(\lambda,\mu))d\mu=$$

$$=\frac{\alpha_1(\lambda)}{2\pi}\left|1+ae^{-i\lambda}\right|^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{C}_g(\lambda)\bar{b}_2)(k)e^{-ik\mu}\right|^2 d\mu.$$

Тоді

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{C}_g(\lambda)\bar{b}_2)(k)e^{-ik\mu}\right|^2 d\mu=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|2+b_2(0)+b_2(1)+b_2(0)e^{-i\mu}\right|^2 d\mu=$$

$$=k^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|2-1+\sqrt{2}+e^{-i\mu}\right|^2 d\mu=k^2 4\pi(2+\sqrt{2}).$$

Отже

$$\left|1+ae^{-i\lambda}\right|^2(2+P)=\alpha_1(\lambda)\left|1+ae^{-i\lambda}\right|^2 k^2 2(2+\sqrt{2}).$$

Звідси

$$\alpha_1(\lambda)=\frac{(2+P)}{k^2 2(2+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{\left|1+ae^{-i\lambda}\right|^2(2+P)^2}{2(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{\left|1+ae^{-i\lambda}\right|^2(2+2\sqrt{2})^2}{2(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\sqrt{2}\left|1+ae^{-i\lambda}\right|^2.$$

Маючи значення $k,\alpha_1(\lambda)$, за формулою (3.29) отримаємо найменш сприятливу щільність $f_0(\lambda,\mu)\in D_f^0$

$$f_0(\lambda,\mu)=\left[\alpha_1\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_g(\lambda)\bar{b}(\lambda))(k)e^{-ik\mu}\right|^2-g(\lambda,\mu)\right]_+=$$

$$=\left[\sqrt{2}\left|1+ae^{-i\lambda}\right|^2\left|2b_2(0)+b_2(1)+b_2(0)e^{-i\mu}\right|^2-\left|1+ae^{-i\lambda}\right|^2\left|1+\beta e^{-i\mu}\right|^2\right]_+$$

$$= \left[\sqrt{2}\left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2 k^2 \left|2 + (\sqrt{2} - 1) + e^{-i\mu}\right|^2 - \left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2 \left|1 + \beta e^{-i\mu}\right|^2\right]_+$$

$$= \left[\sqrt{2}\left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2 \frac{1}{4|1 + ae^{-i\lambda}|^2} \left|\sqrt{2} + 1 + e^{-i\mu}\right|^2 - \left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2 \left|1 + \beta e^{-i\mu}\right|^2\right]_+$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{4}\left|\sqrt{2} + 1 + e^{-i\mu}\right|^2 - \left|1 + ae^{-i\lambda}\right|^2 \left|1 + \beta e^{-i\mu}\right|^2\right]_+ . \qquad \diamondsuit$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аветисян М.Г. Условие линейной регулярности векторных случайных полей / М.Г. Аветисян, Р.Л. Добрушин // Проблемы передачи информации. – 1985. – Т. 21. – № 4. – С. 76–82.

2. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней/ Н.И. Ахиезер.– М.: Физматгиз, 1961.– 310с.

3. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации/ Н.И. Ахиезер.– М.: Наука, 1965.– 408с.

4. Ахиезер Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – М.: Наука, 1966. – 544с.

5. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1965. – 656 с.

6. Гихман И.И. Теория случайных процессов. Т. 1 / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1971. – 664 с.

7. Гладышев Е.Г. О многомерных стационарных случайных процессах / Е.Г. Гладышев // Теория вероятностей и ее применения. – 1958. – Т. 4. – С. 458–462.

8. Голубев Г.А. Минимаксные линейные фильтры координат динамических объектов / Г.А. Голубев // Техническая кибернетика. – 1978. – No. 3. – С. 155–162.

9. Голубев Г.А. Минимаксная линейная фильтрация динамических процессов с дискретным временем / Г.А. Голубев // Автоматика и телемеханика. – 1984.– No. 2. – С. 72–81.

10. Голубев Г.А. Минимаксные линейные динамические фильтры минимальной размерности фазовых координат линейных динамических объектов / Г.А. Голубев // Автоматика и телемеханика. – 1986. – No. 5. – С. 50–60.

11. Голубев Г.К. Минимаксная экстраполяция последовательностей / Г.К. Голубев, М.С. Пинскер // Проблемы передачи информации. – 1983. – Т. 19. No. 47. – С. 31–42.

12. Голубев Г.К. Минимаксная экстраполяция функций / Г.К. Голубев, М.С. Пинскер // Радиотехника и электроника. – 1983. – Т. 28. No. 11. – С. 2186–2190.

13. Голубев Г.К. Экстремальные задачи минимаксного оценивания последовательностей / Г.К. Голубев, М.С. Пинскер // Проблемы передачи информации. – 1985. – Т. 21. No. 3. – С. 336–352.

14. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций / К. Гофман. – М.: ИЛ, 1957. – 312 с.

15. Гренандер У. Теплицевы формы и их применения / У. Гренандер, Г. Сеге. – М.: ИЛ, 1961. – 308 с.

16. Гренандер У. Об одной проблеме предсказания в связи с теорией игр/ У. Гренандер // В кн.: Бесконечномерные антагонистические игры. Под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Физматгиз, 1963. – С. 403–413.

17. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы/ У. Гренандер.– М.: ИЛ, 1961.– 168 с.

18. Гулд С. Вариационные методы в задачах на собственные значения / Гулд С. – М.: Наука, 1970. – 328 с.

19. Данфорд Н. Линейные операторы. Т. 1/ Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1962. – 896 с.

20. Дуб Дж. Вероятностные процессы/ Дж. Дуб. – М.: ИЛ, 1956. – 606 с.

21. Дубовецька І.І. Задача екстраполяції функціоналів від періодично корельованої послідовності/ І.І. Дубовецька // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2011. – Вип. 25. – С. 22-26

22. Дубовецька І.І. Максимальна похибка прогнозу періодично корельованих послідовностей/ І.І. Дубовецька // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2012. – Вип. 28. – С. 22-26.

23. Дубовецька І.І. Інтерполяція періодично корельованих стохастичних послідовностей/ І.І. Дубовецька, О.Ю. Масютка, М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2011. – Вип. 84. – С.43–56.

24. Дубовецька І.І. Фільтрація лінійних функціоналів від періодично корельованих послідовностей/ І.І. Дубовецька, М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2012. – Вип. 86. – С.43–55.

25. Дубовецька І.І. Мінімаксна інтерполяція періодично корельованих процесів/ І.І. Дубовецька, М.П. Моклячук // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. матем. і інформ. -– 2012. — Вип. 23, № 2. -– С. 51-–62.

26. Дубовецька І.І. Екстраполяція періодично корельованих процесів, які спостерігаються з шумом/ І.І. Дубовецька, М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2013. – Вип. 88. – С.43–55.

27. Дубовецька І.І. Фільтрація періодично корельованих процесів/ І.І. Дубовецька, М.П. Моклячук // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2012. – № 2. – С. 149-158.

28. Засухин В.Н. К теории многомерных стационарных процессов/ В.Н. Засухин // ДАН СССР. – 1941. – Т. 33. – С. 435–437.

29. Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач/ А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

30. Карлин С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике/ С.Карлин, В.Дж. Стадден. – М. Наука, 1976.– 468с.

31. Кассам С.А. Робастные методы обработки сигналов: Обзор/ С.А. Кассам, Г.В. Пур // Труды института инженеров по электронике и радиоэлектронике. – 1985. – Т. 73, № 3. – С. 54–110.

32. Кац И.Я. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопеределенных ситуациях/ И.Я. Кац, А.Б. Куржанский// Автоматика и телемеханика.– 1978.– N 11.– С. 79–88.

33. Кириченко Н.Ф. Минимаксный подход к рекурентному оцениванию состояния линейных динамических систем/ Н.Ф. Кириченко, А.Г. Наконечный// Кибернетика.– 1977.– N 4.– С. 52–55.

34. Кириченко Н.Ф. К минимаксным оценкам состояний линейных динамических систем/ Н.Ф. Кириченко, А.Г. Наконечный// ДАН УССР. Сер. А. – 1978.– N 1.– С. 7–9.

35. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ/ Ф. Кларк.– М.: Наука, 1988.– 278 с.

36. Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем/ П.С. Кнопов. – Киев: Наукова думка, 1981. – 152 с.

37. Колмогоров А.Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве / А.Н. Колмогоров // Бюллетень МГУ. – 1941. – Т. 2, № 6. – С. 1–40.

38. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей / А.Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1941. – Т. 5. – С. 3–14.

39. Колмогоров А.Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений / А.Н. Колмогоров // ДАН СССР. – 1940. – Т. 26, № 1. – С. 6–9.

40. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник статей / А.Н. Колмогоров. – Москва: Наука, 1986. – 535 с.

41. Коробочкин Ю.Б. Минимаксное линейное оценивание стационарной линейной последовательности при наличии возмущений с ограниченной дисперсией / Ю.В. Коробочкин // Радиотехника и электроника. – 1983, – Т. 28. № 11. – С. 2186-2190.

42. Коробочкин Ю.Б. Минимаксная винеровская фильтрация в условиях априорной частичной неопределенности/ Ю.В. Коробочкин, О.М. Куркин // Радиотехника и электроника.– 1984.– N 12.– С. 2347–2353.

43. Коробочкин Ю.Б. Принцип гарантированного результата в задаче стационарного линейного сглаживания в условиях неопределенности спектральных плотностей/ Ю.В. Коробочкин // Автоматика и телемеханика.– 1985.– N 8.– С. 37–40.

44. Коробочкин Ю.Б. Линейная минимаксная фильтрация стационарного случайного процесса в условиях априорной частичной неопределенности относительно спектральной плотности/ Ю.В. Коробочкин, О.М. Куркин // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 8. – С. 25-33.

45. Крейн М.Г. Об одной экстраполяционной проблеме А.Н. Колмогорова/ М.Г. Крейн // ДАН СССР. – 1945. – Т. 46, № 8. – С. 339–342.

46. Крейн М.Г. Об основной аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов/ М.Г. Крейн // ДАН СССР. – 1954. – Т. 94, № 1. – С. 13–16.

47. Крейн М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи/ М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 552 с.

48. Куркин О.М. Минимаксная обработка информации/ О.М. Куркин, Ю.В. Коробочкин, С.Д. Шаталов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 214 с.

49. Луз М. М. Інтерполяція функціоналів від стохастичних послідовностей зі стаціонарними приростами за спостереженнями з шумом/ М.М. Луз, М.П. Моклячук // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2012, № 2. – с. 131-148.

50. Луз М. М. Інтерполяція функціоналів від стохастичних послідовностей зі стаціонарними приростами/ М.М. Луз, М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2012. – Вип. 87. – С.94–108.

51. Масютка О. Ю. Про задачу екстраполяції векторної стаціонарної послідовності/ О.Ю. Масютка// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 2. – С. 18 – 20.

52. Масютка О. Ю. Мінімаксні оцінки функціоналів від стаціонарних процесів/ О.Ю. Масютка, М.П. Моклячук. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". – 2012. – 216 с.

53. Матвеев Р.Ф. О регулярности многомерных стационарных процессов с дискретным временем/ Р.Ф. Матвеев // ДАН СССР. – 1959. – Т. 126, №4. – С. 713–715.

54. Мирзахмедов М.А. Линейные преобразования однородных случайных полей/ М.А. Мирзахмедов // ДАН УзССР. – 1967. – N2.

55. Мирзахмедов М.А. Об экстраполировании однородных обобщенных случайных полей/ М.А. Мирзахмедов // ДАН УзССР. – 1967. – N4. С. 3–6.

56. Мирзахмедов М.А. О линейной интерполяции и фильтрации однородных случайных полей/ М.А. Мирзахмедов // ДАН УзССР. – 1967. – N11. – С. 3–6.

57. Моклячук М.П. О линейной экстраполяции многомерного однородного случайного поля/ М.П. Моклячук // Материалы Всесоюзного симпозиума по статистике случайных процессов. – Киев, 1973.– С.129–131.

58. Моклячук М.П. Про задачу лінійної екстраполяції для одного класу однорідних випадкових полів/ М.П. Моклячук // ДАН УРСР. – 1974. – сер. А, № 6. – С.15-518.

59. Моклячук М.П. Про задачу лінійної екстраполяції для одного класу n - вимірних однорідних випадкових полів/ М.П. Моклячук // Вісник Київського університету. Сер. матем. та мех. – 1974. – Вип. 16. – С.146-154.

60. Моклячук М.П. Некоторые задачи линейного прогноза для векторных однородных случайных полей/ М.П. Моклячук // Вычислит. и прикладная математика. – 1974. – Вып. 23. – С.3–12.

61. Моклячук М.П. О линейной экстраполяции однородных случайных полей с дробнорационалъной спектральной плотностью/ М.П. Моклячук // Теория вероятн. и математическая статистика. – 1974. – Вып. 11. – С.97-105.

62. Моклячук М.П. Некоторые задачи линейной экстраполяции однородных случайных полей на цилиндре.I./ М.П. Моклячук // Исследование операций и АСУ. – 1974. – Вып. 3. – С.97-109.

63. Моклячук М.П. Некоторые задачи линейной экстраполяции однородных случайных полей на цилиндре.II./ М.П. Моклячук // Исследование операций и АСУ. – 1974. – Вып. 4. – С.91–102.

64. Моклячук М.П. Некоторые задачи линейной экстраполяции однородных случайных полей / М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1975. – Вып. 12. – С.97-105.

65. Моклячук М.П. Про лінійну екстраполяцію векторних однорідних випадкових полів на циліндрі/ М.П. Моклячук // Вісник Київського університету. Сер. матем. та мех. – 1975. – Вип. 17. – С.111-118.

66. Моклячук М.П. Некоторые задачи линейной экстраполяции для многомерных однородных случайных полей/ М.П. Моклячук // Исследования по теории случайных процессов. Киев. Ин-т математики АН УССР. – 1976. – С.115–126.

67. Моклячук М.П. О линейной интерполяции однородных случайных полей/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1976. – Вып.14. – С.114-123.

68. Моклячук М.П. О линейной интерполяции векторного однородного случайного поля непрерывного аргумента/ М.П. Моклячук // Украинский математический журнал. – 1977. – Т. 29, N 3. – С.324-332.

69. Моклячук М.П. Линейные статистические задачи для однородных по времени изотропных случайных полей на сфере. I./ М.П. Моклячук, М.И. Ядренко // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1978. – Вып.18. – С.106-115.

70. Моклячук М.П. Линейные статистические задачи для однородных по времени изотропных случайных полей на сфере. II./ М.П. Моклячук, М.И. Ядренко // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1978. – Вып.19. – С.111-121.

71. Моклячук М.П. Об одной игре двух лиц с нулевой суммой и экстраполяции случайных последовательностей / М.П. Моклячук // Исследование операций и АСУ. – 1981. – Вып. 17. – С.122–127.

72. Моклячук М.П. Об одной задаче теории игр и экстраполяции случайных процессов со значениями в гильбертовом пространстве/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1981. – Вып. 24. – С.107–114.

73. Моклячук М.П. Об одной антагонистической игре и прогнозировании стационарных последовательностей в гильбертовом пространстве/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1981. – Вып. 25. – С.99–106.

74. Моклячук М.П. Об оценке функционала от случайного поля/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1982. – Вып. 27. – С.110–116.

75. Моклячук М.П. Минимаксные оценки функционалов от случайного поля/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1983. – Вып. 29. – С.84–92.

76. Моклячук М.П. О линейных преобразованиях операторнозначных однородных случайных полей/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1984. – Вып. 30. – С.127–136.

77. Моклячук М.П.Об оценке линейного преобразования однородного поля/ М.П. Моклячук // Вiсник Київського унiверситету. Сер. матем. та мех. – 1984. – Вып. 26. – С.80–83.

78. Моклячук М.П. Об одном свойстве последовательностей одностороннего скользящего среднего/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1985. – Вып. 32. – С.86–93.

79. Моклячук М.П. О фильтрации преобразова- ний случайных последовательностей/ М.П. Моклячук // Украинский математический журнал. – 1985. – Т. 37, N 6. – С.730–734.

80. Моклячук М.П. О величине среднеквадратической ошибки линейного фильтра / М.П. Моклячук // Труды I Всемирного конгресса общества им. Бернулли. М. – 1988. – С.210-213.

81. Моклячук М.П. О минимаксной фильтрации случайных последовательностей / М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1989. – Вып. 40. – С.73–80.

82. Моклячук М.П. Минимаксная экстраполяция и процессы авторегресии скользящего среднего/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1989. – Вып. 41. – С.66–74.

83. Моклячук М.П. Минимаксная экстраполяция случайных процессов для моделей ε-загрязнения/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – Вып. 42. – С.95–103.

84. Моклячук М.П. Минимаксная фильтрация стационарных последовательностей с белым шумом/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – Вып. 43. – С.97–111.

85. Моклячук М.П. Минимаксная фильтрация линейных преобразований стационарных процессов/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1991. – Вып. 44. – С.96–105.

86. Моклячук М.П. О линейном прогнозе случайных процессов в условиях неопределенности/ М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1991. – Вып. 45. – С.89–97.

87. Моклячук М.П. Минимаксная фильтрация линейных преобразований стационарных последовательностей/ М.П. Моклячук // Украинский математический журнал. – 1991. – Т. 43, № 1. – С.92–99.

88. Моклячук М.П. Об экстраполяции преобразований случайных процессов, возмущенных белым шумом / М.П. Моклячук // Украинский математический журнал. – 1991. – Т. 43, № 2. – С.216–223.

89. Моклячук М.П. Про задачу мінімаксної екстраполяції векторних послідовностей, збурених білим шумом/ М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Вип. 46. – С.88–104.

90. Моклячук М.П. Про задачу фільтрації векторних послідовностей/ М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Вип. 47. – С.104–118.

91. Моклячук М.П. Стохастичні послідовності авторегресії та мінімаксна інтерполяція/ М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1993. – Вип. 48. – С.135–146.

92. Моклячук М.П. О минимаксной фильтрации векторных процессов/ М.П. Моклячук // Украинский математический журнал. – 1993. – Т. 45, № 3. – С.389–397.

93. Моклячук М.П. Мінімаксна фільтрація однорідних за часом ізотропних випадкових полів на сфері.I./ М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1993. – Вип. 49. – С.193-205.

94. Моклячук М.П. Мінімаксна інтерполяція однорідних за часом ізотропних випадкових полів на сфері.II./ М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1994. – Вип. 50. – С.105–113.

95. Моклячук М.П. Екстраполяція однорідних ізотропних випадкових полів на сфері.I./ М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1994. – Вип. 51. – С.94–102.

96. Моклячук М.П. Екстраполяція однорідних за часом ізотропних на сфері випадкових полів. II./ М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1995. – Вип. 53. – С.126–137.

97. Моклячук М.П. Робастна інтерполяція однорідних за часом ізотропних на сфері випадкових полів, що спостерігаються з шумом/ М.П. Моклячук // Украинский математический журнал. – 1997. – Т. 47, № 7. – С.962–970.

98. Моклячук М.П. Про оцінки невідомих значень випадкових полів, що спостерігаються з шумом/ М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2001. – Вип. 65. – С.160–168.

99. Моклячук М.П. Методи оцінювання функціоналів від випадкових полів/ М.П. Моклячук // Наукові записки Київського університету. – 2004. – т. 8. – С.17-26.

100. Моклячук М.П. Основи опуклого аналізу/ М. П. Моклячук. — К.: "ТВіМС", 2004. -– 240 с.

101. Моклячук М.П. Негладкий аналіз та оптимізація/ М. П. Моклячук. — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. -– 399 с.

102. Моклячук М.П. Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів/ М. П. Моклячук. — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. -– 320 с.

103. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі / М.П. Моклячук. — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. -– 399 с.

104. Моклячук М.П. Інтерполяція векторних стаціонарних послідовностей/ М.П. Моклячук, О.Ю. Масютка// Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2005. – Вип. 73. – С.112 – 119.

105. Моклячук М.П. Екстраполяція векторних стаціонарних послідовностей/ М.П. Моклячук, О.Ю. Масютка// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 3. – С.60 – 70.

106. Моклячук М.П. Про задачу фільтрації векторної стаціонарної послідовності/ М.П. Моклячук, О.Ю. Масютка// Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2006. – Вип. 75. – С.95 – 104.

107. Моклячук М.П. О минимаксном оценивании линейных преобразований случайных полей со значениями в гильбертовом пространстве/ М.П. Моклячук, С.В. Татаринов // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1986. – Вып. 35. – С.111–118.

108. Моклячук М.П. Минимаксная фильтрация однородных случайных полей с белым шумом/ М.П. Моклячук, С.В. Татаринов // Вычислительная и прикладная математика. – 1991. – Вып. 73. – С.78–93.

109. Моклячук М.П. О минимаксной фильтрации однородных случайных полей/ М.П. Моклячук, С.В. Татаринов // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1991. – Вып. 44. – С.105–115.

110. Моклячук М.П. Про задачу мінімаксної екстраполяції однорідних випадкових полів/ М.П. Моклячук, С.В. Татаринов // Вісник КДУ. сер. фіз-мат. наук. – 1992. – N 4. – С.52–64.

111. Моклячук М.П. Про задачу робастної фільтрації однорідних випадкових полів / М.П. Моклячук, С.В. Татаринов // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Вип. 46. – С.104–114.

112. Моклячук М.П. Про задачу лінійного прогнозу однорідних випадкових полів/ М.П. Моклячук, С.В. Татаринов // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Вип. 47. – С.118–129.

113. Моклячук М.П. Мінімаксна інтерполяція випадкових полів/ М.П. Моклячук, С.В. Татаринов // Вісник КДУ. сер. фіз-мат. наук. – 1994. – N 4. – С.95–105.

114. Моклячук М.П. Лінійне інтерполювання з шумом для випадкових полів на абелевих групах/ М.П. Моклячук, Н. В. Чепелевська// Вісник Київського університету, серія фіз.- мат. науки. – 2000. – вип. № 1. – С.132–139.

115. Моклячук М.П. Мінімаксна екстраполяція неперервних випадкових полів/ М.П. Моклячук, Н.Ю. Щестюк // Вісник Київського університету, серія фіз.- мат. науки. – 2002. – вип. № 1. – С.47–58.

116. Моклячук М.П. Робастні оцінки функціоналів від випадкових полів/ М.П. Моклячук, Н.Ю. Щестюк // Вісник Київського університету, серія фіз.- мат. науки. – 2002. – вип. № 5. – С.106–115.

117. Моклячук М.П. Про задачу фільтрації випадкових полів/ М.П. Моклячук, Н.Ю. Щестюк // Вісник Київського університету, серія фіз.- мат. науки. - 2002. – вип. № 5. – С.116–126.

118. Моклячук М.П. Екстраполяція однорідних випадкових полів, що спостерігаються з шумом/ М.П. Моклячук, Н.Ю. Щестюк // Вісник Київського університету. Математика. Механіка. – 2002. – вип. № 8. – С.94–101.

119. Моклячук М.П. Про фільтрацію випадкових полів дискретного аргументу/ М.П. Моклячук, Н.Ю. Щестюк // Вісник Київського університету. Математика. Механіка. – 2003. – вип. № 10. – С.117–123.

120. Моклячук М.П. Про робастні оцінки випадкових полів/ М.П. Моклячук, Н.Ю. Щестюк // Вісник Київського університету, серія фіз.- мат. науки. – 2003. – вип. № 1. – С.32–42.

121. Моклячук М.П. Екстраполяція випадкових полів, що спостерігаються з шумом/ М.П. Моклячук, Н.Ю. Щестюк // ДАН України. – 2003. – вип. № 4. – С.12–18.

122. Моклячук М.П. Робастна фільтрація однорідних та однорідно зв'язаних випадкових полів дискретного аргументу/ М.П. Моклячук, Н.Ю. Щестюк // Вісник Київського університету. Математика. Механіка. – 2008. – вип. № 20. – С.88–91.

123. Наконечный А.Г. Минимаксная оценка состояния линейных стохастических систем/ А.Г. Наконечный // Теория вероятностей и ее применения. – 1978. – No. 2. – С. 455–456.

124. Наконечный А.Г. Минимаксные фильтры для линейных стохастических систем/ А.Г. Наконечный // ДАН УССР. Серія А. – 1978. – No. 10. – С. 923–925.

125. Наконечный А.Г. К оценке состояния линейных стохастических систем/ А.Г. Наконечный // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1978. – Вып. 18. – С. 125–130.

126. Обухов А.М. Статистически однородные поля на сфере/ А.М. Обухов // Успехи математических наук.– 1947.– Т. 2. N 2.– С. 196–198.

127. Обухов А.М. Статистическое описание непрерывных полей/ А.М. Обухов // Труды геофизического института АН СССР.– 1964.– N 24.– С. 3–42.

128. Оревкова О.А. О линейной экстраполяции однородного случайного поля/ О.А. Оревкова// Записки научных семинаров ЛОМИ.– 1972.– Т. 29.– С. 9–13.

129. Оревкова О.А. Некоторые вопросы экстраполяции случайных полей/ О.А. Оревкова // ДАН СССР.– 1971.– Т. 196. N 4.– С. 776–778.

130. Оревкова О.А. О тригонометрической аппроксимации в пространстве $L^2(R^d, f)$/ О.А. Оревкова // Записки научных семинаров ЛОМИ.– 1974.– Т. 39.– С. 94–103.

131. Пинскер М.С. Экстраполирование однородных случайных полей и количество информации о гауссовском случайном поле, содержащейся в другом гауссовском случайном поле/ М.С. Пинскер// ДАН СССР.– 1957.– Т. 112. N 5.– С. 815–818.

132. Плеснер А.И. Спектральная теория линейных операторов/ А.И. Плеснер. – М.: Наука, 1955. – 624 с.

133. Попов Ю.Д. Об одной задаче линейной экстраполяции для однородных и изотропных случайных полей по наблюдениям на окружности/ Ю.Д. Попов // Математические заметки.– 1968.– Т. 4. N.5.

134. Попов Ю.Д. Про лінійну екстраполяцію однорідного та ізотропного випадкового поля, яке спостерігається на сфері/ Ю.Д. Попов // ДАН УРСР. Серія А.– 1968.– N 5.

135. Попов Ю.Д. Деякі задачі лінійного прогнозу для однорідних випадкових полів/ Ю.Д. Попов // ДАН УРСР. Сер. А.– 12.– С.1067–1078.

136. Попов Ю.Д. Об одной задаче линейного прогноза для однородных случайных полей/ Ю.Д. Попов // Кибернетика.– 1969.– N 4.– С.88–93.

137. Попов Ю.Д. Об одной задаче линейного экстраполирования случайного поля по конечной области/ Ю.Д. Попов // Кибернетика.– 1969.– N 5.– С.115–117.

138. Попов Ю.Д. О линейной экстраполяции однородного и изотропного случайного поля по дискретным наблюдениям на окружности/ Ю.Д. Попов // Теория вероятностей и математическая статистика.– 1971.– Вып. 4.– С.123–129.

139. Попов Ю.Д. О линейной экстраполяции плоского дискретного однородного случайного поля/ Ю.Д. Попов // Вычислительная и прикладная математика.– 1971.– Вып. 14.– С. 102–111.

140. Попов Ю.Д., Ядренко М.И. Некоторые вопросы теории однородых и изотропных полей/ Ю.Д. Попов // Теория вероятностей и ее применения.– 1969.– Т. 14. N 3.

141. Попов Ю.Д. Об оценке спектральной плотности однородного и изотропного случайного поля на плоскости Лобачевского// Теория вероятностей и математическая статистика.– 1978.– Вып. 18. – С.134 – 143.

142. Попов Ю.Д. О моделировании однородного и изотропного случайного поля на плоскости Лобачевского/ Ю.Д. Попов // Моделирование и оптимизация сложных систем.– 1990.– Вып. 9.– С.24–28.

143. Преснякова О.А. Об аналитической структуре подпространств, порождаемых однородным случайным полем/ О.А. Преснякова // ДАН СССР.– 1970.– Т. 192. N 2.– С.279–281.

144. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций/ И.И. Привалов.– М.–Л.: Физматгиз.– 1950.

145. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи/ Б.Н. Пшеничный.– М.: Наука, 1980.– 320 с.

146. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума/ Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1982. – 144 с.

147. Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальфи–Надь. – М.: Мир, 1979. – 588 с.

148. Розанов Ю.А. Линейная экстраполяция многомерных стационарных процессов ранга 1 с дискретным временем / Ю.А. Розанов // ДАН СССР. – 1959. – Т. 125, № 2. – С. 277–280.

149. Розанов Ю.А, Об интерполировании стационарных процессов с дискретным временем/ Ю.А. Розанов // ДАН СССР. – 1960. – Т.130, № 4. – С. 730–733.

150. Розанов Ю.А. О линейном интерполировании стационарных процессов с дискретным временем / Ю.А. Розанов // ДАН СССР. – 1957.– Т. 116, № 6.

151. Розанов Ю.А. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем / Ю.А. Розанов // Успехи математических наук. – 1958. – Т. 13, № 2. – С. 93–142.

152. Розанов Ю.А. Спектральные свойства многомерных стационарных процессов и граничные свойства аналитических матриц/ Ю.А. Розанов // Теория вероятностей и ее применения. – 1960. – Т. 5, № 4. – С.399–414.

153. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы / Ю.А. Розанов – М.: Наука, 1990. – 272 с.

154. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ/ Р. Рокафеллар.– М.: Мир, 1973.– 488 с.

155. Татаринов С.В., Моклячук М.П. О минимаксном оценивании линейных преобразований случайных полей со значениями в гильбертовом пространстве/ С.В. Татаринов, М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика.– 1986.– Вып. 35.– С. 111–118.

156. Татаринов С.В. Об одной оценке линейного функционала и экстраполяции случайного поля/ С.В. Татаринов // Вычислительная и прикладная математика.– 1987.– Вып. 59.– С. 53–54.

157. Фортус М.И. Формулы для экстраполирования случайных полей/ М.И. Фортус // Теория вероятностей и ее применения.– 1962.– Т.7. N 1.– С.104–113.

158. Фортус М.И. Об экстраполяции случайного поля, удовлетворяющего волновому уравнению/ М.И. Фортус // Теория вероятностей и ее применения.– 1963.– Т. 8. N 2.

159. Хеннан Э. Многомерные временные ряды / Хеннан Э. – М.: Мир, 1974. – 576 с.

160. Хинчин А.Я. Теория корреляции стационарных случайных процессов/ А.Я. Хинчин // Успехи математических наук.– 1938.– Т. 5.– С. 42–51.

161. Хьюбер П. Робастность в статистике/ П. Хьюбер.– М.: Мир, 1984.– 304 с.

162. Цзян Цзе–пей. О линейной экстраполяции непрерывного однородного случайного поля// Теория вероятностей и ее применения.– 1957.– Т. 2. N 1.– С. 60–91.

163. Цзян Цзе–пей. Задачи экстраполяции для однородных случайных полей дискретного аргумента// ДАН СССР.– 1957.– Т. 112. N 2. – С. 207 – 210.

164. Щестюк Н.Ю. Про задачу інтерполяції випадкових полів / Н.Ю. Щестюк // Вiсник Київського унiверситету, серія фiз.- мат. науки. – 2003. – вип.№ 2. – С.54–61.

165. Щестюк Н.Ю. Задачі оцінки функціоналів від стаціонарного випадкового поля, яке спостерігається з корельованим шумом / Н.Ю. Щестюк, М.П. Моклячук // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2003.– № 1-2. – С.239–241.

166. Яглом А.М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью / А.М. Яглом // Труды Московского математического общества. – 1955. – № 4. – С. 333–374.

167. Яглом А.М. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с дискретным спектром / А.М. Яглом // Теория вероятностей и ее применения. – 1960. – Т. 5, № 3. – С. 265–292.

168. Яглом А.М. Введение в теорию стационарных случайных функций / А.М. Яглом // Успехи математических наук. – 1952. – Т. 7, № 5. – С. 3–168.

169. Яглом А.М. К вопросу о линейном интерполировании стационарных случайных последовательностей и процессов / А.М. Яглом // Успехи математических наук. – 1949. – Т. 4, № 4. – С. 171–178.

170. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций / А.М. Яглом – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1981. – 280 с.

171. Ядренко М.И. Про деякі задачі лінійного прогнозу для однорідних випадкових полів/ М.И. Ядренко // Вісник Київського університету. Сер. астр. матем. та мех.– 1958.– N 1.– С. 113–123.

172. Ядренко М.И. Об экстраполяции изотропных (не обязательно однородных) случайных полей/ М.И. Ядренко // Теория вероятностей и математическая статистика.– 1970.– Вып. 1.– С. 240 – 248.

173. Ядренко М.И. Об одной задаче линейной экстраполяции для однородного и изотропного случайного поля на плоскости Лобачевского/ М.И. Ядренко// Теория вероятностей и математическая статистика.– 1970.– Вып.2.– С. 263 – 267.

174. Ядренко М.И. Об одной интерполяционной задаче для однородного и и изотропного случайного поля/ М.И. Ядренко // Теория вероятностей и математическая статистика.– 1971.– Вып. 4. – С. 212 – 220.

175. Ядренко М.Й. Про одну задачу лінійної інтерполяції для однорідного ізотропного випадкового поля// ДАН УРСР. Серія А.– 1972.– N 4.

176. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей/ М.И. Ядренко. – Киев: Вища школа, 1980. – 208 с.

177. Экланд И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы/ И. Экланд, Р. Темам.– М.: Мир, 1979.– 400 с.

178. Adler, Robert J. Random fields and geometry/Robert J.Adler, Jonathan E. Taylor. – 2007. – Springer Monographs in Mathematics. New York, NY: Springer. – 448 p.

179. Brieman L. A note on minimax filtering/ L. Brieman // Ann. Prob. – 1973. – Vol. 1. – P. 175–179.

180. Chen C.T. Robust Wiener filtering for multiple inputs with channel distribution/ C.T. Chen, S.A. Kassam // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1984. – Vol. IT–30. – P. 674–677.

181. Chiang Tse–Pei. The prediction theory of stationary random fields. I. Half–plane prediction // Acta Scientiarum Naturalium Univ. Pekinensis.– 1980.– Vol. 25. N 1.– P. 25 – 50.

182. Cramér H. On the theory of stationary random processes / H. Cramér // Ann. Math. – 1940. – Vol. 41. – P. 215–230.

183. Cramér H. On linear prediction problem for certain stochastic process / H. Cramér // Arkiv Mat. – 1960. – Vol. 4, № 1. – P. 45–53.

184. Cramér H. On the structure of purely nondeterministic process / H. Cramér // Arkiv Mat. – 1961. – Vol. 4, № 2–3. – P. 246–266.

185. Cressie, Noel A.C. Statistics for spatial data/ Noel A.C.Cressie. – 1991. – Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York etc.: John Wiley & Sons, Inc. xx. – 900 p.

186. Dubovetska I. Minimax estimation problem for periodically correlated stochastic processes/ I. Dubovetska, M. Moklyachuk// Journal of Mathematics and System Science. –2013. –Vol. 3. – P. 26—30.

187. Dubovetska I. Estimation problems for periodically correlated isotropic random fields/ I. Dubovetska, O. Masyutka, M. Moklyachuk// Methodology and Computing in Applied Probability. – 2013. — 17pp.

$DOI 10.1007/s11009 - 013 - 9339 - 6$

188. Grenander U. A prediction problem in game theory/ U. Grenander// Ark. Mat.– 1957.– Vol. 3.– P. 371 – 379.

189. Grenander, Ulf. Toeplitz forms and their applications/ Ulf Grenander, Gabor Szegö. – 1958. – Berkeley and Los Angeles: University of California Press VIII. – 245 p.

190. Grenander, Ulf. Statistical analysis of stationary time series/ Ulf Grenander, Murray Rosenblatt. – 1957. – New York: John Wiley & Sons; Stockholm: Almquist & Wiksell. – 300 p..

191. Franke J. On the robust prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise / J. Franke // J. Time Series Analysis. – 1984. – Vol. 5, № 4. – P. 227–244.

192. Franke J. Minimax robust prediction of discrete time series / J. Franke // Z. Wahr. Verw. Geb. – 1985. – Vol. 68. – P. 337–364.

193. Franke J. Minimax-robust filtering and finite-length robust predictors / J. Franke, H.V. Poor // Robust and Nonlinear Time Series Analysis. Lecture Notes in Statistics. – 1984. – Vol. 26. – P. 87–126.

194. Hanner O. Deterministic and non-deterministic stationary random processes / O. Hanner // Ark. Mat. – 1950. – Vol. 1, № 2. – P. 161–177.

195. Helson H. Vector–valued processes/ H. Helson, D. Lowdenslager // Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.– 1960.– Vol. 2.– P.203 – 212.

196. Helson H. Prediction theory and Fourier series in several variables.I/ H. Helson, D. Lowdenslager // Acta Math. – 1959. – Vol. 99. – P.165–202.

197. Helson H. . Prediction theory and Fourier series in several variables.II/ H. Helson, D. Lowdenslager // Acta Math.– 1961.– Vol. 106.– P.175–213.

198. Helson H. A problem in prediction theory / H. Helson, G. Szego // Ann. Math. Pure and Appl. – 1960. –Vol. 51. – P.107–138.

199. Hosoya Y. Robust linear extrapolations of second–order stationary Processes/ Y. Hosoya // Ann. Prob.– 1978.– Vol. 6.– P. 574 – 584.

200. Hosoya Y. Harmonizable stable processes/ Y. Hosoya // Z. Wahr. Verw. Geb.– 1982.– Vol. 60.– P. 517 – 533.

201. Huber P.J. Robust estimation of a location parameter / P.J. Huber // Ann. Math. Stat. – 1964. – Vol. 53. – P. 73–104.

202. Huber P.J. A robust version of the probability ratio test/ P.J. Huber // Ann. Math. Stat.– 1965.– Vol. 36.– P. 1753 – 1758.

203. Huber P.J. Minimax tests and the Neyman–Pearson lemma for capacities/ P.J. Huber, V. Strassen // Ann. Stat.– 1973.– N 1.– P. 251 – 263.

204. Jang Ze–Pei. The prediction theory of multivariate stationary processes// I. Chinese Math.– 1963.– Vol. 4. N 2.– P. 291 – 321; II. Chinese Math.– 1964.– Vol. 5. N 3.– P. 471 – 484.

205. Kailath T. A view of three decades of linear filtering theory / T. Kailath // IEEE Trans. on Inform. Theory. – 1974. – Vol. 20, № 2. – P.146–181.

206. Kallianpur G. Multiplicity and representation theory of purely non–deterministic processes/ G. Kallianpur, V. Mandrekar // Теория вероятностей и ее применения.– 1965.– Т. 10. N 4.– С. 614 – 644.

207. Kallianpur G. Some remarks on the purely nondeterministic property of second order random fields/ G. Kallianpur // Lecture Notes in Control and Information Sciences.– 1981.– N 36.– P.98 – 109.

208. Kallianpur G. Commuting semigroups of isometries and Karhunen representation of second order stationary random fields/ G. Kallianpur // Lect. Notes Contr. and Inf. Sci.– 1983.– Vol. 49.– P.126 – 145.

209. Kallianpur G. Nondeterministic random field and Wold and Halmos decompositions for commuting isometries/ G. Kallianpur, V. Mandrekar // In Prediction Theory and Harmonic analysis. The Pesi Masani Volume (V.Mandrekar and H. Salehi Eds.).– 1983.– P.165 – 190.

210. Kallianpur, G.; Miamee, A.G.; Niemi, H. ti: On the prediction theory of two-parameter stationary random fields/ G. Kallianpur, A.G. Miamee, H. Niemi // J. Multivariate Anal. – 1990. – Vol. 32, No.1. P.120–149.

211. Karhunen K. Uber lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung/ K. Karhunen // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A.– 1947.– Vol. 37.– P. 3 – 79.

212. Karhunen K. Uber die structur stationarer zufalliger functionen/ K. Karhunen // Ark. Mat.– 1950.– Vol. 1. N 2.– P. 141 – 160.

213. Karhunen K. Sur interpolation von stationaren zuffaligen functionen/ K. Karhunen // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A.– 1952.– Vol. 142.– P. 3 – 8.

214. Kassam S.A. Robust Wiener filters / S.A. Kassam, T.L. Lim // Franklin J. Inst. – 1977. – Vol. 304. – P. 171–185.

215. Kassam S.A. Two-dimensional filters for signal processing under modeling uncertainties / S.A. Kassam, T.L. Lim, L.J. Cimini // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. – 1980. – Vol. GE–18. – P. 331–336.

216. Kassam S.A. Robust hypothesis testing for bounded classes of probability densities/ S.A. Kassam // Trans. Inform. Theory. – 1981. – Vol. IT–27. – P.242–247.

217. Kassam S.A. Robust signal processing for communication systems / S.A. Kassam, V.H. Poor // IEEE Commun. Mag. – 1983. – Vol. 21. – P.20–28.

218. Kassam S.A. Robust techniques for signal processing: A survey / S.A. Kassam, V.H. Poor // Proceedings IEEE. – 1985. – Vol. 73, № 3. – P.433–481.

219. Khoshnevisan, Davar. Multiparameter processes. An introduction to random fields/ Davar Khoshnevisan// – 2001.– Springer Monographs in Mathematics. New York, NY: Springer. – 584 p.

220. Korezlioglu H. On 2–D innovation processes/ H. Korezlioglu // Signal Processing: Theory and Applications.– 1980.– P. 187 – 191.

221. Korezlioglu H. Spectral factorization of wide sence stationary processes on Z^2/ H. Korezlioglu, Ph. Loubaton// J. Multivar. Analysis.– 1986.– Vol. 19. N 1.– P. 24 – 47.

222. Korezlioglu M. Prediction des processus stationnaires an cens large sur relativement aux dimi–plans/ H. Korezlioglu, Ph. Loubaton// C. R. Acad. Sc. Paris. Serie I.– 1985.– Vol. 301.– P. 27 – 30.

223. Korezlioglu M. Factorisation et decomposation spectrales pour les processus stationaires an Sens large sur/ H. Korezlioglu, Ph. Loubaton// C. R. Acad. Sc. Paris. Serie I.– 1985.– Vol. 301. N 3.– P. 81 – 84.

224. Makagon A. Infinite dimensional stationary sequences with multiplicity one / A. Makagon, M. Salehi // Ann. Acad. Sci. Fennice. Ser. A. I. Mathematica. – 1987. – Vol. 12. – P. 135–150.

225. Makagon A. Infinite dimensional stationary sequences / A. Makagon, M. Salehi // Lecture Notes in Math. – 1989. – Vol. 1391. – P. 200–238.

226. Makagon A. On the Hellinger square integral with respect to an operator vakued measure and stationary processes// J. Multivar. Analysis.– 1984.– Vol. 14. N 1.– P. 114 – 133.

227. Makagon A. M. Stationary fields with positive angle/ A. Makagon, M. Salehi // J. Multivar. Analysis.– 1987.– Vol. 22.– P. 106 – 125.

228. Makagon A. Infinite dimensional stationary sequences with multiplicity one; part II/ A. Makagon, M. Salehi // Ann. Acad. Sci. Fennice. Ser. A.I. Mathematica.– 1993.– Vol. 18.– P. 203 – 210.

229. Mandrekar V. Subordination of infinite–dimensional stationary stochastic processes/ V. Mandrekar, M. Salehi// Ann. Inst. Henri Poincare. Sect. B.– 1970.– Vol. 6.– P. 115 – 130.

230. Martin C. Robust filtering and prediction for linear systems with uncertain dynamics: A game–theoretic approach/ C. Martin, M. Mintz // IEEE Trans. Automat. Contr.– 1983.– Vol. AC–28.– P.888 – 896.

231. Masani P. Sur la prevision lineare d'un processus vectorial a densite spectrale non bornee/ P. Masani // C. r. Acad. sci.– 1958.– Vol. 246. N 16.– P.2337 – 2339.

232. Masani P. Sur les processes vectorieles minimaux de rang maximal/ P. Masani // C. r. Acad. sci.– 1958.– Vol. 246. N 15.– P.2215 – 2217.

233. Masani P. Sur la fonction generatrice d'un processus stochastique vectorial/ P. Masani // C. r. Acad. sci.– 1959.– Vol. 249.– P.360 – 362.

234. Masani P. Isomorphie entre les domaines temporel et spectral d'un processus vectoriel, regilier/ P. Masani // C. r. Acad. sci.– 1959.– Vol. 249. N 4.– P.496 – 498.

235. Masani P. Cramer's theorem on monotone matrix–valued funktions and the Wold decomposition/ P. Masani // Probability and Statistic.– 1959.– P.175 – 178.

236. Masani P. Sur les fonction matricielles de la classe de Hardy H/ P. Masani // C. r. Acad. sci.– 1959.– Vol. 249.– P. 873 – 875, P.906 – 907.

237. Masani P. The prediction theory of multivariate stochastic processes.III/ P. Masani // Acta Math.– 1960.– Vol. 104.– P.142 – 162.

238. Masani P. Une les fonktion matricielles de la classe de Hardy H d'un theorem de Nevanlina// C. r. Acad. sci.– 1960.– Vol. 251. N 3.– P.318 – 320.

239. Masani P. Shift invariant space and prediction theory/ P. Masani // Acta Math.– 1962.– Vol. 107. N 3–4.– P.275 – 290.

240. Masani P. Recent trends in multivariate prediction theory/ P. Masani // J. Multivar. Analysis. – 1966. – Vol. 4. – P.351–382.

241. Masani P. The time–domain analysis of a continuous parameter weakly stationary stochastic processes/ P. Masani, I. Robertson// Pacific J. Math.– 1968.– Vol. 12. N 4.– P.1361 – 1378.

242. Miamee A.G. On an explicit representation of the linear predictor of a weakly stationary stochastic sequence/ A.G. Miamee, H. Salehi // Boletin Soc. Mat. Mexicana. – 1983. – Vol. 28. – P.81–93.

243. Miamee A.G. On the angle between past and future and prediction theory of stationary stochastic processes/ A.G. Miamee // J. Multivar. Analysis.– 1986.– Vol. 20.– P.205 – 219.

244. Miamee A.G. Wold decomposition, prediction and parametrization of stationary processes with infinite variance/ A.G. Miamee, M. Pourahmadi // Probab. Theory and Related Fields.– 1988.– Vol. 79.– P.145 – 164.

245. Miamee, A.G.; Niemi, H. On the angle for stationary random fields/ A.G. Miamee, H. Niemi // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, Math. – 1992. – Vol. 17, No.1. – P. 93–103.

246. Moklyachuk M. Estimation of Linear Functionals of Stationary Stochastic Processes and a Two-Person Zero-Sum Game/ M. Moklyachuk // Stanford University Technical Report. – 1981. – No. 169. – 82p.

247. Moklyachuk M. Minimax-robust interpolation of discrete time series/ M. Moklyachuk// Evolut. Stoch. Syst. in Physics and Biology. V.S. Korolyuk et al Eds. Moscow, TVP. – 1993. – C. 336-347.

248. Moklyachuk M. A problem of minimax smoothing for homogeneous isotropic on a sphere random fields/ M. Moklyachuk // Random operators and stochastic equations. – 1993. – Vol. 1. – No 2. – P. 191–201.

249. Moklyachuk M. On stochastic equations which describe one-sided moving average processes and minimax filtering/ M. Moklyachuk// Random operators and stochastic equations. – 1993. – Vol. 1. – No 4. – P. 329–343.

250. Moklyachuk M. Minimax-robust interpolation of stationary stochastic processes/ M. Moklyachuk // New Trends in Probability and Statistics. Proc. 2nd Ukrainian-Hungarian Conf. Eds: M.Arato, M.Yadrenko. – 1995. – Kiev, TBiMC. – P. 195-205.

251. Moklyachuk M. Minimax robust approach to filtering problem/ M. Moklyachuk // Proceed. 7th Internat. Symp. Applied Stochastic Models and Data Analysis. Eds: Janssen J.J., McClean SI. – 1995. – Dublin, Ireland. – P. 416-419.

252. Moklyachuk M. On interpolation problem for vector-valued stochastic sequences/ M. Moklyachuk // Random operators and stochastic equations. – 1995. – Vol. 3. – No 1. – P. 65–74.

253. Moklyachuk M. Interpolation of vector-valued stochastic processes/ M. Moklyachuk // Exploring Stochastic Law. A.V. Skorokhod, Yu.V. Borovskikh (Eds). – 1995. – VSP, Utrecht. – P. 329–342.

254. Moklyachuk M Some problems of estimation from noisy data/ M. Moklyachuk // ZAMM, Z. Angew. Math. Mech. — 1998. – V. 78, N3, – P. 1021-1022.

255. Moklyachuk M. Robust procedures in time series analysis/ M. Moklyachuk // Theory of stochastic processes. – 2000. – Vol. 6 (22). – No. 3, – 4. – P. 127 – 147.

256. Moklyachuk M. Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems/ M. Moklyachuk // Theory of stochastic processes. – 2001. – Vol. 7 (23). – No. 1 – 2. – P. 253 – 264.

257. Moklyachuk M. Estimation problems for random fields from noisy data / M. Moklyachuk // Random operators and stochastic equations. – 2002. – Vol. 10. – No 3. – P. 223–232.

258. Moklyachuk M. Prediction problems for random fields on groups/ M. Moklyachuk // Theory of Stochastic Processes. – 2007. – Vol.13 (29), no.4. – P. 148–162.

259. Robust prediction problem for periodically correlated stochastic sequences/ M. Moklyachuk // 5th Conference in Actuarial Science and Finance on Samos, Proceedings. – 2009. – P. 51-65.

260. Moklyachuk M. Random field/ M. Moklyachuk // StatProb: The Encyclopedia Sponsored by Statistics and Probability Societies. – 2010. Freely available at

http://statprob.com/encyclopedia/RandomField6.html

261. Moklyachuk M. Estimation Problems for Random Fields/ M. Moklyachuk // International Encyclopedia Of Statistical Science. – 2011, Part 5. – P. 459-460.

262. Moklyachuk M. Random fields/ M. Moklyachuk // International Encyclopedia Of Statistical Science. – 2011, Part 18. – P. 1165-1168.

263. Moklyachuk M. Extrapolation of multidimensional stationary processes / M. Moklyachuk, A. Masyutka// Random operators and stochastic equations. – 2006. – Vol. 14. – No 3. – P. 233 – 244.

264. Moklyachuk M. Robust estimation problems for stochastic processes / M. Moklyachuk, A. Masyutka// Theory of stochastic processes. – 2006. – Vol. 12 (28). – No. 3 – 4. – P. 88 – 113.

265. Moklyachuk M. Robust filtering of stochastic processes / M. Moklyachuk, A. Masyutka// Theory of Stochastic Processes. – 2007. – Vol. 13 (29). – No. 1 – 2. – P. 166 – 181.

266. Moklyachuk M. Minimax prediction problem for multidimensional stationary stochastic sequences / M. Moklyachuk, A. Masyutka// Theory of stochastic processes. – 2008. – Vol. 14 (30). – No. 3 – 4. – P. 89 – 103.

267. Moklyachuk M. Minimax prediction problem for multidimensional stationary stochastic processes/ M. Moklyachuk, A. Masyutka// Communications in Statistics - Theory and Methods. – 2011. – Vol. 40, Iss. 19-20. – P. 3700-3710.

268. Moklyachuk M. Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes / M. Moklyachuk, O. Masyutka// LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2012. – 296 p.

269. Moklyachuk M.P. Minimax filtering of homogeneous random fields with white noise/ M. P. Moklyachuk, S. V. Tatarinov// Journal of Mathematical Sciences – 1994. – 71, No. 5. – P. 2689 – 2700.

270. Moklyachuk M.P. Robust estimates of functionals of homogeneous random fields/ M.P. Moklyachuk, N.Yu. Shchestyuk// Theory of Stochastic Processes. - 2003. – N 3-4.– P.101-113.

271. Moklyachuk M.P. Estimation problems for stochastic processes from observations in discrete moments of time/ M.P. Moklyachuk, N.Yu. Shchestyuk// Theory of Stochastic Processes. - 2003. – N 3-4.– P.114-131.

272. Moklyachuk M.P. Estimation problems for random fields from observations in discrete moments of time / M.P. Moklyachuk, N.Yu. Shchestyuk //Theory of Stochastic Processes. – 2004. – N 1-2. – P.141-154.

273. Moustakides G. Robust Wiener filters for random signals in correlated noise/ G. Moustakides, S.A. Kassam // IEEE Trans. Inform. Theory.– 1983.– Vol. IT–29.– P. 614 – 619.

274. Moustakides G. Robust Wiener filters for correlated signals and noise/ G. Moustakides, S.A. Kassam // Proc. 1980 Conf. on Inform. Sciences Syst. (Princeton Univ. Princeton. Mar. 26–28. 1980) – P. 308 – 313.

275. Niemi H. On the construction of Wold decomposition for multivariate stationary processes/ H. Niemi // J. Multivar. Analysis.– 1979.– Vol. 9.– P. 545 – 559.

276. Niemi H. Subordination, rank and determinism of multivariate stationary sequences/ H. Niemi // J. Multivar. Analysis.– 1984.– Vol. 15. N 1.– P. 99 – 123.

277. Niemi H. On spectral prediction error formulas for stationary random fields on / H. Niemi // Ann. Acad. Sci. Fennice. Ser. A. I. Mathematica. – 1988. – Vol. 13. – P. 243–253.

278. Peterson D. Linear interpolation, extrapolation and prediction of random space – time fields with a limited domain of measurement/ D. Peterson, D. Middleton // IEEE Trans. Inform. Theory.– 1965.– Vol. 116. N.1.

279. Petersen D. Reconstructions of multidimensional stochastic fields discrete measurements of amplitude and gradient/ D. Peterson, D. Middleton // Information and Control.– 1964.– Vol. 7. N 4.– P. 445 – 476.

280. Pop–Stojanovic Z. On a property of continuous homogeneous random fields/ Z. Pop–Stojanovic // Colloq. Math.– 1964.– Vol. 12. N 2.– P.265 – 269.

281. Poor H.V. On robust Wiener filtering/ H. V. Poor // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1980. – Vol. AC–15. – P. 531–536.

282. Poor H.V. Minimax state estimation for linear stochastic systems with noise uncertainty/ H.V. Poor, D.P. Looze // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1981. – Vol. AC–26. – P. 902–906.

283. Poor H.V. Minimax linear smoothing for capacities/ H. V. Poor // Ann. Prob. – 1982. – Vol. 10. – P. 504–507.

284. Poor H.V. The rate–distortion function on classes of courses determined by spectral capacities/ H. V. Poor // IEEE Trans. Inform. Theory.– 1982.– Vol. IT–28.– P. 19 – 26.

285. Pourahmadi M. A matricial extension of the Helson–Szego theorem and its application in multivariate prediction/ M. Pourahmadi // J. Multivar. Analysis. – 1985. – Vol. 16. – P. 265–275.

286. Pourahmadi M. Autoregressive representations of multivariate stationary stochastic processes/ M. Pourahmadi // Probab. Theory and Related Fields. – 1988. – Vol. 80. – P. 315–322.

287. Pourahmadi M. On minimality and interpolation of harmonizable stable processes/ M. Pourahmadi // SIAM J. Appl. Math.– 1984.– Vol. 44.– P.1023 – 1030.

288. Pourahmadi M. The Helson–Sarason–Szego theorem and the Abel summability of the series for the predictor/ M. Pourahmadi // Proc. American. Math. Soc.– 1984.– Vol. 91. N 2.– P.306 – 308.

289. Pourahmadi M. Alternation projection and interpolation of stationary processes/ M. Pourahmadi // J. Appl. Probab.– 1992.– Vol. 29.– P.921 – 931.

290. Pourahmadi M. Robust prediction of multivariate stationary processes/ M. Pourahmadi // Sankhya: The Indian Journal of Statistics. Ser.A.– 1990.– Vol. 52. N 1.– P.115 – 126.

291. Ramm, A. G. Random fields estimation/ A.G. Ramm. – 2005. – Hackensack, NJ: World Scientific. – 373 p.

292. Ranganath S. Two–dimensional linear prediction models. Part I: Spectral factorization and realization/ S. Ranganath, A.K. Sain // IEEE Trans. Acoustic. Speech and Signal Processing.– 1985.– Vol. ASSP – 33. N 1.– P. 280 – 299.

293. Rieder H. Least favorable pairs for spesial capacities/ H. Rieder// Ann. Statist.– 1977.– Vol. 5.– P.909 – 921.

294. Ripley B. D. Spatial statistics/ B. D.Ripley. – 1981. – New York etc.: John Wiley & Sons, Inc. – 252 p.

295. Robertson L.B. Orthogonal decompositions of multivariate weakly stationary stochastic processes / L.B. Robertson // Canad. J. Math. – l968. – Vol. 20, № 2. – P. 368–375.

296. Rozanov Yu. A. Markov random fields/Yu. A.Rozanov. – 1982. – New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. – 201p.

297. Robinson E. Extremal representation of stationary stochastic processes/ E. Robinson // Arkiv Mat.– 1962.– Vol. 4. N 4.– P. 379 – 384.

298. Robinson E. Extremal properties of the Wold decomposition/ E. Robinson // J. Math. Analysis and Applic. – 1963. – Vol. 6, № 1. – P. 75–85.

299. Robinson E. Properties of the Wold decompositions of stationary stochastic process/ E. Robinson // Теория вероятн. и ее примен.– 1963.– T. 8. N 2.– P. 202 – 211.

300. Rosenblatt M. The multidimensional prediction problem / M. Rosenblatt // Arc. Mat. – 1958. – Vol. 3, № 5. – P. 407–424.

301. Rosenblatt M. The multidimensional prediction problem/ M. Rosenblatt // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.– 1957.– Vol. 43. – P. 989 – 992.

302. Salehi H. A factorization algorithm for matrix–valued functions on the real line/ H. Salehi // Trans. Amer. Math. Soc.– 1962.– Vol. 124. N.3.– P. 468 – 479.

303. Salehi H. On interpolation of q–variate stationary stochastic processes/ H. Salehi // Pasif. J. Math.– 1962.– Vol. 28. N 1.– P.183 – 191.

304. Salehi H. A transformation theorem on spectral measures/ H. Salehi // Proc. Amer. Math. Soc.– 1967.– Vol. 18. N 4.– P.610 – 613.

305. Salehi H. On the alternating projections theorem and bivariate stationary stochastic processes/ H. Salehi // Trans. Amer. Math. Soc.– 1967.– Vol. 128.– P.121 – 134.

306. Salehi H. Application of the Hellinger integral to q–variate stationary stochastic processes/ H. Salehi // Ark. Mat.– 1968.– Vol. 7. N 4.– P.305 – 311.

307. Salehi H. On the Hellinger integrals and interpolation of q–variate stationary stochastic processes/ H. Salehi // Ark. Math.– 1969.– Vol. 8. N 1.

308. Salehi H. Interpolation of q–variate homogeneous random fields/ H. Salehi // J. Math. Analysis and Applic.– 1969.– Vol. 25. N 36.– P.653 – 662.

309. Salehi H. On the bilateral linear predictor for minimal stationary stochastic processes/ H. Salehi // SIAM J. Appl. Math.– 1974.– Vol. 26. N 3.– P.502 – 507.

310. Salehi H. Algoritums for linear interpolator and interpolation error for minimal stationary stochastic processes/ H. Salehi // Ann. Probab.– 1979.– Vol.7.– P.840 – 846.

311. Soltani A. R. Extrapolation and moving average representation for stationary random fields and Berling's theorem/ A. R. Soltani // Ann. Probab.– Vol. 12.– P.120 – 132.

312. Stone M.H. Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis/ M.H. Stone.– AMS, 1932.– 622 p.

313. Szegö G. Beitrage zur Theorie der Toeplitzschen Formen/ G. Szegö // J. Math. Ztschr.– 1920.– N 6.– P. 167–202; II. Math. Ztschr.– 1921.– N 9.– P.167 – 199.

314. Taniguchi M. Robust regression and interpolation for time series/ M. Taniguchi // J. Time Ser. Analysis. – 1981. – Vol. 2. – P. 53–62.

315. Tjostheim D. Statistical spatial series modelling/ D. Tjostheim // Advan. Appl. Probab.– 1978.– Vol. 10.– P. 130 – 154.

316. Traknakis M. Robust prediction and interpolation for vector stationary processes/ M. Traknakis, D. Kazakos, P. Papantoni–Kazakos // Probab Theory and Related Fields.– 1986.– Vol. 72.– P. 589 – 602.

317. Tsaknakis H. Robust linear filtering for multivariable stationary time series/ M. Traknakis, P. Papantoni–Kazakos // Proc. 1984 Conf. on Inform. Sciences Syst. Princeton Univ. Princeton.–1984.– P. 6 – 10.

318. Vastola K.S. On generalized band models in robust detection and filtering / K.S. Vastola, H.V. Poor // Proc. 1980 Conf. on Inform. Sciences and Systems. Princeton Univ. Princeton. – 1980. – P. 1–5.

319. Vastola K.S. An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering / K.S. Vastola, H.V. Poor // Automatica. – 1983. – Vol. 28. – P. 289–293.

320. Vastola K.S. On the p-point uncertainty class / K.S. Vastola, H.V. Poor // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1984. – Vol. IT–30. – P. 374–376.

321. Vastola K.S. Robust Wiener–Kolmogorov theory/ K.S. Vastola, H.V. Poor // IEEE Trans. Inform. Theory.– 1984.– V. IT–30.– P. 316 – 327.

322. Verdu S. Minimax robust discrete–time matched filters/ S. Verdu, H.V. Poor // IEEE Trans. Commun.– 1983.– Vol. COM–31.– P. 208 – 215.

323. Verdu S. Signal selection for robust matched filtering/ S. Verdu, H.V. Poor // IEEE Trans. Commun.– 1983.– Vol. COM–31.– P. 667 – 670.

324. Verdu S. On minimax robustness: A general approach and applications/ S. Verdu, H.V. Poor // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1984. – Vol. IT–30. – P. 328–340.

325. Verdu S. Minimax linear observers and regulators for stochastic systems with uncertain second–order statistics/ S. Verdu, H.V. Poor // IEEE Trans. Automat. Contr.– 1984.– Vol. AC–29.– P. 499 – 511.

326. Whittle P. The analysis of multiple stationary time series / P. Whittle // J. Roy. Statist. Soc. Ser. A. – 1953. – Vol. 15. – P. 125–139.

327. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering application / Wiener N. – N.Y.: 1949.

328. Wiener N. The prediction theory of multivariate stochastic processes / N. Wiener, P. Masani // I. Acta Math. – 1957. – Vol. 98. – P. 111–150; II. Acta Math.– 1958.– Vol. 99.– P. 93 – 137.

329. Wiener N. Comprehensive view of prediction theory/ N. Wiener // Proc. Int. Congress Math. Harvard.– 1950.– Vol. 2.– P. 308 – 321.

330. Wiener N. On the factorization of matrices/ N. Wiener // Comment. Math. Helv.– 1955.– Vol. 29.– P. 97 – 111.

331. Wiener N. Sur la prevision lineare des processus stochastiques vectiriel a densite spectrale bornee/ N. Wiener, P. Masani // C.r. Acad. sci.– 1958.– Vol. 246.– P. 1495; P. 1655 – 1656.

332. Wiener N. On bivariate stationary processes and the factorization of matrixvalued function/ N. Wiener, P. Masani // Теория вероятностей и ее применения.– 1959.– T. 4. N 3.– P. 322 – 331.

333. Wold H. A study in the analysis of stationary time series / H. Wold // Thesis University of Stockholm. – 1938.

334. Wold H. On prediction in stationary time series / H. Wold // Ann. Math. Stat. – 1948. – Vol. 19, № 4. – P. 558–567.

335. Wong E. On the multidimensional prediction and filtering problem and the factorization of spectral matrices / E. Wong E., I.B. Thomas // J. Franklin Inst. – 1961. – Vol. 272, № 2. – P. 87–99.

336. Yadrenko M.I. Spectral theory of random fields/ M.I. Yadrenko. -– 1983. – New York: Optimization Software, Inc., Publications Division; New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag. III. – 259 p.

337. Yaglom A.M. Second-order homogeneous random felds/ A.M. Yaglom // Proc 4th Berkeley Sympos. Math. Stat. and Prob. – 1960. – 2. – P. 593-622.

338. Yaglom A.M. Correlation theory of stationary and related random functions. Volume I: Basic results/ A.M. Yaglom. – 1987. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag. XIV. – 526 p.

339. Yaglom A.M. Correlation theory of stationary and related random functions. Volume II: Supplementary notes and references/ A.M. Yaglom. – 1987. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag. IX. – 258 p.

340. Youla D.C. On the factorization of rational matrices / D.C. Youla // IRE Trans. Inform. Theory. – 1961. – Vol. 7. – P. 172–189.

341. Yovits M.C. Linear filter optimization with game theory considerations / M.C. Yovits, J.L. Jackson // IRE Nat. Conv. Rec. – 1955. – Vol. 4. – P. 193–199.

Наукове видання

МОКЛЯЧУК Михайло Павлович
ЩЕСТЮК Наталія Юріївна

ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Монографія

Друкується за авторською редакцією

Ганітура Times New Roman. Папір офсетний.
Формат видання 60x84/16.
Умов. друк. арк. 10.36. Зам. № 22. Наклад 300 прим.
Видруковано ПП “АУТДОР - ШАРК”
88000, м. Ужгород, пл. Жупанатська, 15/1. Тел.: 3-51-25. E-mail: office@shark.com.ua
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції
Серія 3т № 40 від 29 жовтня 2012 року