Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О.Ю. Масютка, М.П. Моклячук

МІНІМАКСНІ ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

Монографія

Київ
Видавничо-поліграфічний центр
«Київський університет»
2012

УДК 519.21
ББК 22.17
М74

Рецензенти: Королюк В.С., професор, доктор фіз.-мат. наук,
академік НАН України;
Кнопов П.С., професор, доктор фіз.-мат. наук,
член-кореспондент НАН України;

Затверджено вченою радою
механіко-математичного факультету
24 квітня 2012 року, протокол № 8

Масютка О.Ю., Моклячук М.П.
М74 Мінімаксні оцінки функціоналів від стохастичних процесів: монографія — К.: ВПЦ «Київський університет», 2012. — 216 с.

??????????-???
РВЦ ≪Київський університет≫

УДК 519.21
ББК 22.17

У монографії викладені методи оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стохастичних процесів. Наведені формули для обчислення величини середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки. Знайдені наймен сприятливі спектральні шільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики. Рекомендується науковим співробітникам, аспірантам і студентам університетів, що спеціалізуються в області теорії ймовірностей та математичної статистики. Книга буде корисна дослідникам в області радіотехніки, фізики атмосфери, геофізики, фінансової математики, математичної економіки.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Серед сучасних напрямків розвитку теорії випадкових процесів таких як узагальнені випадкові процеси, властивості функціоналів від випадкових процесів, статистичні методи дослідження випадкових процесів та деяких інших важливу роль відіграє напрямок, який присвячений задачам оцінки невідомих значень випадкових процесів. Особливо актуальними в останні роки є задачі оцінки процесів в умовах невизначеності. Такі задачі виникають при розгляді проблем теорії автоматичного управління, кодування та обробки сигналів у радіолокації та гідролокації, проблем розпізнавання образів мовних сигналів та зображень.

Задачі оцінки випадкових процесів включають у себе задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації.

Постановка задачі інтерполяції та екстраполяції для стаціонарних випадкових послідовностей, їх геометрична інтерпретація та зведення до задач теорії функцій належить А.М. Колмогорову (1940, 1941). Задача екстраполяції випадкової стаціонарної послідовності $\xi(t),\ t \in \mathbb{Z}$ зі скінченим математичним сподіванням квадрата випадкової величини $\xi(t)$ полягала в тому, що знаходяться такі дійсні коефіцієнти a_i при яких лінійна комбінація

$$L = a_1\xi(t-1) + a_2\xi(t-2) + \ldots + a_n\xi(t-n) + \ldots$$

випадкових величин

$$\xi(t-1),\ \xi(t-2),\ \ldots,\ \xi(t-n), \ldots$$

якомога більш точно наближує випадкову величину $\xi(t+m), m \geq 0$. За міру точності природно береться середньоквадратична похибка оцінювання

$$\sigma^2 = M\left|\xi(t+m) - L\right|^2.$$

Щодо проблеми інтерполяції, то А.М. Колмогоров розглядав лише випадок оцінки одного пропущеного значення $\xi t)$ за відомих значень

$$\xi(t+1),\ \xi(t+2),\ \ldots,\ \xi(t+n), \ldots$$

$$\xi(t-1),\ \xi(t-2),\ \ldots,\ \xi(t-n), \ldots.$$

Ці задачі А.М. Колмогоров розв'язує, виходячи з того, що величини $\xi(t),\ t \in \mathbb{Z}$, є елементами деякого гільбертового простору, скалярний добуток в якому ототожнюється із кореляційною функцією

$$\langle \xi(t+k), \xi(t) \rangle = B(k) = M\xi(t+k)\overline{\xi(t)},$$

та оптимальна оцінка (проекція) знаходиться з властивостей геометрії цього простору. А.М. Колмогоров розглядає дію унітарного оператора зсуву U на множині значень послідовності:

$$U\xi(t) = \xi(t+1), t \in \mathbb{Z},$$

що дозволяє йому одержати ряд основних властивостей стаціонарних послідовностей як безпосередніх наслідків відомих результатів спектральної теорії унітарних операторів. А саме – спектральний розклад кореляційної функції

$$B(k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – неперервна справа неспадна функція, так звана спектральна функція послідовності $\xi(t),\ t \in \mathbb{Z}$; спектральний розклад стаціонарної послідовності

$$\xi(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda),$$

де $Z(\lambda)$ – ортогональна стохастична міра, $\Delta F(\lambda) = M\left|Z(\Delta\lambda)\right|^2$. А також, як наслідок, можливість представлення кожної випадкової величини $\eta \in L_2(\xi)$ ($L_2(\xi)$– лінійний простір випадкових величин $\xi(t)$) у вигляді

$$\eta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) dZ(\lambda),$$

де $\varphi(\lambda) \in L_2(f)$, $L_2(f)$ – гільбертів підпростір комплекснозначних функцій $e^{it\lambda}, t \in \mathbb{Z}$ на $[-\pi, \pi]$, інтегровних в квадраті за мірою, що має щільність $f(\lambda)$.

Виходячи з вищевказаних властивостей стаціонарних послідовностей та з розкладу Вольда (1938, 1948) стаціонарної послідовності у вигляді суми сингулярної компоненти та рухомого середнього А.М. Колмогоров знаходить величини середньоквадратичних похибок екстраполяції та інтерполяції та встановлює спектральні умови для можливості інтерполяції та екстраполяції випадкової стаціонарної послідовності. Так необхідною та достатньою умовою, за якої безпомилкова екстраполяція невідомих значень буде неможливою є умова

$$P = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda > -\infty,$$

а для задачі інтерполяція – ця умова (умова мінімальності) записується наступним чином

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda)} d\lambda < \infty.$$

Ці результати А.М. Колмогорова, що відносяться до задачі про екстраполяцію стаціонарних послідовностей з невеликими відмінностями вдалося перенести М.Г. Крейну (1945, 1954) на випадок стаціонарних процесів $\xi t), t \in \mathbb{R}$. При цьому, як виявилось, умова, за якої безпомилкова екстраполяція невідомих значень буде неможливою має вигляд

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\, f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda > -\infty.$$

Зображення стаціонарного процесу у вигляді, аналогічному до представлення Вольда, було досліджено і одержано О.Ханнером (1950):

$$\xi(t) = \int_{0}^{\infty} a(s) d\eta(t-s) + \xi_s(t).$$

При цьому сам випадковий процес $x(t), t \in \mathbb{R}$ розглядається як однопараметрична система векторів гільбертового простору, тобто як крива цього простору. Кореляційна теорія випадкових процесів еквівалентна теорії кривих у гільбертовому просторі, а стаціонарним випадковим процесам відповідають такі криві цього простору для яких скалярний добуток $\langle \xi(t), \xi(s) \rangle$ залежить лише від $(t-s)$.

Щодо безпосереднього знаходження оцінок невідомих значень послідовностей та процесів, то Н.Вінером (1949) та А.М. Ягломом(1948, 1949, 1952, 1960) було запропоновано два різних підходи до розв'язання задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів та послідовностей, які мають раціональну спектральну щільність. В цих роботах теорія А.М. Колмогорова дещо спрощується, конкретизується і набуває фізичної інтерпретації. Н.Вінер за додатковим припущенням відносно канонічної факторизації спектральної щільності процесу з абсолютно неперервним спектром шукає імпульсну перехідну функцію $c(s)$ фільтра як розв'язок деякого інтегрального рівняння (типу Вінера–Хопфа). Цей фільтр перетворює процес $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$, що спостерігається до деякого моменту t, в оптимальну оцінку величини $\xi(t+q)$:

$$\hat{\xi}(t+q) = \int_{-\infty}^{t} c(t-s)\zeta(s) ds, q > 0.$$

А.М. Яглом пропонує спосіб, за яким оцінка невідомої випадкової величини шукається у вигляді

$$\hat{\xi}(t) = \int_{\Lambda} \varphi(\lambda) dZ(\lambda),$$

де $\varphi(\lambda) \in L_2(f)$ – частотна (спектральна) характеристика оцінки, і дає процедуру пошуку цієї спектральної характеристики як граничного значення аналітичної в лівій площині функції, яка задовольняє деяким визначеним умовам. Слід відзначити роботи Г. Вольда (1938, 1948), Г. Крамера (1940, 1960, 1961) та Е. Робінсона (1963), які відносяться до теорії прогнозування випадкових процесів.

Аналогічні задачі оцінки невідомих значень виникли і для векторних випадкових процесів. Так, загальні результати теорії екстраполяції векторних стаціонарних процесів вперше були сформульовані в роботі В.М. Засухіна (1941). Подальший розвиток теорія таких процесів одержала в роботах Ю.А. Розанова (1957–1990), Н. Вінера та П. Масані (1949–1959), Г. Калліанпура та В. Мандрекара (1965–1983), А. Макагона та М. Салеха (1984–1993), А.Г. Міамі та Г. Салеха (1983–1988), Г. Ніємі (1979–1988). В роботах Х. Хелсона та Д. Лоуденслегера (1959, 1960), Х. Хелсона та Г. Сеге (1960) вказано на тісний зв'язок проблеми екстраполяції та проблеми апроксимації з теорії функцій. Слід також відзначити роботи Г. Салеха (1968–1979), Е.Б. Робертсона (1968), М. Розенблат (1958, 1959), П. Уітла (1953), М. Поурахмаді (1984–1988). А.М. Яглом (1960) розробив ефективний метод розв'язування задач прогнозування векторних стаціонарних процесів з раціональною спектральною матрицею. Роботи Д.С. Юла (1961), Е. Вонга і Е.Б. Томаса (1961) доповнюють роботу А.М. Яглома. Більш детальну бібліографію робіт з теорії стаціонарних процесів можна знайти в оглядових статтях П. Масані (1966), Т. Кайлата (1974), книгах А.М. Яглома (1981, 1987) та Ю.В. Розанова (1990).

Значний вклад у розвиток теорії випадкових полів вніс М. Й. Ядренко. Основні його результати опубліковані в монографії (1980).

Класична теорія інтерполяції, екстраполяції та фільтрації стохастичних процесів базується на припущенні, що спектральні щільності процесів відомі. На практиці, однак, повна інформація про спектральні щільності у більшості випадків неможлива. Щоб подолати це ускладнення, знаходять параметричні чи непараметричні оцінки спектральних щільностей або підбирають щільності, виходячи з інших міркувань. Потім застосовують класичну теорію оцінювання, вважаючи, що вибрані тим чи іншим способом спектральні щільності є істинними. Такий підхід, як показали К.С. Вастола та Г.В. Пур (1983) на конкретних прикладах, може призвести до значного росту величини похибки оцінки. Тому доцільно шукати оцінки, які є оптимальними одночасно для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей. Такі оцінки називають мінімаксними, оскільки вони мінімізують максимальне значення величини похибки.

За останні роки значно зріс інтерес до задач мінімасної інтерполяції, екстраполяції та фільтрації стаціонарних процесів. Л. Брейман (1973), С.Т. Чен та С.А. Кассам (1984), П.Д. Хубер (1964, 1965, 1972), С.А. Кассам та ін. (1980–1985) досліджували задачі фільтрації та екстраполяції для спеціальних класів спектральних щільностей. Г.В. Пур та ін. (1980–1983), К.С. Вастола та Г.В. Пур (1980–1984), С. Верду та Г.В. Пур (1983, 1984) вивчали проблеми мінімаксної екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для різних моделей стохастичних процесів.

Огляд результатів з мінімаксної обробки інформації зробили у свій час С.А. Кассам та Г.В. Пур (1985). Інші результати викладені в книзі О.М. Куркіна, Ю.Б. Коробочкіна, С.Д. Шаталова (1990).

Слід особливо відзначити статті У. Гренадера (1963), М.С. Йовітса та Д.Л. Джексона (1955), в яких вперше запропоновано мінімаксний підхід до задач екстраполяції та фільтрації стаціонарних процесів та їх лінійних перетворень. Так, існує цілий ряд задач, коли зручною математичною моделлю є саме лінійні перетворення випадкових процесів, а не одне значення процесу в деякій точці. Зокрема, як показав Ю. Франке (1985), у багатьох задачах мінімаксного оцінювання тільки одного невідомого значення процесу приводить до того, що найменш сприятливою щільністю буде щільність "білого шуму". І тільки дослідження функціоналів від випадкового процесу дає нові результати. Так, у статті У. Гренандера (1963) досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $\int_0^1 a(t)\xi(t)dt$ від стаціонарного стохастичного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу при $t < 0$. Проблема сформульована як гра двох гравців з нульовою сумою. Перший гравець вибирає стохастичний процес $\xi(t)$ з класу процесів з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією так, щоб величина середньоквадратичної похибки оцінки функціонала була найбільшою. Другий гравець шукає лінійну оцінку функціонала, яка мінімізує величину середньоквадратичної похибки. Показано, що така гра має положення рівноваги. Процес одностороннього рухомого середнього є найменш сприятливим у заданому класі стаціонарних процесів. Він дає найбільше значення величини середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки функціонала $\int_0^1 a(t)\xi(t)dt$. Найбільше значення величини похибки та найменш сприятливий процес визначаються найбільшим власним значенням та відповідною власною функцією оператора, що задається функцією $a(t)$. Аналогічна задача прогнозу функціоналів від стаціонарного процесу, про який відомо лише обмеження на його дисперсію та який спостерігається разом з білим шумом (або без шуму), була досліджена М.П. Моклячуком (1981).

У статтях Ю. Франка (1984, 1985) проблема мінімаксної екстраполяції досліджена за допомогою методів субдиференціального числення. Такий підхід дає можливість знаходити рівняння, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності для різноманітних класів щільностей.

У статті М. Танігуші (1981) вперше досліджена задача мінімаксної інтерполяції. Для моделі "ε–забруднення" стаціонарних послідовностей знайдений мінімаксно–робастний інтерполятор за пропуском спостережень в одній точці. Показано, що такий інтерполятор є класичним для спектральної щільності, яка визначає мінімаксний прогноз стаціонарної послідовності на один крок.

С.А. Кассам (1981) вказав на взаємозв'язок такої задачі та задачі перевірки гіпотез. Він дослідив задачу для "смугової" моделі стаціонарних послідовностей. Така модель включає модель "ε–забруднення" як частковий випадок. Дослідження проведені для некорельованих стаціонарних послідовностей.

Ю. Франк (1984) дослідив задачу мінімаксної інтерполяції з пропуском одного спостереження та екстраполяції на один крок для корельованих стаціонарних послідовностей.

Постановка задачі для оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень випадкової стаціонарної послідовності або процесу, що до того ж спостерігається з шумом викладена М.П. Моклячуком (1981–2011), де також наведені формули для обчислення величини середньоквадратичної похибки оптимальних оцінок лінійних функціоналів та знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики.

Отже, широкий клас задач оцінювання лінійних функціоналів від стаціонарних процесів, що спостерігаються з шумом, який в загальному випадку не є "білим" і може бути корельованим або некорельованим з процесом, до теперішнього часу розроблений недостатньо. Проте задачі розпізнавання, оцінювання та кодування сигналів, які виникають при обробці зображень, в радіолокаційних та гідролокаційних системах супроводження цілей, демодуляторах аналогових систем зв'язку та деяких інших потребують конструктивного розв'язання. Дана робота і ставить своєю наступною метою заповнити існуючий пробіл.

Розділ 1

ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ВЕКТОРНИХ СТАЦІОНАРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

1.1. Максимальне значення похибок оцінок функціоналів

У цьому підрозділі досліджується задача лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання функціоналів

$$A\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(j)^{\top} \boldsymbol{\xi}(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{T} a_k(j) \xi_k(j),$$

$$A_N\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{a}(j)^{\top} \boldsymbol{\xi}(j) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=1}^{T} a_k(j) \xi_k(j)$$

від невідомих значень векторної стохастичної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ з класу Ξ векторних стаціонарних послідовностей рангу m ($1 \leq m \leq T$), що задовольняють умови

$$E\boldsymbol{\xi}(j) = \{E\xi_k(j)\}_{k=1}^{T} = \mathbf{0}, \quad \|\boldsymbol{\xi}(j)\|^2 = \sum_{k=1}^{T} E\left|\xi_k(j)\right|^2 \leq P \tag{1.1}$$

за результатами спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ при $j < 0$. Знайдені максимальні значення величин середньоквадратичних похибок оптимальних лінійних оцінок функціоналів $A\boldsymbol{\xi}$, $A_N\boldsymbol{\xi}$ від стаціонарних послідовностей з класу Ξ. Показано, що максимальну похибку дають стаціонарні послідовності рухомого середнього.

1.1.1. Максимальне значення похибки оцінки функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$

Нехай $\Delta(\xi, \hat{A}_N) = E\left|A_N\boldsymbol{\xi} - \hat{A}_N\boldsymbol{\xi}\right|^2$ – середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$. Позначимо через Λ клас усіх лінійних оцінок функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$.

Теорема 1.1. *Функція $\Delta(\xi, \hat{A}_N)$ на множині $\Xi \times \Lambda$ має сідлову точку.*

При цьому

$$\min_{\hat{A}_N\in\Lambda}\max_{\xi\in\Xi}\Delta(\xi,\hat{A}_N)=\max_{\xi\in\Xi}\min_{\hat{A}_N\in\Lambda}\Delta(\xi,\hat{A}_N)=P\nu_N^2.$$

Найменш сприятливою в класі Ξ для оптимального оцінювання функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ стохастичною векторною послідовністю є послідовність векторного одностороннього рухомого середнього порядку $N+1$, що має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j)=\sum_{u=j-N}^{j}\Phi(j-u)\boldsymbol{\eta}(u).$$

Тут ν_N^2 – найбільше власне значення самоспряженого компактного оператора Q_N у просторі $C^{T(N+1)}$, що визначається матрицею, яка складена із матриць-блоків розмірності $T\times T$

$$Q_N=\{Q_N(p,q)\}_{p,q=0}^{N}=\sum_{u=0}^{\min(N-p,N-q)}\boldsymbol{a}(p+u)(\boldsymbol{a}(q+u))^*;$$

$\boldsymbol{\eta}(u)=\{\eta_k(u)\}_{k=1}^{m}$ *– векторна стаціонарна послідовність з ортогональними значеннями:*

$$E\boldsymbol{\eta}(i)\boldsymbol{\eta}(j)^*=\delta_{ij}E,$$

де E – одинична матриця, δ_{ij} – символ Кронекера; $\Phi(u),u=\overline{0,N}$ – матриці розмірності $T\times m$, елементи яких визначаються власним вектором, що відповідає ν_N^2, та умовою

$$\|\boldsymbol{\xi}(j)\|^2=P.$$

Доведення. Границя знизу. Позначимо через Ξ_R клас усіх регулярних векторних стаціонарних послідовностей, що задовольняють умову (1.1). Оскільки $\Xi_R\subset\Xi$, то

$$\max_{\xi\in\Xi}\min_{\hat{A}_N\in\Lambda}\Delta(\xi,\hat{A}_N)\geq\max_{\xi\in\Xi_R}\min_{\hat{A}_N\in\Xi_R}\Delta(\xi,\hat{A}_N).\tag{1.2}$$

Регулярна векторна стаціонарна послідовність допускає канонічне зображення векторного одностороннього рухомого середнього

$$\boldsymbol{\xi}(j)=\sum_{u=-\infty}^{j}\Phi(j-u)\boldsymbol{\eta}(u),\tag{1.3}$$

де $\boldsymbol{\eta}(u) = \{\eta_k(u)\}_{k=1}^{m}$ – стандартна векторна стаціонарна послідовність з ортогональними значеннями, $\Phi(u) = \{\Phi_{kl}(u)\}_{k=1}^{T}{}_{l=1}^{m}$ – коефіцієнти канонічного розкладу, m – ранг $\boldsymbol{\xi}(j) = \{\xi_k(j)\}_{k=1}^{T}$ $(1 \le m \le T)$. Послідовність $\boldsymbol{\xi}(j) \in \Xi_R$ визначена, якщо задані $\{\Phi(u) : u = 0,\ 1,\ \ldots\}$ такі, що

$$\|\boldsymbol{\xi}(j)\|^2 = \sum_{k=1}^{T} E\left|\xi_k(j)\right|^2 = \sum_{k=1}^{T} E\left|\sum_{u=-\infty}^{j}\sum_{l=1}^{m}\Phi_{kl}(j-u)\eta_l(u)\right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{T}\sum_{u,v=-\infty}^{j}\sum_{l,n=1}^{m}\Phi_{kl}(j-u)\overline{\Phi_{kn}(j-v)}E\eta_l(u)\overline{\eta_n(v)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{T}\sum_{u=-\infty}^{j}\sum_{l=1}^{m}\left|\Phi_{kl}(j-u)\right|^2 = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{T}\sum_{l=1}^{m}\left|\Phi_{kl}(u)\right|^2 =$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty}\|\Phi(u)\|^2 \le P. \qquad (1.4)$$

Величина середньоквадратичної похибки $E\left|A_N\boldsymbol{\xi} - \hat{A}_N\boldsymbol{\xi}\right|^2$ буде мінімальною, якщо оцінку $\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}$ вибрати у вигляді

$$\hat{A}_N\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{a}(j)^{\top}\hat{\boldsymbol{\xi}}(j) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{T}a_k(j)\hat{\xi}_k(j),$$

де $\hat{\boldsymbol{\xi}}(j)$ – оптимальна оцінка $\boldsymbol{\xi}(j)$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(p)$ при $p < 0$. Враховуючи канонічне зображення (1.3) регулярної послідовності та вигляд оптимальної оцінки її значень

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(j) = \sum_{u=-\infty}^{-1}\Phi(j-u)\boldsymbol{\eta}(u), \qquad (1.5)$$

можна записати

$$\min_{\hat{A}_N\in\Lambda} E\left|A_N\boldsymbol{\xi} - \hat{A}_N\boldsymbol{\xi}\right|^2 =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{N}\sum_{k,l=1}^{T}a_k(i)\overline{a_l(j)}\sum_{u=0}^{i}\sum_{v=0}^{j}\sum_{n,r=1}^{m}\Phi_{kn}(i-u)\overline{\Phi_{lr}(j-v)}E\eta_n(u)\overline{\eta_r(v)} =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{N}\sum_{k,l=1}^{T}a_k(i)\overline{a_l(j)}\sum_{u=0}^{\min(i,j)}\sum_{n=1}^{m}\Phi_{kn}(i-u)\overline{\Phi_{\ln}(j-u)} =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{N} \sum_{k,l=1}^{T} a_k(i)\overline{a_l(j)}R_{kl}(i,j) = \sum_{i,j=0}^{N} \boldsymbol{a}(i)^T R(i,j)\boldsymbol{a}(j)^*, \qquad (1.6)$$

де

$$R(i,j) = \{R_{kl}(i,j)\}_{k,l=1}^{T}, \; R_{kl}(i,j) = \sum_{u=0}^{\min(i,j)} \sum_{n=1}^{m} \Phi_{kn}(i-u)\overline{\Phi_{\ln}(j-u)}.$$

Зробивши заміну змінних $p = i - u, \; q = j - u$, запишемо (1.6) в іншій формі:

$$\min_{\hat{A}_N \in \Lambda} E \left| A_N \boldsymbol{\xi} - \hat{A}_N \boldsymbol{\xi} \right|^2 = \sum_{p,q=0}^{N} \sum_{k,l=1}^{T} \sum_{n=1}^{m} \Phi_{kn}(p)\overline{\Phi_{\ln}(q)} \, Q_{kl}^N(p,q), \qquad (1.7)$$

де $Q_N(p,q) = \left\{Q_{kl}^N(p,q)\right\}_{k,l=1}^{T}$,

$$Q_{kl}^N(p,q) = \sum_{u=0}^{\min(N-p,N-q)} a_k(p+u)\overline{a_l(q+u)}. \qquad (1.8)$$

Позначимо через Q_N оператор у просторі $C^{T(N+1)}$, що заданий матрицею, яка складається із матриць-блоків $\{Q_N(p,q)\}_{p,q=0}^{N}$. Оператор Q_N – самоспряжений (його матриця ермітова) неперервний оператор. Його можна подати у вигляді $Q_N = A_N \cdot A_N^*$, де оператор A_N визначається матрицею, яка складена із блоків вектор-стовпчиків $\{A_N(p,q)\}_{p,q=0}^{N}$:

$$A_N(p,q) = \begin{cases} \boldsymbol{a}(p+q), \; p+q \leq N, \\ \boldsymbol{0}, \; p+q > N. \end{cases}$$

Тому оператор Q_N має дійсні невід'ємні власні значення [1, 48]. З (1.7) видно, що $\Phi_{ij}(p) = 0$ при $p > N+1$. Позначимо

$$\tilde{\Phi}(p) = \left\{P^{-1/2}\Phi_{ij}(p)\right\}_{i=1}^{T}{}_{j=1}^{m}, \tilde{\Phi} = \left\{\tilde{\Phi}(p)\right\}_{p=0}^{N}.$$

Тоді умова (1.4) матиме вигляд

$$\left\|\tilde{\Phi}\right\|^2 = \sum_{p=0}^{N} \left\|\tilde{\Phi}(p)\right\|^2 \leq 1, \qquad (1.9)$$

де $\left\|\tilde{\Phi}\right\|$ – норма у просторі $C^{Tm(N+1)}$. Враховуючи (1.7) та (1.9), можемо записати, що

$$\min_{\hat{A}_N\in\Lambda} \Delta(\xi, \hat{A}_N) = P\left\langle Q_N\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\right\rangle,$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярний добуток у просторі $C^{Tm(N+1)}$, $Q_N\tilde{\Phi}$ – матриця, складена із матриць-блоків:

$$Q_N\tilde{\Phi} = \left\{Q_N(p,q)\cdot\tilde{\Phi}(q)\right\}_{p,q=0}^{N}.$$

Приймаючи до уваги (1.2), одержимо таку границю знизу для максимуму величини похибки [14, 15, 48]

$$\max_{\xi\in\Xi}\min_{\hat{A}_N\in\Lambda} \Delta(\xi, \hat{A}_N) \geq P \max_{\left\|\tilde{\Phi}\right\|\leq 1}\left\langle Q_N\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\right\rangle = P\nu_N^2, \tag{1.10}$$

де ν_N^2 – найбільше власне значення оператора Q_N.

Границя зверху. Для того, щоб оцінити мінімаксне значення величини похибки зверху, скористаємося нерівністю

$$\min_{\hat{A}_N\in\Lambda}\max_{\xi\in\Xi} \Delta(\xi, \hat{A}_N) \leq \min_{\hat{A}_N\in\Lambda_1}\max_{\xi\in\Xi} \Delta(\xi, \hat{A}_N), \tag{1.11}$$

де Λ_1 – клас усіх лінійних оцінок функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$, що мають вигляд

$$\hat{A}_N\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=-\infty}^{-1} \boldsymbol{c}(j)^\top\boldsymbol{\xi}(j). \tag{1.12}$$

Тут $\boldsymbol{c}(j) = \{c_k(j)\}_{k=1}^{T}$ – комплексні вектори такі, що

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} \|\boldsymbol{c}(j)\|^2 < \infty.$$

Скориставшись спектральним розкладом векторної стаціонарної стохастичної послідовності та її кореляційної матриці [3, 54], можемо записати

$$\Delta(\xi, \hat{A}_N) = E\left|A_N\boldsymbol{\xi} - \hat{A}_N\boldsymbol{\xi}\right|^2 = E\left|\sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{a}(j)^\top\boldsymbol{\xi}(j) - \sum_{j=-\infty}^{-1}\boldsymbol{c}(j)^\top\boldsymbol{\xi}(j)\right|^2 =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})\right)^\top F(d\lambda)\overline{(A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda}))},$$

де

$$A_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{a}(j)e^{ij\lambda},\ C(e^{i\lambda}) = \sum_{j=-\infty}^{-1} \boldsymbol{c}(j)e^{ij\lambda}.$$

Тут $F(d\lambda) = \{F_{kl}(d\lambda)\}_{k,l=1}^{T}$ – спектральна матрична міра векторної послідовності, елементи якої $F_{kl}(d\lambda)$ є комплексними мірами з обмеженою варіацією, що задовольняють наступні умови:

$$F_{kk}(d\lambda) \geq 0, \quad |F_{kl}(d\lambda)|^2 \leq F_{kk}(d\lambda)F_{ll}(d\lambda). \tag{1.13}$$

Обмеження (1.1) рівносильне умові

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} F(d\lambda) \leq P. \tag{1.14}$$

Отже,

$$\max_{\xi\in\Xi} \Delta(\xi, \hat{A}_N) = \max_{\xi\in\Xi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})\right)^\top F(d\lambda)\overline{(A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda}))} \leq$$

$$\leq \max_{\xi\in\Xi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\|A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})\right\|^2 \|F(d\lambda)\| \leq$$

$$\leq \max_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left\|A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})\right\|^2 \max_{\xi\in\Xi} \int_{-\pi}^{\pi} \|F(d\lambda)\|.$$

Враховуючи (1.13) та (1.14), можемо записати наступні обмеження

$$\int_{-\pi}^{\pi} \|F(d\lambda)\| = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k,l=1}^{T} |F_{kl}(d\lambda)|^2\right)^{1/2} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k,l=1}^{T} F_{kk}(d\lambda)F_{ll}(d\lambda)\right)^{1/2} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{T} F_{kk}(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} F(d\lambda) \leq P.$$

Таким чином,

$$\max_{\xi\in\Xi} \Delta(\xi, \hat{A}_N) \leq P \max_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left\|A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})\right\|^2.$$

Щоб обчислити

$$\max_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \left\| A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda}) \right\|^2$$

розглянемо клас усіх векторних степеневих рядів

$$\boldsymbol{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}(n) z^n,$$

що регулярні при $|z| < 1$ і мають фіксовані перші $N+1$ коефіцієнти

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \boldsymbol{d}(n),\ n = 0, 1, \ldots, N.$$

Позначимо через ρ_N^2 – найбільше власне значення матриці, що складається із матриць-блоків:

$$H = \left\{ H(p,q) \right\}_{p,q=0}^{N},$$

$$H(p,q) = \sum_{j=0}^{\min(p,q)} \boldsymbol{d}(p-j)(\boldsymbol{d}(q-j))^*,\ p,q = \overline{0,N}.$$

Тоді [12]

$$\min_{\{\boldsymbol{\alpha}(n):n\geq N+1\}} \max_{|z|=1} \left\| \boldsymbol{f}(z) \right\|^2 = \rho_N^2.$$

Враховуючи, що в нашому випадку

$$\boldsymbol{d}(p) = \boldsymbol{a}(N-p),\ p = \overline{0,N},$$

нам потрібно визначити найбільше власне значення матриці, що складається із матриць-блоків

$$G_N = \left\{ G_N(p,q) \right\}_{p,q=0}^{N},$$

$$G_N(p,q) = \sum_{u=0}^{\min(p,q)} \boldsymbol{a}(N-p+u)(\boldsymbol{a}(N-q+u))^*.$$

Позначимо це власне значення через ω_N^2. Тоді матимемо

$$\min_{\hat{A}_N\in\Lambda_1} \max_{\xi\in\Xi} \Delta(\xi, \hat{A}_N) \leq P\omega_N^2.$$

Враховуючи (1.11), одержимо

$$\min_{\hat{A}_N\in\Lambda} \max_{\xi\in\Xi} \Delta(\xi, \hat{A}_N) \leq P\omega_N^2. \tag{1.15}$$

Помітимо, що
$$G_N(N-p,N-q)=Q_N(p,q).$$
Отже, $\omega_N^2=\nu_N^2$. Порівнюючи (1.10) та (1.15), одержимо

$$\min_{\hat{A}_N\in\Lambda}\max_{\xi\in\Xi}\Delta(\xi,\hat{A}_N)\le\max_{\xi\in\Xi}\min_{\hat{A}_N\in\Lambda}\Delta(\xi,\hat{A}_N). \tag{1.16}$$

Оскільки протилежна нерівність виконується завжди, то в (1.16) можливий тільки знак рівності. Що й потрібно було довести.

Із доведення теореми безпосередньо випливає конструкція оптимальної мінімаксної оцінки.

Наслідок 1.1. *Оптимальна мінімаксна оцінка $\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ має вигляд*

$$\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}=\sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{a}(j)^\top\left(\sum_{u=j-N}^{-1}\Phi(j-u)\boldsymbol{\eta}(u)\right),$$

де $\boldsymbol{\eta}(u)=\{\eta_k(u)\}_{k=1}^m$ – стандартна векторна стаціонарна послідовність з ортогональними значеннями, $\Phi(u)=\{\Phi_{ij}(u)\}_{i=1}^{T}{}_{j=1}^{m}$ однозначно визначаються координатами власного вектора оператора Q_N, що відповідає максимальному власному значенню ν_N^2, та умовою $\|\boldsymbol{\xi}(j)\|^2=P$. Зокрема, у випадку стаціонарної послідовності мінімального рангу (m=1), вектор $\Phi=\{\Phi(u)\}_{u=0}^N$, що складається із блоків-векторів $\Phi(u)=\{\Phi_k(u)\}_{k=1}^T$, і є власним вектором оператора Q_N, що відповідає максимальному власному значенню ν_N^2.

Приклад 1.1. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціоналу
$$A_1\boldsymbol{\xi}=\xi_1(0)+\xi_2(0)+\xi_1(1)$$
від невідомих значень двовимірної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$, що задовольняє умову

$$\|\boldsymbol{\xi}(j)\|^2=|\xi_1(j)|^2+|\xi_2(j)|^2\le 1,$$

за спостереженнями послідовності при $j<0$.

Власні значення оператора Q_1, що визначається рівнянням (1.8), дорівнюють $\lambda_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$, тому $\nu_1^2=2+\sqrt{2}$. Власний вектор, що відповідає власному значенню $\nu_1^2=2+\sqrt{2}$ має вигляд $\Phi=\{\Phi(0),\Phi(1)\}$, де

$$\Phi(0)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2, & 1/2\end{pmatrix},\Phi(1)=\begin{pmatrix}1/2, & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, у випадку мінімального рангу m=1, найменш сприятлива стаціонарна послідовність $\boldsymbol{\xi}(j)$ має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j)=\Phi(0)\eta(j)+\Phi(1)\eta(j-1)=1/2\cdot\left(\ \sqrt{2}\eta(j)+\eta(j-1),\quad \eta(j)\ \right)^{\top}.$$

Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка $\hat{A}_1\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A_1\boldsymbol{\xi}$ має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{a}(0)^{\top}\Phi(1)\eta(-1)=\eta(-1)/2.$$

У випадку максимального рангу m=2, найменш сприятлива стаціонарна послідовність $\boldsymbol{\xi}(j)$ має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j)=\Psi(0)\boldsymbol{\eta}(j)+\Psi(1)\boldsymbol{\eta}(j-1),$$

де $\Psi(0),\ \Psi(1)$ – матриці розмірності 2×2, складені із блоків вектор-стовпчиків:

$$\Psi(0)=1/\sqrt{2}\cdot\{\Phi(0),\Phi(0)\}\,,\Psi(1)=1/\sqrt{2}\cdot\{\Phi(1),\Phi(1)\}\,.$$

Отже, у випадку максимального рангу m=2, найменш сприятлива стаціонарна послідовність має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ \sqrt{2}(\eta_1(j)+\eta_2(j))+\eta_1(j-1)+\eta_2(j-1),\quad \eta_1(j)+\eta_2(j)\ \right)^{\top}.$$

Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має такий вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{a}(0)^{\top}\Psi(1)\boldsymbol{\eta}(-1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\eta_1(-1)+\eta_2(-1)).$$

Похибка при виборі оптимальної оцінки $A_1\boldsymbol{\xi}$ в обох випадках не перевищує величини $2+\sqrt{2}$. $\diamondsuit$

Приклад 1.2. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціоналу

$$A_1\boldsymbol{\xi}=\xi_1(0)+\xi_2(0)+\xi_1(1)+\xi_2(1)$$

від невідомих значень двовимірної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$, що задовольняє умову

$$\|\boldsymbol{\xi}(j)\|^2=|\xi_1(j)|^2+|\xi_2(j)|^2\leq 1,$$

за спостереженнями послідовності при $j<0$.

Власні значення оператора Q_1 дорівнюють $3\pm\sqrt{5}$, тому $\nu_1^2=3+\sqrt{5}$.

Власний вектор, що відповідає власному значенню ν_1^2 має вигляд $\Phi = \{\Phi(0), \Phi(1)\}$, де

$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/20}, \Phi_1(1) = \Phi_2(1) = \sqrt{(5-\sqrt{5})/20}.$$

Отже, у випадку мінімального рангу m=1, найменш сприятлива стаціонарна послідовність має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \Phi(0)\eta(j) + \Phi(1)\eta(j-1) =$$

$$= \sqrt{(5+\sqrt{5})/20} \begin{pmatrix} \eta(j), & \eta(j) \end{pmatrix}^\top + \sqrt{(5-\sqrt{5})/20} \begin{pmatrix} \eta(j-1), & \eta(j-1) \end{pmatrix}^\top.$$

Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{a}(0)^\top \Phi(1)\eta(-1) = \sqrt{(5-\sqrt{5})/5}\eta(-1).$$

У випадку максимального рангу $m = 2$, найменш сприятлива стаціонарна послідовність має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \Psi(0)\boldsymbol{\eta}(j) + \Psi(1)\boldsymbol{\eta}(j-1) =$$

$$= \sqrt{(5+\sqrt{5})/40} \cdot I \cdot \boldsymbol{\eta}(j) + \sqrt{(5-\sqrt{5})/40} \cdot I \cdot \boldsymbol{\eta}(j-1),$$

де I – квадратна матриця, елементами якої є одиниці. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{a}(0)^\top \Psi(1)\boldsymbol{\eta}(-1) = \sqrt{(5-\sqrt{5})/10}\left(\eta_1(-1) + \eta_2(-1)\right).$$

Похибка при виборі оптимальної оцінки $\hat{A}_1\boldsymbol{\xi}$ в обох випадках не перевищує величини $3 + \sqrt{5}$. $\diamondsuit$

1.1.2. Максимальне значення похибки оцінки функціонала $A\boldsymbol{\xi}$

Теорема 1.2. *Якщо послідовність векторів $\boldsymbol{a}(j)$, $j = 0, 1, \ldots$ задовольняє умови*

$$\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=0}^{\infty} |a_k(j)| < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left\|\boldsymbol{a}(j)\right\|^2 < \infty, \tag{1.17}$$

то функція $\Delta(\xi, \hat{A})$ *на множині* $\Xi \times \Lambda$ *має сідлову точку. При цьому*

$$\min_{\hat{A}\in\Lambda} \max_{\xi\in\Xi} \Delta(\xi, \hat{A}) = \max_{\xi\in\Xi} \min_{\hat{A}\in\Lambda} \Delta(\xi, \hat{A}) = P\nu^2.$$

Найменш сприятливою для оптимального оцінювання функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ *векторною стохастичною послідовністю є послідовність одностороннього рухомого середнього, що має вигляд*

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sum_{u=-\infty}^{j} \Phi(j-u)\boldsymbol{\eta}(u).$$

Тут ν^2 *– найбільше власне значення, а* $\Phi = \{\Phi(u)\}_{u=0}^{\infty}$ *– власний вектор, що відповідає* ν^2 *у випадку послідовності мінімального рангу (m=1), самоспряженого компактного оператора в просторі* ℓ_2*, що визначається матрицею, яка складена із матриць-блоків*

$$Q = \{Q(p,q)\}_{p,q=0}^{\infty}, \quad Q(p,q) = \sum_{u=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(p+u)(\boldsymbol{a}(q+u))^*,$$

$\boldsymbol{\eta}(u) = \{\eta_k(u)\}_{k=1}^{m}$ *– векторна стаціонарна послідовність з ортогональними значеннями. У випадку рангу m>1 набір матриць* $\Phi = \{\Phi(u)\}_{u=0}^{\infty}$ *однозначно визначається власним вектором оператора Q, що відповідає найбільшому власному значенню, та умовою* $\|\boldsymbol{\xi}(j)\|^2 = P$*.*

Доведення. Границя знизу. Нехай $\xi \in \Xi_R$. Тоді справджується нерівність

$$\max_{\xi\in\Xi} \min_{\hat{A}\in\Lambda} \Delta(\xi, \hat{A}) \geq \max_{\xi\in\Xi_R} \min_{\hat{A}\in\Lambda} \Delta(\xi, \hat{A}). \tag{1.18}$$

Скориставшись канонічним зображенням регулярної послідовності (1.3) та виглядом (1.5) оптимальної оцінки, одержимо

$$\min_{\hat{A}\in\Lambda} \Delta(\xi, \hat{A}) = \min_{\hat{A}\in\Lambda} E\left|A\boldsymbol{\xi} - \hat{A}\boldsymbol{\xi}\right|^2 = E\left|\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(j)^\top \sum_{u=0}^{j} \Phi(j-u)\boldsymbol{\eta}(u)\right|^2 =$$

$$= \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{T} \sum_{n=1}^{m} \Phi_{kn}(p)\overline{\Phi_{\ln}(q)}Q_{kl}(p,q), \tag{1.19}$$

де

$$Q(p,q)=\{Q_{kl}(p,q)\}_{k,l=1}^{T}, \quad Q(p,q)=\sum_{u=0}^{\infty}\boldsymbol{a}(p+u)(\boldsymbol{a}(q+u))^{*}. \qquad (1.20)$$

Позначимо через Q оператор у гільбертовому просторі ℓ_2, що заданий матрицею, складеною із матриць-блоків: $Q=\{Q(p,q)\}_{p,q=0}^{\infty}$. Оскільки виконується друга умова (1.17) і

$$\sum_{p,q=0}^{\infty}\|Q(p,q)\|^2=\sum_{p,q=0}^{\infty}\sum_{k,l=1}^{T}|Q_{kl}(p,q)|^2=$$

$$=\sum_{p,q=0}^{\infty}\sum_{k,l=1}^{T}\left|\sum_{u=0}^{\infty}a_k(p+u)\overline{a_l(q+u)}\right|^2\le$$

$$\le\sum_{p,q=0}^{\infty}\sum_{k,l=1}^{T}\left(\sum_{u=0}^{\infty}|a_k(p+u)|^2\cdot\sum_{u=0}^{\infty}|a_l(q+u)|^2\right)=$$

$$=\left(\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{T}\sum_{u=0}^{\infty}|a_k(p+u)|^2\right)^2=\left(\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}\|\boldsymbol{a}(p+u)\|^2\right)^2=$$

$$=\left(\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)\|\boldsymbol{a}(p)\|^2\right)^2,$$

то маємо

$$\|Q\|\le N(Q)\le\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)\|\boldsymbol{a}(p)\|^2<\infty,$$

де N(Q) – норма Гільберта-Шмідта оператора Q. Оператор Q – самоспряжений (матриця ермітова) оператор Гільберта-Шмідта. Отже, оператор Q – самоспряжений неперервний оператор [1, 48]. Більш того, оператор Q можна подати у вигляді $Q=A\cdot A^{*}$, де оператор A визначається матрицею, складеною із блоків вектор-стовпчиків:

$$A=\{A(p,q)\}_{p,q=0}^{\infty}=\{\boldsymbol{a}(p+q)\}_{p,q=0}^{\infty}.$$

Тому оператор Q має дійсні невід'ємні власні числа. Відзначимо, що оператор A – це оператор Гільберта-Шмідта і його норма Гільберта-

Шмідта дорівнює

$$N(A) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} (p+1) \left\| \boldsymbol{a}(p) \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Оскільки

$$\tilde{\Phi}(p) = \left\{ P^{-1/2} \Phi_{ij}(p) \right\}_{i=1}^{T} {}_{j=1}^{m},$$

то (1.17) можна записати так

$$\min_{\hat{A} \in \Lambda} \Delta(\xi, \hat{A}) = P \left\langle Q\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi} \right\rangle.$$

Враховуючи обмеження (1.4), одержимо

$$\max_{\xi \in \Xi_R} \min_{\hat{A} \in \Lambda} \Delta(\xi, \hat{A}) = P \max_{\|\tilde{\Phi}\|=1} \left\langle Q\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi} \right\rangle = P\nu^2,$$

де ν^2 – найбільше власне значення оператора Q, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток у просторі ℓ_2. Скориставшись (1.18), оцінимо максимінне значення величини похибки. Одержимо

$$\max_{\xi \in \Xi} \min_{\hat{A} \in \Lambda} \Delta(\xi, \hat{A}) \geq P\nu^2. \tag{1.21}$$

Границя зверху. Розглянемо послідовність операторів Q_N, що задані матрицями (1.8), і оператор Q, який заданий матрицями (1.20). Оскільки виконана друга умова (1.17), то

$$N(Q - Q_N) = \sum_{p=N+1}^{\infty} (p+1) \left\| \boldsymbol{a}(p) \right\|^2 \to 0,$$

при $N \to \infty$. Враховуючи, що

$$\|Q - Q_N\| \leq N(Q - Q_N),$$

одержимо

$$\lim_{N \to \infty} \|Q - Q_N\| = 0.$$

Отже, послідовність операторів Q_N збігається рівномірно до оператора Q. Тому [14, 15]

$$\lim_{N \to \infty} \nu_N^2 = \nu^2,$$

де ν_N^2 – найбільше власне значення оператора Q_N, а ν^2 – найбільше власне значення оператора Q. Скориставшись теоремою 1.1, можемо записати

$$\min_{\hat{A}\in\Lambda}\max_{\xi\in\Xi}\Delta(\xi,\hat{A}) = \lim_{N\to\infty}\min_{\hat{A}_N\in\Lambda}\max_{\xi\in\Xi}\Delta(\xi,\hat{A}_N) = \lim_{N\to\infty}P\nu_N^2 = P\nu^2. \quad (1.22)$$

Порівнюючи (1.22) та (1.21), одержимо

$$\min_{\hat{A}\in\Lambda}\max_{\xi\in\Xi}\Delta(\xi,\hat{A}) = P\nu^2 \le \max_{\xi\in\Xi}\min_{\hat{A}\in\Lambda}\Delta(\xi,\hat{A}),$$

де можливий лише знак рівності. Отже, теорема доведена.

Наслідок 1.2. *Оптимальна мінімаксна лінійна оцінка $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ має вигляд*

$$\hat{A}\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{a}(j)^{\top}\left[\sum_{u=-\infty}^{-1}\Phi(j-u)\boldsymbol{\eta}(u)\right],$$

де $\boldsymbol{\eta}(u) = \{\eta_k(u)\}_{k=1}^{m}$ – стандартна векторна стаціонарна послідовність з ортогональними значеннями, $\Phi(u) = \{\Phi_{ij}(u)\}_{i=1}^{T}{}_{j=1}^{m}, u \ge 0$ однозначно визначається власним вектором оператора Q, що відповідає найбільшому власному значенню ν^2, та умовою $\|\boldsymbol{\xi}(j)\|^2 = P$. Зокрема, у випадку мінімального рангу ($m = 1$) вектор Φ, що складається із блоків-векторів: $\Phi = \{\Phi(u)\}_{u=0}^{\infty}$, і буде власним вектором, що відповідає найбільшому власному значенню.

Приклад 1.3. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціоналу

$$A\boldsymbol{\xi} = \sum_{k=1}^{T}\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda j}\xi_k(j),$$

де $\lambda > 0$, від невідомих значень двовимірної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$, що задовольняє умову

$$\|\boldsymbol{\xi}(j)\|^2 = |\xi_1(j)|^2 + |\xi_2(j)|^2 \le 1,$$

за спостереженнями послідовності при $j < 0$. Умови (1.17) виконуються. Елементи блоків-матриць оператора Q, що визначається рівнянням (1.20), дорівнюють

$$Q_{kl}(p,q) = \sum_{u=0}^{\infty}a_k(p+u)\overline{a_l(q+u)} = e^{-\lambda(p+q)}(1-e^{-2\lambda})^{-1}.$$

Власні значення оператора Q визначаються із системи рівнянь

$$\mu\Phi_k(p) = \sum_{l=1}^{T}\sum_{s=0}^{\infty} e^{-\lambda(p+s)}(1-e^{-2\lambda})^{-1}\Phi_l(s),\ k=\overline{1,T},\ p=0,\ 1,\ldots.$$

Звідси одержимо, що $\Phi_k(p)$ має вигляд

$$\Phi_k(p) = Ce^{-\lambda p},\ k=\overline{1,T}.$$

Константу C знайдемо з умови нормування. Отже, у випадку мінімального рангу маємо

$$C=(1-e^{-2\lambda})^{1/2}T^{-1/2},\quad \Phi_k(p)=T^{-1/2}(1-e^{-2\lambda})^{1/2}e^{-\lambda p},\ k=\overline{1,T}.$$

Підставивши ці вирази в систему рівнянь для власних значень, знайдемо

$$\mu = T(1-e^{-2\lambda})^{-2}.$$

Найменш сприятлива в класі Ξ векторна стаціонарна послідовність $\boldsymbol{\xi}(j)$ – це векторна послідовність одностороннього рухомого середнього, що має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j) = T^{-1/2}(1-e^{-2\lambda})^{1/2}e^{-\lambda j}\sum_{u=-\infty}^{j} e^{\lambda u}\eta(u)I,$$

де I – вектор, що складається з одиниць, $\eta(u)$ – стаціонарна послідовність з ортогональними значеннями. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ дорівнює

$$\hat{A}\boldsymbol{\xi} = T^{1/2}(1-e^{-2\lambda})^{1/2}\sum_{j=0}^{\infty}e^{-2\lambda j}\left[\sum_{u=-\infty}^{-1}e^{\lambda u}\eta(u)\right].$$

У випадку максимального рангу m=T аналогічно отримаємо

$$\boldsymbol{\xi}(j) = T^{-1}(1-e^{-2\lambda})^{1/2}e^{-\lambda j}\sum_{u=-\infty}^{j} e^{\lambda u}\, I\,\boldsymbol{\eta}(u),$$

$$\hat{A}\boldsymbol{\xi} = (1-e^{-2\lambda})^{1/2}\sum_{j=0}^{\infty}e^{-2\lambda j}\left[\sum_{k=1}^{T}\sum_{u=-\infty}^{-1}e^{\lambda u}\eta_k(u)\right],$$

де I – матриця, елементами якої є одиниці, $\boldsymbol{\eta}(u)=\{\eta_k(u)\}_{k=1}^{T}$ – векторна стаціонарна послідовність з ортогональними значеннями. Похибка при виборі оцінки у всіх випадках не перевищує величини

$$T(1-e^{-2\lambda})^{-2}.$$

Таке значення величини похибки має найменш сприятлива векторна стаціонарна послідовність. $\diamondsuit$

1.2. Екстраполяція функціоналів від стаціонарних послідовностей

У цьому підрозділі розв'язана задача оптимального лінійного оцінювання функціоналів

$$A\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(j)^{\top}\boldsymbol{\xi}(j), \quad A_N\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{a}(j)^{\top}\boldsymbol{\xi}(j)$$

від невідомих значень $\boldsymbol{\xi}(j), j = 0, 1, \ldots, \infty$ стаціонарної векторної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j) = \{\xi_k(j)\}_{k=1}^{T}$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ при $j < 0$. За умови, що відома матриця спектральних щільностей $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$ послідовності, встановлені формули для обчислення величин середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів. Знайдені найменш сприятливі щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальних оцінок функціоналів в тому випадку, коли матриця спектральних щільностей послідовності невідома.

1.2.1. Класичний метод лінійної екстраполяції

Припустимо, що коефіцієнти $\boldsymbol{a}(j)$, які визначають функціонал $A\boldsymbol{\xi}$ задовольняють умови

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{T} |a_k(j)| < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left\|\boldsymbol{a}(j)\right\|^2 < \infty. \tag{1.23}$$

Тоді функціонал $A\boldsymbol{\xi}$ має скінчений другий момент. Нехай послідовність $\boldsymbol{\xi}(j)$ допускає канонічний розклад рухомого середнього

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sum_{u=-\infty}^{j} d(j-u)\boldsymbol{\varepsilon}(u). \tag{1.24}$$

Тут $d(k)=\{d_{ij}(k)\}_{i=\overline{1,T}}^{j=\overline{1,m}}$ – послідовність матриць розмірності $T\times m$ (m – ранг послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$), $\boldsymbol{\varepsilon}(u)=\{\varepsilon_k(u)\}_{k=1}^m$ – векторна стаціонарна послідовність білого шуму:

$$E\boldsymbol{\varepsilon}(i)\boldsymbol{\varepsilon}(j)^*=\delta_{ij}E_m,$$

де E_m – одинична матриця розмірності m, δ_{ij} – символ Кронекера. Тоді матриця спектральних щільностей $F(\lambda)=\{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$ стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ допускає канонічну факторизацію

$$F(\lambda)=\varphi(\lambda)\varphi^*(\lambda),\quad \varphi(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}d(k)e^{-ik\lambda}. \tag{1.25}$$

Позначимо через $L_2(F)$ гільбертів простір векторних комплекснозначних функцій $\boldsymbol{a}(\lambda)=\{a_k(\lambda)\}_{k=1}^T$ таких, що

$$\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{a}(\lambda)^\top F(\lambda)\overline{\boldsymbol{a}(\lambda)}d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k,l=1}^{T}a_k(\lambda)\overline{a_l(\lambda)}\,f_{kl}(\lambda)\,d\lambda<\infty.$$

Позначимо через $L_2^-(F)$ підпростір, породжений у просторі $L_2(F)$ функціями вигляду

$$e^{in\lambda}\delta_k,\delta_k=\{\delta_{kl}\}_{l=1}^T,k=\overline{1,T},n<0.$$

Кожна лінійна оцінка $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ при $j<0$ має вигляд

$$\hat{A}\boldsymbol{\xi}=\int_{-\pi}^{\pi}h(e^{i\lambda})^\top Z^\xi(d\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{T}h_k(e^{i\lambda})Z_k^\xi(d\lambda),$$

де $Z^\xi(\Delta)=\left\{Z_k^\xi(\Delta)\right\}_{k=1}^T$ – ортогональна випадкова міра послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$, функція $h(e^{i\lambda})=\left\{h_k(e^{i\lambda})\right\}_{k=1}^T$ – спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$, що належить підпростору $L_2^-(F)$. Середньоквадратична похибка лінійної оцінки $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ від векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ за даними спостережень послідовності при $j<0$ обчислюється за формулою

$$\Delta=\Delta(h,F)=M\left|A\boldsymbol{\xi}-\hat{A}\boldsymbol{\xi}\right|^2=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda}))^{\top} F(\lambda) \overline{(A(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda}))} d\lambda,$$

де

$$A(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(j) e^{ij\lambda}.$$

Якщо векторна стаціонарна послідовність $\boldsymbol{\xi}(j)$ допускає канонічний розклад рухомого середнього (1.24), то оптимальна оцінка функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ визначається спектральною характеристикою $h(F) \in L_2^-(F)$ такою, що

$$\Delta(h(F), F) = \min_{h \in L_2^-(F)} \Delta(h, F) = \|Ad\|^2, \tag{1.26}$$

де

$$\|Ad\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|(Ad)_k\|^2, \quad (Ad)_k = \sum_{l=0}^{\infty} d(l)^{\top} \boldsymbol{a}(l+k).$$

Зауважимо, що $\|Ad\|^2 < \infty$ за виконання умов (1.23). Спектральна характеристика $h(F)$ оптимальної оцінки обчислюється за формулою

$$h(F) = A(e^{i\lambda}) - \psi(\lambda)^{\top} r(e^{i\lambda}), \quad r(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda}, \tag{1.27}$$

де $\psi(\lambda) = \{\psi_{ij}(\lambda)\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,T}}$ – матрична функція, що задовольняє рівняння

$$\psi(\lambda) \varphi(\lambda) = E_m.$$

Для функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ середньоквадратична похибка та спектральна характеристика оптимальної оцінки обчислюється за формулами:

$$\Delta_N(h(F), F) = \|A_N d\|^2, \tag{1.28}$$

$$h_N(F) = A_N(e^{i\lambda}) - \psi(\lambda)^{\top} r_N(e^{i\lambda}), \quad r_N(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{N} (A_N d)_k e^{ik\lambda}, \tag{1.29}$$

де

$$A_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{a}(j) e^{ij\lambda},$$

$$\|A_N d\|^2 = \sum_{k=0}^{N} \|(A_N d)_k\|^2, \quad (A_N d)_k = \sum_{l=0}^{N-k} d(l)^{\top} \boldsymbol{a}(l+k), k = \overline{0, N}.$$

Як наслідок, з формули (1.28) можна знайти таку формулу для обчислення середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки $\hat{\xi}_k(j)$ невідомого значення $\xi_k(j)$, $k = \overline{1,T}$, $j = \overline{0,N}$:

$$E\left|\xi_k(j) - \hat{\xi}_k(j)\right|^2 = \sum_{l=0}^{j} \|d_k(l)\|^2\,, \tag{1.30}$$

де $d_k(l)$ – k-й вектор-рядок матриці $d(l)$, що визначається з рівнянь факторизації (1.25) щільності $F(\lambda)$.

Отже справджується така теорема.

Теорема 1.3. *Якщо виконуються умови* (1.23) *і щільність* $F(\lambda)$ *допускає канонічну факторизацію* (1.25), *то середньоквадратична похибка оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$ *за даними спостережень послідовності* $\boldsymbol{\xi}(j)$ *при* $j<0$ *обчислюється за формулою* (1.26) *(за формулою* (1.28), *коли оцінюється функціонал* $A_N\boldsymbol{\xi}$*). Спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки обчислюється за формулою* (1.27) ((1.29) *для функціонала* $A_N\boldsymbol{\xi}$).

Приклад 1.4. Розглянемо двовимірну випадкову послідовність $\boldsymbol{\zeta}(j)$, де $\zeta_1(j) = \xi(j)$ – стаціонарна випадкова послідовність із спектральною щільністю $f(\lambda)$, а $\zeta_2(j) = \xi(j) + \eta(j)$, де $\eta(j)$ – некорельована із $\xi(j)$ стаціонарна послідовність із спектральною щільністю $g(\lambda)$. Маємо матрицю спектральних щільностей:

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f(\lambda) \\ f(\lambda) & f(\lambda)+g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Необхідно оцінити випадкову величину

$$A_1\boldsymbol{\zeta} = (\alpha\,,\,\beta)\begin{pmatrix} \zeta_1(0) \\ \zeta_2(0) \end{pmatrix} + (\gamma\,,\,\delta)\begin{pmatrix} \zeta_1(1) \\ \zeta_2(1) \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha\,\zeta_1(0) + \beta\,\zeta_2(0) + \gamma\,\zeta_1(1) + \delta\,\zeta_1(1)$$

за даними спостережень $\boldsymbol{\zeta}(j)$ при $j<0$. Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – послідовності Орнштейна–Угленбека із щільностями

$$f(\lambda) = \frac{P_1}{2\pi\ |1-b_1e^{i\lambda}|^2}, g(\lambda) = \frac{P_2}{2\pi\ |1-b_2e^{i\lambda}|^2}, P_1\,,\,P_2\,,\,b_1,b_2 \in R.$$

Тоді

$$F(\lambda) = \varphi(\lambda)\varphi^*(\lambda),$$

де

$$\varphi(\lambda)=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{P_1}{2\pi}} & 0\\ \sqrt{\frac{P_1}{2\pi}} & \sqrt{\frac{P_2}{2\pi}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\sqrt{\frac{P_1}{2\pi}} & 0\\ b_1\sqrt{\frac{P_1}{2\pi}} & b_2\sqrt{\frac{P_2}{2\pi}}\end{pmatrix}\cdot e^{-i\lambda}+\dots$$

$$\varphi^{-1}(\lambda)=\begin{pmatrix}(1-b_1e^{-i\lambda})\sqrt{\frac{2\pi}{P_1}} & 0\\ -(1-b_2e^{-i\lambda})\sqrt{\frac{2\pi}{P_2}} & (1-b_2e^{-i\lambda})\sqrt{\frac{2\pi}{P_2}}\end{pmatrix}.$$

Спектральна характеристика оптимальної оцінки буде такою:

$$h(\lambda)=\left(\ [(\alpha+\beta)b_1+(\gamma+\delta)b_1^2+\beta b_2+\delta b_2^2]e^{-i\lambda},\quad [\beta b_2+\delta b_2^2]e^{-i\lambda}\ \right)$$

Отже оптимальна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\zeta}=[(\alpha+\beta)b_1+(\gamma+\delta)b_1^2+\beta b_2+\delta b_2^2]\zeta_1(-1)+[\beta b_2+\delta b_2^2]\zeta_2(-1).$$

Середньоквадратична похибка оптимальної оцінки дорівнює

$$\Delta_1=\frac{P_1}{2\pi}[(\alpha+\beta+(\gamma+\delta)b_1)^2+(\gamma+\delta)^2]+\frac{P_2}{2\pi}[(\beta+\delta b_2)^2+\delta^2]. \qquad \diamondsuit$$

1.2.2. Мінімаксний метод лінійної екстраполяції

Формулами (1.26) – (1.30) можна користуватись лише тоді, коли відома матриця спектральних щільностей $F(\lambda)$ векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$. Якщо ж матриця спектральних щільностей невідома, проте визначена множина D можливих щільностей, то застосовують мінімаксний підхід до задач оцінювання функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей. Замість того, щоб шукати оцінку, яка була б оптимальною для деякої матриці спектральних щільностей, шукають оцінку, що мінімізує величину середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу.

Означення 1.1. *Спектральна щільність $F^0(\lambda)$ називається найменш сприятливою в класі D для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо виконуються співвідношення:*

$$\Delta(h(F^0),F^0)=\max_{F\in D}\Delta(h(F),F)=\max_{F\in D}\min_{h\in L_2^-(F)}\Delta(h,F).$$

Враховуючи співвідношення (1.26) – (1.29), можна переконатись, що вірні такі твердження.

Теорема 1.4. *Спектральна щільність $F^0(\lambda)\in D$, що допускає кано-*

нічну факторизацію (1.25)*, найменш сприятлива в класі D для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо вона допускає канонічну факторизацію*

$$F^0(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d^0(k)e^{-ik\lambda}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} d^0(k)e^{-ik\lambda}\right)^*,$$

де $d^0 = \left\{d^0(k) : k = 0, 1, \dots\right\}$ *– розв'язок задачі на умовний екстремум*

$$\|Ad\|^2 \to \max, \quad F(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d(k)e^{-ik\lambda}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} d(k)e^{-ik\lambda}\right)^* \in D. \quad (1.31)$$

Теорема 1.5. *Спектральна щільність $F^0(\lambda) \in D$, що допускає канонічну факторизацію* (1.25)*, найменш сприятлива в класі D для оптимальної екстраполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$, якщо вона допускає канонічну факторизацію*

$$F^0(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{N} d^0(k)e^{-ik\lambda}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{N} d^0(k)e^{-ik\lambda}\right)^*,$$

де $d^0 = \left\{d^0(k) : 0 \le k \le N\right\}$ *– розв'язок задачі на умовний екстремум:*

$$\|A_N d\|^2 \to \max, \quad F(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{N} d(k)e^{-ik\lambda}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{N} d(k)e^{-ik\lambda}\right)^* \in D. \quad (1.32)$$

Послідовність $\boldsymbol{\xi}(j)$ в такому разі допускає канонічний розклад рухомого середнього порядку N:

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sum_{u=j-N}^{j} d(j-u)\boldsymbol{\varepsilon}(u). \quad (1.33)$$

Означення 1.2. *Спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ називається мінімаксною (робастною), якщо виконуються умови:*

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{F \in D} L_2^-(F), \quad \min_{h \in H_D} \max_{F \in D} \Delta(h, F) = \max_{F \in D} \Delta(h^0, F).$$

Найменш сприятлива спектральна щільність $F^0(\lambda) \in D$ та мінімаксна (робастна) спектральна характеристика $h^0(\lambda) \in H_D$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h, F)$. Нерівності сідлової точки:

$$\Delta(h, F^0) \geq \Delta(h^0, F^0) \geq \Delta(h^0, F), \quad \forall F \in D, \, \forall h \in H_D$$

виконуються, коли $h^0 = h(F^0) \in H_D$, де F^0– розв'язок задачі на умовний екстремум:

$$\Delta(h(F^0), F^0) = \max_{F \in D} \Delta(h(F^0), F).$$

Якщо ми знайшли розв'язок F^0 цієї задачі, то мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулами (1.27), (1.29) за умови, що $h(F^0) \in H_D$.

Щільність $F^0(\lambda)$ є розв'язком такої задачі на умовний екстремум:

$$\Delta(F) = -\Delta(h(F^0), F) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r(e^{i\lambda}) \psi^0(\lambda) F(\lambda) (\psi^0(\lambda))^* (r(e^{i\lambda}))^* d\lambda \to \inf, F(\lambda) \in D, \quad (1.34)$$

де $r(e^{i\lambda})$ обчислюється за формулами (1.27), (1.29) при $F(\lambda) = F^0(\lambda)$.

Задача на умовний екстремум (1.34) еквівалентна такій задачі на безумовний екстремум [47]:

$$\Delta_D(F) = -\Delta(h(F^0), F) + \delta(F|D) \to \inf, \quad (1.35)$$

де $\delta(F|D)$ – індикаторна функція множини D. Розв'язок задачі (1.35) характеризується умовою $0 \in \partial \Delta_D(F^0)$, де $\partial \Delta_D(F^0)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(F)$ в точці F^0. Користуючись співвідношеннями (1.34), (1.35) можна знайти найменш сприятливі спектральні щільності для конкретних класів спектральних щільностей.

1.2.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах D_0

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\boldsymbol{\xi}$ та $A_N\boldsymbol{\xi}$ від векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ для множин спектральних щільностей, що характеризують обмеження на перший момент спектральних щільностей:

$$D_0^1 = \left\{ F(\lambda) | \, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} F(\lambda) d\lambda = p \right\},$$

$$D_0^2 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, \ k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_0^3 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle B, \ F(\lambda) \rangle \, d\lambda = p \right\},$$

$$D_0^4 = \left\{ F(\lambda) | \, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\lambda) d\lambda = P \right\},$$

де $p, p_k, k = \overline{1,T}$ – задані числа, $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^T$, $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^T$ – задані додатно визначені ермітові матриці. З умови $0 \in \partial \Delta_D(F^0)$ знайдемо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей $F^0(\lambda)$ для заданих множин відповідно:

$$\psi^0(\lambda)^\top r(e^{i\lambda})(r(e^{i\lambda}))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \alpha^2 E,$$
$$\psi^0(\lambda)^\top r(e^{i\lambda})(r(e^{i\lambda}))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \left\{ \alpha_k^2 \delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^T,$$
$$\psi^0(\lambda)^\top r(e^{i\lambda})(r(e^{i\lambda}))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \alpha^2 B$$
$$\psi^0(\lambda)^\top r(e^{i\lambda})(r(e^{i\lambda}))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^*,$$

де $\alpha^2, \ \alpha_k^2, \ k = \overline{1,T}, \ \boldsymbol{\alpha}$ – невизначені множники Лагранжа. Дані співвідношення можна переписати наступним чином

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right)^* = \alpha^2 \varphi^0(\lambda)^\top \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.36}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right)^* = \varphi^0(\lambda)^\top \left\{ \alpha_k^2 \delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.37}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right)^* = \alpha^2 \varphi^0(\lambda)^\top B \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.38}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right)^* = \varphi^0(\lambda)^\top \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* \overline{\varphi^0(\lambda)}. \tag{1.39}$$

Невідомі $\alpha^2, \ \alpha_k^2, \ \boldsymbol{\alpha}$ та $d = \{d(k) : k = 0, 1, \ldots\}$ обчислюємо, користуючись рівнянням канонічної факторизації (1.25) щільності $F^0(\lambda)$, умовою (1.31) та обмеженнями, що накладаються на щільності відповідних множин.

Для всіх розв'язків $d = \{d(n), n \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \cdot \boldsymbol{a}(l+k)^{\top} d(l) = \alpha^2 d(n), \tag{1.40}$$

що задовольняють умову

$$\|d\|^2 = \sum_{l=0}^{\infty}\|d(l)\|^2 = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{T}\sum_{n=1}^{m}|d_{kn}(l)|^2 = p, \tag{1.41}$$

виконується рівність (1.36).

Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ n \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \cdot \boldsymbol{a}(l+k)^{\top} d(l) = \left\{\alpha_k^2 \delta_{kl})\right\}_{k,l=1}^{T} d(n), \tag{1.42}$$

що задовольняють умову

$$\|d_k\|^2 = \sum_{l=0}^{\infty}\|d_k(l)\|^2 = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}|d_{kn}(l)|^2 = p_k,\ k = \overline{1,T}, \tag{1.43}$$

виконується рівність (1.37).

Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ n \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \cdot \boldsymbol{a}(l+k)^{\top} d(l) = \alpha^2 B^{\top} d(n), \tag{1.44}$$

що задовольняють умову

$$\left\langle B,\ \sum_{l=0}^{\infty} d(l)(d(l))^* \right\rangle = p, \tag{1.45}$$

виконується рівність (1.38).

Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ n \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \cdot \boldsymbol{a}(l+k)^{\top} d(l) = \overline{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\top} d(n), \tag{1.46}$$

що задовольняють умову

$$\sum_{l=0}^{\infty} d(l)(d(l))^* = P, \tag{1.47}$$

виконується рівність (1.39).

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.6. *Якщо існує послідовність матриць $d^0 = \left\{d^0(n),\ n \geq 0\right\}$, що задовольняє рівняння* (1.40) *та умову* (1.41), *то щільність*

$$F^0(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d^0(k)e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} d^0(k)e^{-ik\lambda}\right)^* \tag{1.48}$$

найменш сприятлива в класі D_0^1 для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць $d^0 = \left\{d^0(n),\ n \geq 0\right\}$, що задовольняє рівняння (1.42) *та умову* (1.43), *то щільність* (1.48) *найменш сприятлива в класі D_0^2 для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць $d^0 = \left\{d^0(n),\ n \geq 0\right\}$, що задовольняє рівняння* (1.44) *та умову* (1.45), *то щільність* (1.48) *найменш сприятлива в класі D_0^3 для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць $d^0 = \left\{d^0(n),\ n \geq 0\right\}$, що задовольняє рівняння* (1.46) *та умову* (1.47), *то щільність* (1.48) *найменш сприятлива в класі D_0^4 для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Стаціонарна послідовність $\boldsymbol{\xi}(j)$ допускає розклад рухомого середнього* (1.24). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.27).

Для функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ співвідношення (1.36) – (1.39) мають вигляд

$$r_N(e^{i\lambda})(r_N(e^{i\lambda}))^* = \alpha^2 \varphi^0(\lambda)^\top \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.49}$$

$$r_N(e^{i\lambda})(r_N(e^{i\lambda}))^* = \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_k^2 \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.50}$$

$$r_N(e^{i\lambda})(r_N(e^{i\lambda}))^* = \alpha^2 \varphi^0(\lambda)^\top B\, \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.51}$$

$$r_N(e^{i\lambda})(r_N(e^{i\lambda}))^* = \varphi^0(\lambda)^\top \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.52}$$

і виконується рівність

$$r_N(e^{i\lambda})(r_N(e^{i\lambda}))^* = \left(\sum_{k=0}^{N} (A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N} (A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N} (\tilde{A}_N d)_k e^{ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{N} (\tilde{A}_N d)_k e^{ik\lambda} \right)^*,$$

де

$$(\tilde{A}_N d)_k = \sum_{l=0}^{k} d(l)^\top \boldsymbol{a}(N-k+l),\ 0 \leq k \leq N.$$

Тому для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ 0 \leq n \leq N\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N-n} \sum_{l=0}^{N-k} \overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \cdot \boldsymbol{a}(l+k)^\top d(l) = \alpha^2 d(n), \tag{1.53}$$

таких, що

$$\|d\|^2 = \sum_{l=0}^{N} \|d(l)\|^2 = \sum_{l=0}^{N} \sum_{k=1}^{T} \sum_{n=1}^{m} |d_{kn}(l)|^2 = p, \tag{1.54}$$

виконується рівність (1.49).
Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ 0 \leq n \leq N\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\mathbb{N}-n} \sum_{l=0}^{N-k} \overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \cdot \boldsymbol{a}(l+k)^\top d(l) = \left\{\alpha_k^2 \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T} d(n), \tag{1.55}$$

таких, що

$$\|d_k\|^2 = \sum_{l=0}^{N} \|d_k(l)\|^2 = \sum_{l=0}^{N} \sum_{n=1}^{m} |d_{kn}(l)|^2 = p_k,\ k = \overline{1,T}, \tag{1.56}$$

виконується рівність (1.50).
Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ 0 \leq n \leq N\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N-n} \sum_{l=0}^{N-k} \overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \cdot \boldsymbol{a}(l+k)^\top d(l) = \alpha^2 B^\top d(n), \tag{1.57}$$

таких, що

$$\left\langle B,\ \sum_{l=0}^{N} d(l)(d(l))^* \right\rangle = p, \tag{1.58}$$

виконується рівність (1.51).

Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ 0 \le n \le N\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N-n} \sum_{l=0}^{N-k} \overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \cdot \boldsymbol{a}(l+k)^{\top} d(l) = \overline{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\top} d(n), \tag{1.59}$$

або системи рівнянь

$$\sum_{l=0}^{n} \boldsymbol{a}(N-n+l)^{\top} d(l) = \boldsymbol{\alpha}^{\top} d(n), \tag{1.60}$$

таких, що

$$\sum_{l=0}^{N} d(l)(d(l))^{*} = P, \tag{1.61}$$

виконується рівність (1.52).

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.7. *Якщо існує послідовність матриць $d^0 = \left\{d^0(k),\ 0 \le k \le N\right\}$, що задовольняє рівняння (1.53) та умову (1.54), то щільність*

$$F^0(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{N} d^0(k) e^{-ik\lambda}\right) \left(\sum_{k=0}^{N} d^0(k) e^{-ik\lambda}\right)^{*} \tag{1.62}$$

найменш сприятлива в класі D_0^1 для оптимальної екстраполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць $d^0 = \left\{d^0(k),\ 0 \le k \le N\right\}$, що задовольняє рівняння (1.55) та умову (1.56), то щільність (1.62) найменш сприятлива в класі D_0^2 для оптимальної екстраполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць d^0, що задовольняє рівняння (1.57) та умову (1.58), то щільність (1.62) найменш сприятлива в класі D_0^3 для оптимальної екстраполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць d^0, що задовольняє рівняння (1.59) або (1.60) та умову (1.61), то щільність (1.62) найменш сприятлива в класі D_0^4 для оптимальної екстраполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$. Стаціонарна послідовність $\boldsymbol{\xi}(j)$ допускає розклад (1.33) рухомого середнього порядку N. Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ обчислюється за формулою (1.29).

Наслідок 1.3. *Щільність (1.62), де $d^0 = \left\{d^0(k),\ 0 \le k \le N\right\}$ задовольняє умову (1.61), найменш сприятлива в класі D_0^4 для оптимального лінійного оцінювання випадкової величини $\boldsymbol{a}(N)\boldsymbol{\xi}(N)$.*

Приклад 1.5. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналу $A_1\boldsymbol{\xi}$, де $\boldsymbol{a}(0) = (1,\ 1)$, $\boldsymbol{a}(1) = (1,\ 0)$, від двовимірної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ за результатами спостережень при $j < 0$ на множині $D = D_0^1$, для якої p=1. Використовуючи систему рівнянь (1.53) та умову (1.54) знаходимо, що найменш сприятлива матриця спектральних щільностей $F^0(\lambda)$ для оцінювання функціонала $A_1\boldsymbol{\xi}$ має наступний вигляд

$$F^0(\lambda) = \frac{1}{4}\left(\begin{array}{cc} \left|\sqrt{2}+e^{-i\lambda}\right|^2 & \sqrt{2}+e^{-i\lambda} \\ \sqrt{2}+e^{i\lambda} & 1 \end{array}\right),$$

мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою

$$h^0(e^{i\lambda}) = h(F^0) = \left(\frac{e^{-i\lambda}}{\sqrt{2}+e^{-i\lambda}},\ 0\right),$$

і похибка при виборі оптимальної оцінки не перевищує величини

$$\alpha^2 = 2 + \sqrt{2}.$$

Нехай $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}(1) = (1,\ 1)$. Знаходимо, що найменш сприятлива матриця спектральних щільностей має вигляд

$$F^0(\lambda) = \varphi^0(\lambda)(\varphi^0(\lambda))^*,$$

$$\varphi^0(\lambda) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/20}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right) + \sqrt{(5-\sqrt{5})/20}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)e^{-i\lambda}$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\varphi^0(\lambda) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/40}\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right) + \sqrt{(5-\sqrt{5})/40}\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)e^{-i\lambda}$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Отже, найменш сприятлива стаціонарна послідовність має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/20}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)\varepsilon(j) + \sqrt{(5-\sqrt{5})/20}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)\varepsilon(j-1)$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/40}\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \varepsilon_1(j) \\ \varepsilon_2(j) \end{array}\right) +$$

$$+\sqrt{(5-\sqrt{5})/40}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1(j-1) \\ \varepsilon_2(j-1) \end{pmatrix}.$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = \sqrt{(5-\sqrt{5})/5}\varepsilon(-1)$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = \sqrt{(5-\sqrt{5})/10}(\varepsilon_1(-1) + \varepsilon_2(-1))$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Похибка при виборі оптимальної оцінки не перевищує $\alpha^2 = 3 + \sqrt{5}$. $\diamondsuit$

Приклад 1.6. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналу $A_1\boldsymbol{\xi}$, де $\boldsymbol{a}(0) = (1,\ 1)$, $\boldsymbol{a}(1) = (1,\ 0)$, від двовимірної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ за результатами спостережень при $j < 0$ на множині $D = D_0^2$, для якої $p_1 = p_2 = 1$. Використовуючи систему рівнянь (1.55) та умову (1.56) знаходимо, що найменш сприятлива матриця спектральних щільностей $F^0(\lambda)$ для оцінювання функціонала $A_1\boldsymbol{\xi}$ має наступний вигляд

$$F^0(\lambda) = \begin{pmatrix} \left|4/5 + 3/5e^{-i\lambda}\right|^2 & 4/5 + 3/5e^{-i\lambda} \\ 4/5 + 3/5e^{i\lambda} & 1 \end{pmatrix},$$

мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою

$$h^0(e^{i\lambda}) = h(F^0) = \left(\frac{3e^{-i\lambda}}{4 + 3e^{-i\lambda}},\ 0\right),$$

і похибка при виборі оптимальної оцінки не перевищує величини

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 32/5.$$

Нехай $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}(1) = (1,\ 1)$. Знаходимо, що найменш сприятлива матриця спектральних щільностей має вигляд

$$F^0(\lambda) = \varphi^0(\lambda)(\varphi^0(\lambda))^*,$$

$$\varphi^0(\lambda) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{(5-\sqrt{5})/10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-i\lambda}$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\varphi^0(\lambda) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/20}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{(5-\sqrt{5})/20}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda}$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Отже, найменш сприятлива стаціонарна послідовність має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\varepsilon(j) + \sqrt{(5-\sqrt{5})/10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\varepsilon(j-1)$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/20}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1(j) \\ \varepsilon_2(j) \end{pmatrix} +$$

$$+\sqrt{(5-\sqrt{5})/20}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1(j-1) \\ \varepsilon_2(j-1) \end{pmatrix}$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = 2\sqrt{(5-\sqrt{5})/10}\varepsilon(-1)$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = \sqrt{(5-\sqrt{5})/5}(\varepsilon_1(-1) + \varepsilon_2(-1))$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Похибка при виборі оптимальної оцінки не перевищує $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 2(3+\sqrt{5})$. ♢

Приклад 1.7. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналу $A_1\boldsymbol{\xi}$, де $\boldsymbol{a}(0) = (1,\ 1)$, $\boldsymbol{a}(1) = (1,\ 0)$, від двовимірної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ за результатами спостережень при $j < 0$ на множині $D = D_0^3$, для якої $b_{11} = 1$, $b_{22} = 2$, $b_{12} = b_{21} = 0$, $p = 1$. Використовуючи систему рівнянь (1.57) та умову (1.58) знаходимо, що найменш сприятлива матриця спектральних щільностей $F^0(\lambda)$ для оцінювання функціонала $A_1\boldsymbol{\xi}$ має наступний вигляд

$$F^0(\lambda) = \begin{pmatrix} \left|3+2e^{-i\lambda}\right|^2 & 3+2e^{-i\lambda} \\ 3+2e^{i\lambda} & 1 \end{pmatrix},$$

мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою

$$h^0(e^{i\lambda}) = h(F^0) = \left(\frac{2e^{-i\lambda}}{3+2e^{-i\lambda}},\ 0 \right),$$

і похибка при виборі оптимальної оцінки не перевищує величини $\alpha^2 = 3$.

Нехай $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}(1) = (1,\ 1)$, $b_{11} = b_{22} = 2$, $b_{12} = b_{21} = 1$. Найменш сприятлива матриця спектральних щільностей має вигляд:

$$F^0(\lambda) = \varphi^0(\lambda)(\varphi^0(\lambda))^*,$$

$$\varphi^0(\lambda) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/60} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{(5-\sqrt{5})/60} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda}$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\varphi^0(\lambda) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/120} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{(5-\sqrt{5})/120} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda}$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Отже, найменш сприятлива стаціонарна послідовність має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/60} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon(j) + \sqrt{(5-\sqrt{5})/60} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon(j-1)$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/120} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(j) \\ \varepsilon_2(j) \end{pmatrix} +$$

$$+\sqrt{(5-\sqrt{5})/120} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(j-1) \\ \varepsilon_2(j-1) \end{pmatrix}$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = \sqrt{(5-\sqrt{5})/15}\varepsilon(-1)$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = \sqrt{(5-\sqrt{5})/30}(\varepsilon_1(-1) + \varepsilon_2(-1))$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Похибка при виборі оптимальної оцінки не перевищує $\alpha^2 = (3+\sqrt{5})/3$. $\diamondsuit$

Приклад 1.8. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналу $A_1\boldsymbol{\xi}$, де $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}(1) = (1,\ 1)$, від двовимірної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ за результатами спостережень при $j < 0$ на множині $D = D_0^4$, для якої $p_{ij} = 1,\ i, j = \overline{1, T}$. Найменш сприятлива матриця спектральних щільностей має вигляд

$$F^0(\lambda) = \varphi^0(\lambda)(\varphi^0(\lambda))^*,$$

$$\varphi^0(\lambda) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{(5-\sqrt{5})/10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda}$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\varphi^0(\lambda) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/20}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{(5-\sqrt{5})/20}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda}$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Отже, найменш сприятлива стаціонарна послідовність має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\varepsilon(j) + \sqrt{(5-\sqrt{5})/10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\varepsilon(j-1)$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\boldsymbol{\xi}(j) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/20}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1(j) \\ \varepsilon_2(j) \end{pmatrix} +$$

$$+\sqrt{(5-\sqrt{5})/20}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1(j-1) \\ \varepsilon_2(j-1) \end{pmatrix}$$

Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = 2\sqrt{(5-\sqrt{5})/10}\varepsilon(-1)$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = \sqrt{(5-\sqrt{5})/5}(\varepsilon_1(-1) + \varepsilon_2(-1))$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Похибка при виборі оптимальної оцінки не перевищує

$$\sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i \overline{\alpha_j} p_{ij} = 2(3+\sqrt{5}).$$

$\diamondsuit$

1.2.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах D_M

Розглянемо задачу для множин спектральних щільностей, які задовольняють моментні обмеження:

$$D_M^1 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} F(\lambda) e^{-im\lambda} d\lambda = p(i),\, i = \overline{0,M} \right\},$$

$$D_M^2 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda) e^{-im\lambda} d\lambda = p_k(i),\ i = \overline{0,M},\ k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_M^3 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle B,\ F(\lambda) \rangle\, e^{-im\lambda} d\lambda = p(i),\, i = \overline{0,M} \right\},$$

$$D_M^4 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\lambda) e^{-im\lambda} d\lambda = P(i),\ i = \overline{0,M} \right\}.$$

З умови $0 \in \partial \Delta_D(F^0)$ знайдемо такі рівняння для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей із заданих множин відповідно:

$$\psi^0(\lambda)^\top r(e^{i\lambda})(r(e^{i\lambda}))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \left| \sum_{l=0}^{M} \alpha(l) e^{-il\lambda} \right|^2 \cdot E,$$

$$\psi^0(\lambda)^\top r(e^{i\lambda})(r(e^{i\lambda}))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \left\{ \left| \sum_{l=0}^{M} \alpha_k(l) e^{-il\lambda} \right|^2 \delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^{T},$$

$$\psi^0(\lambda)^\top r(e^{i\lambda})(r(e^{i\lambda}))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \left| \sum_{l=0}^{M} \alpha(l) e^{-il\lambda} \right|^2 \cdot B,$$

$$\psi^0(\lambda)^\top r(e^{i\lambda})(r(e^{i\lambda}))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = (\sum_{l=0}^{M} \boldsymbol{\alpha}(l) e^{-il\lambda})(\sum_{l=0}^{M} \boldsymbol{\alpha}(l) e^{-il\lambda})^*,$$

де $\alpha(l),\ \alpha_k(l),\ \boldsymbol{\alpha}(l),\ l=\overline{0,M},\ k=\overline{1,T}$ – невизначені множники Лагранжа. Дані співвідношення можна переписати наступним чином

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^{*}=$$

$$=\left|\sum_{l=0}^{M}\alpha(l)e^{-il\lambda}\right|^{2}\varphi^0(\lambda)^{\top}\overline{\varphi^0(\lambda)},\quad (1.63)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^{*}=$$

$$=\varphi^0(\lambda)^{\top}\left\{\left|\sum_{l=0}^{M}\alpha_k(l)e^{-il\lambda}\right|^{2}\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}\overline{\varphi^0(\lambda)},\quad (1.64)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^{*}=$$

$$=\left|\sum_{l=0}^{M}\alpha(l)e^{-il\lambda}\right|^{2}\varphi^0(\lambda)^{\top}B\overline{\varphi^0(\lambda)},\quad (1.65)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^{*}=$$

$$=\varphi^0(\lambda)^{\top}\Big(\sum_{l=0}^{M}\boldsymbol{\alpha}(l)e^{-il\lambda}\Big)\cdot\Big(\sum_{l=0}^{M}\boldsymbol{\alpha}(l)e^{-il\lambda}\Big)^{*}\overline{\varphi^0(\lambda)}.\quad (1.66)$$

Невідомі $\alpha(l),\ \alpha_k(l),\ \boldsymbol{\alpha}(l),\ l=\overline{0,M},\ k=\overline{1,T}$ та $d=\{d(k):k=0,1,\ldots\}$ знаходимо, використовуючи рівняння канонічної факторизації (1.25) щільності $F^0(\lambda)$, умову (1.31) та обмеження, що накладаються на щільності відповідних множин.

Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ n \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\boldsymbol{a}(n+k)}\boldsymbol{a}(l+k)^{\top}d(l) = \\ = \sum_{j=-\min(n,M)}^{M}\ \sum_{u=|j|}^{M}\alpha(u)\overline{\alpha(u+j)}d(n+j), \quad (1.67)$$

що задовольняють умови

$$\sum_{l=0}^{\infty}\langle d(l), d(l+i)\rangle = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{T}\sum_{n=1}^{m}d_{kn}(l)\overline{d_{kn}(l+i)} = p(i), i = \overline{0,M}, \quad (1.68)$$

виконується рівність (1.63).

Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ n \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\boldsymbol{a}(n+k)}\boldsymbol{a}(l+k)^{\top}d(l) = \\ = \sum_{j=-\min(n,M)}^{M}\left\{\sum_{u=|j|}^{M}\alpha_k(u)\overline{\alpha_k(u+j)}\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T} d(n+j), \quad (1.69)$$

що задовольняють умови

$$\sum_{l=0}^{\infty}\langle d_k(l),\ d_k(l+i)\rangle = \\ = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}d_{kn}(l)\overline{d_{kn}(l+i)} = p_k(i),\ i = \overline{0,M},\ k = \overline{1,T}, \quad (1.70)$$

виконується рівність (1.64).

Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ n \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\boldsymbol{a}(n+k)}\boldsymbol{a}(l+k)^{\top}d(l) = \\ = \sum_{j=-\min(n,M)}^{M}\ \sum_{u=|j|}^{M}\alpha(u)\overline{\alpha(u+j)}B^{\top}d(n+j), \quad (1.71)$$

що задовольняють умови

$$\left\langle B,\ \sum_{l=0}^{\infty} d(l)(d(l+i))^{*} \right\rangle = p(i),\ i=\overline{0,M}, \tag{1.72}$$

виконується рівність (1.65).

Для всіх розв'язків $d=\{d(n),\ n\geq 0\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\boldsymbol{a}(n+k)}\boldsymbol{a}(l+k)^{\top}d(l) =$$

$$= \sum_{j=-\min(n,M)}^{M}\ \sum_{u=|j|}^{M}\overline{\boldsymbol{\alpha}(u+j)}\boldsymbol{\alpha}(u)^{\top}d(n+j), \tag{1.73}$$

що задовольняють умови

$$\sum_{l=0}^{\infty} d(l)(d(l+i))^{*} = P(i),\ i=\overline{0,M}, \tag{1.74}$$

виконується рівність (1.66).

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.8. *Якщо існує послідовність матриць $d^0=\left\{d^0(n), n\geq 0\right\}$, що задовольняє рівняння (1.67) та умову (1.68), то вона визначає найменш сприятливу спектральну щільність у класі D_M^1 для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць d^0, що задовольняє рівняння (1.69) та умову (1.70), то вона визначає найменш сприятливу спектральну щільність у класі D_M^2 для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць d^0, що задовольняє рівняння (1.71) та умову (1.72), то вона визначає найменш сприятливу спектральну щільність у класі D_M^3 для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць d^0, що задовольняє рівняння (1.73) та умову (1.74), то вона визначає найменш сприятливу спектральну щільність у класі D_M^4 для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою (1.27).*

Для функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ рівності (1.63) – (1.66) мають вигляд

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^{*} =$$
$$= \left|\sum_{l=0}^{M}\alpha(l)e^{-il\lambda}\right|^2 \varphi^0(\lambda)^{\top}\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.75)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^{*} =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^{\top}\left\{\left|\sum_{l=0}^{M}\alpha_k(l)e^{-il\lambda}\right|^2 \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.76)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^{*} =$$
$$= \left|\sum_{l=0}^{M}\alpha(l)e^{-il\lambda}\right|^2 \varphi^0(\lambda)^{\top}B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.77)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^{*} =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^{\top}\left(\sum_{l=0}^{M}\boldsymbol{\alpha(l)}e^{-il\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{M}\boldsymbol{\alpha(l)}e^{-il\lambda}\right)^{*}\overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (1.78)$$

Тому для всіх розв'язків $d=\{d(n),\ 0\le n\le N\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N-n}\sum_{l=0}^{N-k}\overline{\boldsymbol{a}(n+k)}\boldsymbol{a}(l+k)^{\top}d(l) =$$
$$= \sum_{j=-\min(n,M)}^{\min(M,N)}\ \sum_{u=|j|}^{\min(M,N)}\alpha(u)\overline{\alpha(u+j)}d(n+j), \quad (1.79)$$

що задовольняють умови

$$\sum_{l=0}^{N} \langle d(l), d(l+i) \rangle = \sum_{l=0}^{N} \sum_{k=1}^{T} \sum_{n=1}^{m} d_{kn}(l) \overline{d_{kn}(l+i)} = p(i), i = \overline{0, M}, \quad (1.80)$$

виконується рівність (1.75).

Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ 0 \le n \le N\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N-n} \sum_{l=0}^{N-k} \overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \boldsymbol{a}(l+k)^\top d(l) =$$

$$= \sum_{j=-\min(n,M)}^{\min(M,N)} \left\{ \sum_{u=|j|}^{\min(M,N)} \alpha_k(u) \overline{\alpha_k(u+j)} \delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^{T} d(n+j), \quad (1.81)$$

що задовольняють умови

$$\sum_{l=0}^{N} \langle d_k(l), d_k(l+i) \rangle =$$

$$= \sum_{l=0}^{N} \sum_{n=1}^{m} d_{kn}(l) \overline{d_{kn}(l+i)} = p_k(i), i = \overline{0, M},\ k = \overline{1, T}, \quad (1.82)$$

виконується рівність (1.76).

Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ 0 \le n \le N\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N-n} \sum_{l=0}^{N-k} \overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \boldsymbol{a}(l+k)^\top d(l) =$$

$$= \sum_{j=-\min(n,M)}^{\min(M,N)} \sum_{u=|j|}^{\min(M,N)} \alpha(u) \overline{\alpha(u+j)} B^\top d(n+j), \quad (1.83)$$

що задовольняють умови

$$\left\langle B,\ \sum_{l=0}^{N} d(l)(d(l+i))^* \right\rangle = p(i),\ i = \overline{0, M}, \quad (1.84)$$

виконується рівність (1.77).

Для всіх розв'язків $d = \{d(n),\ 0 \leq n \leq N\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N-n} \sum_{l=0}^{N-k} \overline{\boldsymbol{a}(n+k)} \boldsymbol{a}(l+k)^{\top} d(l) =$$
$$= \sum_{j=-\min(n,M)}^{\min(N,M)} \sum_{u=|j|}^{\min(N,M)} \overline{\boldsymbol{\alpha}(u+j)} \boldsymbol{\alpha}(u)^{\top} d(n+j), \quad (1.85)$$

що задовольняють умови

$$\sum_{l=0}^{\infty} d(l)(d(l+i))^{*} = P(i),\ i = \overline{0, M}, \quad (1.86)$$

виконується рівність (1.78).

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.9. *Якщо існує послідовність матриць $d^0 = \left\{d^0(n), n \geq 0\right\}$, що задовольняє рівняння* (1.79) *та умову* (1.80), *то вона визначає найменш сприятливу спектральну щільність у класі D_M^1 для оптимальної екстраполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць d^0, що задовольняє рівняння* (1.81) *та умову* (1.82), *то вона визначає найменш сприятливу спектральну щільність у класі D_M^2 для оптимальної екстраполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць d^0, що задовольняє рівняння* (1.83) *та умову* (1.84), *то вона визначає найменш сприятливу спектральну щільність у класі D_M^3 для оптимальної екстраполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$. Якщо існує послідовність матриць d^0, що задовольняє рівняння* (1.85) *та умову* (1.86), *то вона визначає найменш сприятливу спектральну щільність у класі D_M^4 для оптимальної екстраполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.29).

1.2.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах D_V^U

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\boldsymbol{\xi}$, $A_N\boldsymbol{\xi}$ від векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ для наступних множин спектральних щільностей, що описують смугову модель стохастичних послідовностей:

$$D_V^{U^1}=\left\{F(\lambda)|v(\lambda)\leq \operatorname{Tr} F(\lambda)\leq u(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Tr} F(\lambda)d\lambda=p\right\},$$

$$D_V^{U^2}=\left\{F(\lambda)|v_k(\lambda)\leq f_{kk}(\lambda)\leq u_k(\lambda), \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda)d\lambda=p_k,\ k=\overline{1,T}\right\},$$

$$D_V^{U^3}=\left\{F(\lambda)|v(\lambda)\leq \langle B,\ F(\lambda)\rangle\leq u(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\langle B,\ F(\lambda)\rangle\, d\lambda=p\right\},$$

$$D_V^{U^4}=\left\{F(\lambda)|V(\lambda)\leq F(\lambda)\leq U(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\lambda)d\lambda=P\right\},$$

де $v(\lambda), v_k(\lambda), u(\lambda), u_k(\lambda)$ – задані невід'ємні функції, $V(\lambda),\ U(\lambda)$ – задані матриці спектральних щільностей, нерівність $A\geq B$ означає, що $A-B$ додатно визначена матриця.

З умови $0\in\partial\Delta_D(F^0)$ знайдемо для функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, що найменш сприятливі спектральні щільності заданих множин визначаються наступними співвідношеннями відповідно

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^*=$$
$$=(\alpha^2+\gamma_1(\lambda)+\gamma_2(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top\overline{\varphi^0(\lambda)},\quad (1.87)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^*=$$
$$=\varphi^0(\lambda)^\top\left\{(\alpha_k^2+\gamma_{1k}(\lambda)+\gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}\overline{\varphi^0(\lambda)},\quad (1.88)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^*=$$
$$=(\alpha^2+\gamma_1'(\lambda)+\gamma_2'(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)},\quad (1.89)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_1(\lambda)+\Gamma_2(\lambda))\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.90)$$

де $\Gamma_1(\lambda),\ \Gamma_2(\lambda)$ – ермітові матриці і

$\gamma_1(\lambda)\leq 0, \gamma_2(\lambda)\geq 0,\ \gamma_1'(\lambda)\leq 0, \gamma_2'(\lambda)\geq 0,$

$\gamma_{1k}(\lambda)\leq 0, \gamma_{2k}(\lambda)\geq 0,\ \Gamma_1(\lambda)\leq 0, \Gamma_2(\lambda)\geq 0$ м.н.,

$\gamma_1(\lambda)=0$ при $\operatorname{Tr} F^0(\lambda)>v(\lambda)$, $\gamma_2(\lambda)=0$ при $\operatorname{Tr} F^0(\lambda)<u(\lambda)$;

$\gamma_{1k}(\lambda)=0$ при $f^0_{kk}(\lambda)>v_{kk}(\lambda)$, $\gamma_{2k}(\lambda)=0$ при $f^0_{kk}(\lambda)<u_k(\lambda)$;

$\gamma_1'(\lambda)=0$ при $\left\langle B,\ F^0(\lambda)\right\rangle>v(\lambda)$, $\gamma_2'(\lambda)=0$ при $\left\langle B,\ F^0(\lambda)\right\rangle<u(\lambda)$;

$\Gamma_1(\lambda)=0$ при $F^0>V(\lambda)$, $\Gamma_2(\lambda)=0$ при $F^0<U(\lambda)$.

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.10. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (1.87) – (1.90) *і допускають канонічну факторизацію* (1.25), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах* $D_V^{U^1}, D_V^{U^2}, D_V^{U^3}, D_V^{U^4}$ *відповідно для оптимальної екстраполяції функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$. *Невідомі множники* $\alpha^2,\ \alpha_k^2,\ k=\overline{1,T},\ \boldsymbol{\alpha}$ *та коефіцієнти канонічної факторизації* $d=\{d(n), n\geq 0\}$ *визначаються умовою* (1.31) *та обмеженнями, що накладаються на щільності даних множин. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.27).

Для функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ рівняння (1.87) – (1.90) мають вигляд

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= (\alpha^2+\gamma_1(\lambda)+\gamma_2(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.91)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top\left\{(\alpha_k^2+\gamma_{1k}(\lambda)+\gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.92)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= (\alpha^2+\gamma_1'(\lambda)+\gamma_2'(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.93)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_ke^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_ke^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda))\overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (1.94)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.11. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (1.91) – (1.94) *і допускають канонічну факторизацію* (1.25), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах* $D_V^{U^1}$ $D_V^{U^2}$, $D_V^{U^3}$, $D_V^{U^4}$ *відповідно для оптимальної екстраполяції функціонала* $A_N\boldsymbol{\xi}$. *Невідомі множники* α^2, α_k^2, $k = \overline{1,T}$, $\boldsymbol{\alpha}$ *та коефіцієнти канонічної факторизації* $d = \{d(n), 0 \leq n \leq N\}$ *визначаються умовою* (1.32) *та обмеженнями, що накладаються на щільності даних множин. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.29).

1.2.6. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах D_ε

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\boldsymbol{\xi}$, $A_N\boldsymbol{\xi}$ для множин спектральних щільностей, які описують модель "ε – забруднення" стохастичних послідовностей:

$$D_\varepsilon^1 = \left\{F(\lambda) | \operatorname{Tr} F(\lambda) = (1-\varepsilon)w(\lambda) + \varepsilon u(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} F(\lambda)d\lambda = p\right\},$$

$$D_\varepsilon^2 = \left\{F(\lambda) | f_{kk}(\lambda) = (1-\varepsilon)w_k(\lambda) + \varepsilon u_k(\lambda), \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda)d\lambda = p_k, k = \overline{1,T}\right\},$$

$$D_\varepsilon^3 = \left\{F(\lambda) | \langle B,\ F(\lambda)\rangle = (1-\varepsilon)w(\lambda) + \varepsilon u(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \langle B,\ F(\lambda)\rangle\, d\lambda = p\right\},$$

$$D_\varepsilon^4 = \left\{F(\lambda) | F(\lambda) = (1-\varepsilon)W(\lambda) + \varepsilon U(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\lambda)d\lambda = P\right\},$$

де $w(\lambda)$, $w_k(\lambda)$ – відомі, а $u(\lambda)$, $u_k(\lambda)$ – невідомі невід'ємні функції, $W(\lambda)$ – відома, а $U(\lambda)$ – невідома матриця спектральних щільностей.

З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0)$ для функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ знайдемо, що найменш сприятливі спектральні щільності заданих множин визначаються насту-

пними співвідношеннями відповідно

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^* = (\alpha^2+\gamma(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top\overline{\varphi^0(\lambda)}, \qquad (1.95)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$

$$= \varphi^0(\lambda)^\top\left\{(\alpha_k^2+\gamma_k(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}\overline{\varphi^0(\lambda)}, \qquad (1.96)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^* = (\alpha^2+\gamma'(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \qquad (1.97)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^* = \varphi^0(\lambda)^\top(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*+\Gamma(\lambda))\overline{\varphi^0(\lambda)}, \qquad (1.98)$$

де $\Gamma(\lambda)$ – ермітова матриця та м.н.

$$\gamma(\lambda)\leq 0, \gamma'(\lambda)\leq 0, \gamma_k(\lambda)\leq 0, k=\overline{1,T}, \Gamma(\lambda)\leq 0,$$

$$\begin{aligned}
\gamma(\lambda)=0: &\ \operatorname{Tr} F^0(\lambda) > (1-\varepsilon)w(\lambda);\\
\gamma_k(\lambda)=0: &\ f_{kk}^0(\lambda) > (1-\varepsilon)w_k(\lambda);\\
\gamma'(\lambda)=0: &\ \left\langle B, F^0(\lambda)\right\rangle > (1-\varepsilon)w(\lambda);\\
\Gamma(\lambda)=0: &\ F^0(\lambda) > (1-\varepsilon)W(\lambda).
\end{aligned}$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.12. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (1.95) – (1.98) *і допускають канонічну факторизацію* (1.25), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах D_ε^1, D_ε^2, D_ε^3, D_ε^4 відповідно для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Невідомі множники α^2, α_k^2, $\boldsymbol{\alpha}$ та коефіцієнти $d=\{d(n), n\geq 0\}$ канонічної факторизації визначаються умовою* (1.31) *та обмеженнями, що накладаються на щільності даних множин. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.27).

Для функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ співвідношення (1.95) – (1.98) мають вигляд

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^{*} =$$
$$= (\alpha^2+\gamma(\lambda))\varphi^0(\lambda)^{\top}\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.99)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^{*} =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^{\top}\left\{(\alpha_k^2+\gamma_k(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.100)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^{*} =$$
$$= (\alpha^2+\gamma'(\lambda))\varphi^0(\lambda)^{\top}B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.101)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)_k e^{ik\lambda}\right)^{*} =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^{\top}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*+\Gamma(\lambda))\overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (1.102)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.13. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (1.99) – (1.102) *і допускають канонічну факторизацію* (1.25), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах* D_ε^1, D_ε^2, D_ε^3, D_ε^4 *відповідно для оптимальної екстраполяції функціонала* $A_N\boldsymbol{\xi}$. *Невідомі множники* $\alpha^2, \alpha_k^2, \boldsymbol{\alpha}$ *та коефіцієнти* $d=\{d(n), 0\leq n\leq N\}$ *канонічної факторизації визначаються умовою* (1.32) *та обмеженнями, що накладаються на щільності даних множин. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.29).

1.2.7. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{1\varepsilon}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\boldsymbol{\xi}$, $A_N\boldsymbol{\xi}$ для множин спектральних щільностей, що описують модель “ε – околу” в просторі L_1 стохастичних послідовностей:

$$D_{1\varepsilon}^1 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - V(\lambda)) \right| d\lambda \leq \varepsilon \right\},$$

$$D_{1\varepsilon}^2 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_{kk}(\lambda) - v_{kk}(\lambda) \right| d\lambda \leq \varepsilon_k,\ k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_{1\varepsilon}^3 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \langle B,\ F(\lambda) - V(\lambda) \rangle \right| d\lambda \leq \varepsilon \right\},$$

$$D_{1\varepsilon}^4 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_{ij}(\lambda) - v_{ij}(\lambda) \right| d\lambda \leq \varepsilon_{ij},\ i,j = \overline{1,T} \right\},$$

де $\varepsilon,\ \varepsilon_k$ – задані числа, $\mathrm{E} = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^T$ – задана симетрична матриця, $V(\lambda)$ – задана матриця спектральних щільностей.

З умови $0 \in \partial \Delta_D(F^0)$ для функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ знайдемо, що найменш сприятливі спектральні щільності заданих множин визначаються наступними співвідношеннями відповідно:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right)^* = \alpha^2 \gamma(\lambda) \varphi^0(\lambda)^\top \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.103}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right)^* = \\ = \varphi^0(\lambda)^\top \left\{ \alpha_k^2 \gamma_k(\lambda) \delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.104}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right)^* = \alpha^2 \gamma'(\lambda) \varphi^0(\lambda)^\top B \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.105}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (Ad)_k e^{ik\lambda} \right)^* = \\ = \varphi^0(\lambda)^\top \left\{ \alpha_{ij} \gamma_{ij}(\lambda) \right\}_{i,j=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.106}$$

де $|\gamma(\lambda)| \leq 1$, $|\gamma'(\lambda)| \leq 1$, $|\gamma_k(\lambda)| \leq 1$, $|\gamma_{ij}(\lambda)| \leq 1$ та

$\gamma(\lambda) = \mathrm{sign}\,\mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda) - V(\lambda))$ при $\mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda) - V(\lambda)) \neq 0$,
$\gamma_k(\lambda) = \mathrm{sign}\,(f^0_{kk}(\lambda) - v_{kk}(\lambda))$ при $f^0_{kk}(\lambda) - v_{kk}(\lambda) \neq 0$, $k = \overline{1,T}$,
$\gamma'(\lambda) = \mathrm{sign}\,\left\langle B,\ F^0(\lambda) - V(\lambda)\right\rangle$ при $\langle B,\ F(\lambda)\rangle > \langle B,\ V(\lambda)\rangle$,
$\gamma_{ij}(\lambda) = \frac{f^0_{ji}(\lambda) - v_{ji}(\lambda)}{\left|f^0_{ij}(\lambda) - v_{ij}(\lambda)\right|}$ при $f^0_{ij}(\lambda) - v_{ij}(\lambda) \neq 0$, $i,j = \overline{1,T}$.

Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \alpha_{ij}$ та коефіцієнти канонічної факторизації визначаються з рівняння факторизації (1.25) щільності $F^0(\lambda)$, умови (1.31) та умов

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - V(\lambda))\right| d\lambda = \varepsilon, \tag{1.107}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f_{kk}(\lambda) - v_{kk}(\lambda)\right| d\lambda = \varepsilon_k,\ k = \overline{1,T}, \tag{1.108}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\langle B, F(\lambda) - V(\lambda)\rangle\right| d\lambda = \varepsilon, \tag{1.109}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f_{ij}(\lambda) - v_{ij}(\lambda)\right| d\lambda = \varepsilon_{ij},\ i,j = \overline{1,T}. \tag{1.110}$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.14. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (1.103) – (1.106) *і допускають канонічну факторизацію* (1.25)*, є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах* $D^1_{1\varepsilon}$*,* $D^2_{1\varepsilon}$*,* $D^3_{1\varepsilon}$*,* $D^4_{1\varepsilon}$ *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$*. Невідомі множники* α^2*,* α_k^2*,* α_{ij} *та коефіцієнти канонічної факторизації* $d(n), n \geq 0$ *визначаються умовами* (1.31), (1.107) – (1.110)*. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.27)*.*

Для функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ співвідношення (1.103) – (1.106) мають вигляд

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)^* = \alpha^2\gamma(\lambda)\varphi^0(\lambda)^\top\overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.111}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top\left\{\alpha_k^2\gamma_k(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}\overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{1.112}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)^* = \alpha^2\gamma'(\lambda)\varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.113)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_{ij}\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^{T} \overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (1.114)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.15. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (1.111) – (1.114) *і допускають канонічну факторизацію* (1.25)*, є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах* $D_{1\varepsilon}^1$*,* $D_{1\varepsilon}^2$*,* $D_{1\varepsilon}^3$*,* $D_{1\varepsilon}^4$ *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A_N\boldsymbol{\xi}$*. Невідомі множники* α^2*,* α_k^2*,* α_{ij} *та коефіцієнти канонічної факторизації* $\{d(n), 0 \leq n \leq N\}$ *визначаються умовами* (1.32), (1.107) – (1.110)*. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.29)*.*

1.2.8. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{2\varepsilon}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\boldsymbol{\xi}$, $A_N\boldsymbol{\xi}$ для множин спектральних щільностей, що описують модель "ε – околу" в просторі L_2 стохастичних послідовностей:

$$D_{2\varepsilon}^1 = \left\{F(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - W(\lambda))\right|^2 d\lambda \leq \varepsilon\right\},$$

$$D_{2\varepsilon}^2 = \left\{F(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_{kk}(\lambda) - w_{kk}(\lambda)\right|^2 d\lambda \leq \varepsilon_k,\ k = \overline{1,T}\right\},$$

$$D_{2\varepsilon}^3 = \left\{F(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\langle B,\ F(\lambda) - W(\lambda)\rangle\right|^2 d\lambda \leq \varepsilon\right\},$$

$$D_{2\varepsilon}^4 = \left\{F(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_{ij}(\lambda) - w_{ij}(\lambda)\right|^2 d\lambda \leq \varepsilon_{ij},\, i,j = \overline{1,T}\right\},$$

де ε, ε_k – задані числа, $\mathrm{E} = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^T$ – задана симетрична матриця, $W(\lambda)$ – задана матриця спектральних щільностей.

Для функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ з умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0)$ знайдемо, що найменш сприятливі спектральні щільності заданих множин визначаються насту-

пними співвідношеннями відповідно

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= \alpha^2 \mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda) - W(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.115)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_k^2(f_{kk}^0(\lambda) - w_{kk}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.116)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= \alpha^2 \left\langle B, F^0(\lambda) - W(\lambda)\right\rangle \varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.117)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(Ad)_k e^{ik\lambda}\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_{ij}(f_{ji}^0(\lambda) - w_{ji}(\lambda))\right\}_{i,j=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.118)$$

Невідомі множники $\alpha^2,\ \alpha_k^2,\ \alpha_{ij}$ та коефіцієнти канонічної факторизації визначаються з рівняння факторизації (1.25), умови (1.31) та умов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - W(\lambda))\right|^2 d\lambda = \varepsilon, \quad (1.119)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_{kk}(\lambda) - w_{kk}(\lambda)\right|^2 d\lambda = \varepsilon_k,\ k = \overline{1,T}, \quad (1.120)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\langle B,\ F(\lambda) - W(\lambda)\rangle\right|^2 d\lambda = \varepsilon, \quad (1.121)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_{ij}(\lambda) - w_{ij}(\lambda)\right|^2 d\lambda = \varepsilon_{ij},\ i,j = \overline{1,T}. \quad (1.122)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.16. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (1.115) – (1.118) *і допускають канонічну факторизацію* (1.25), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах $D_{2\varepsilon}^1$, $D_{2\varepsilon}^2$, $D_{2\varepsilon}^3$, $D_{2\varepsilon}^4$ відповідно для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Невідомі множники α^2, α_k^2, α_{ij} та коефіцієнти канонічної факторизації $\{d(n),\ n \geq 0\}$ визначаються умовами* (1.31), (1.119) – (1.122). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.27).

Для функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ співвідношення (1.115) – (1.118) мають вигляд

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)^* = \\ = \alpha^2 \mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda) - W(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.123)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)^* = \\ = \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_k^2(f_{kk}^0(\lambda) - w_{kk}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.124)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)^* = \\ = \alpha^2 \left\langle B,\ F^0(\lambda) - W(\lambda)\right\rangle \varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (1.125)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(A_N d)_k e^{ik\lambda}\right)^* = \\ = \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_{ij}(f_{ji}^0(\lambda) - w_{ji}(\lambda))\right\}_{i,j=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (1.126)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.17. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (1.123) – (1.126) *і допускають канонічну факторизацію* (1.25), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах $D_{2\varepsilon}^1$, $D_{2\varepsilon}^2$, $D_{2\varepsilon}^3$, $D_{2\varepsilon}^4$ відповідно для оптимальної екстраполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$. Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \alpha_{ij}$ та коефіцієнти $\{d(n), 0 \leq n \leq N\}$ канонічної факторизації визначаються умовами* (1.32), (1.119) – (1.122). *Мінімаксна* *спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.29).

1.3. Фільтрація функціоналів від стаціонарних послідовностей

У цьому підрозділі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(j)^T \boldsymbol{\xi}(-j)$$

від невідомих значень $\boldsymbol{\xi}(-j), j = 0, 1, \ldots, \infty$ векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j) = \{\xi_k(j)\}_{k=1}^{T}$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j) + \boldsymbol{\eta}(j)$ при $j \leq 0$, де $\boldsymbol{\eta}(j) = \{\eta_k(j)\}_{k=1}^{T}$ – некорельована з $\boldsymbol{\xi}(j)$ векторна стаціонарна послідовність.

Якщо матриці спектральні щільності $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$, $G(\lambda) = \{g_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$ стаціонарних послідовностей $\boldsymbol{\xi}(j), \boldsymbol{\eta}(j)$ відомі точно, то до задачі оцінювання лінійного функціоналу доцільно застосовувати класичний метод А.М. Колмогорова, який базується на геометрії гільбертових просторів. У тому ж випадку, якщо відома лише множина можливих значень щільностей $D = D_F \times D_G$, застосовується мінімаксний підхід до задачі оцінювання, тобто шукаються такі оцінки, які мінімізують максимальне значення величини похибки.

1.3.1. Класичний метод лінійної фільтрації

Припустимо, що коефіцієнти $\boldsymbol{a}(j)$, які визначають функціонал $A\boldsymbol{\xi}$, задовольняють умови (1.23). Тоді функціонал $A\boldsymbol{\xi}$ має скінчений другий момент. Послідовність $\boldsymbol{\xi}(j)+\boldsymbol{\eta}(j)$ допускає канонічний розклад рухомого середнього:

$$\boldsymbol{\xi}(j) + \boldsymbol{\eta}(j) = \sum_{u=-\infty}^{j} d(j-u)\boldsymbol{\varepsilon}(u), \tag{1.127}$$

якщо матриця спектральних щільностей $F(\lambda) + G(\lambda)$ стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j) + \boldsymbol{\eta}(j)$ допускає канонічну факторизацію [3]

$$F(\lambda) + G(\lambda) = d(\lambda)(d(\lambda))^*, \quad d(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} d(k)e^{-ik\lambda}, \tag{1.128}$$

де $d(k) = \{d_{ij}(k)\}_{i=\overline{1,T}}^{j=\overline{1,m}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(u) = \{\varepsilon_k(u)\}_{k=1}^{m}$ – векторна стаціонарна послідовність білого шуму. Для факторизації спектральної щільності $F(\lambda) + G(\lambda)$ достатньо регулярності однієї із щільностей $F(\lambda)$, $G(\lambda)$. Регулярні спектральні щільності $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ допускають канонічні факторизації

$$F(\lambda)=\varphi(\lambda)(\varphi(\lambda))^{*},\quad \varphi(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)e^{-ik\lambda}, \tag{1.129}$$

$$G(\lambda)=\psi(\lambda)(\psi(\lambda))^{*},\quad \psi(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)e^{-ik\lambda}, \tag{1.130}$$

де $\varphi(k)=\{\varphi_{ij}(k)\}_{i=\overline{1,T}}^{j=\overline{1,m}}$, $\psi(k)=\{\psi_{ij}(k)\}_{i=\overline{1,T}}^{j=\overline{1,m}}$. Позначимо через $L_2^-(F+G)$ підпростір, породжений у просторі $L_2(F+G)$ функціями вигляду

$$e^{in\lambda}\delta_k,\ \delta_k=\{\delta_{kl}\}_{k,l=1}^{T},\ k=\overline{1,T},\ n\leq 0,$$

де $\delta_{kk}=1,\ \delta_{kl}=0,\ k\neq l$. Кожна лінійна оцінка $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ за даними спостереження послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)+\boldsymbol{\eta}(j)$ при $j\leq 0$ має вигляд

$$\hat{A}\boldsymbol{\xi}=\int_{-\pi}^{\pi}h(e^{i\lambda})^{\top}Z^{\xi+\eta}(d\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{T}h_k(e^{i\lambda})Z_k^{\xi+\eta}(d\lambda),$$

де $Z^{\xi+\eta}(\Delta)=\left\{Z_k^{\xi+\eta}(\Delta)\right\}_{k=1}^{T}$ – ортогональна випадкова міра послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)+\boldsymbol{\eta}(j)$, функція $h(e^{i\lambda})=\left\{h_k(e^{i\lambda})\right\}_{k=1}^{T}$ – спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$, що належить підпростору $L_2^-(F+G)$.
Середньоквадратичну похибку лінійної оцінки $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$, що має спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{h}(k)e^{-ik\lambda}$ можна обчислити за формулою

$$\Delta(h;F,G)=E\left|A\boldsymbol{\xi}-\hat{A}\boldsymbol{\xi}\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A(e^{i\lambda})^{\top}G(\lambda)\overline{A(e^{i\lambda})}+$$

$$+(A(e^{i\lambda})-h(e^{i\lambda}))^{\top}(F(\lambda)+G(\lambda))\overline{(A(e^{i\lambda})-h(e^{i\lambda}))}-$$
$$-(A(e^{i\lambda})-h(e^{i\lambda}))^{\top}G(\lambda)\overline{A(e^{i\lambda})}-A(e^{i\lambda})^{\top}G(\lambda)\overline{(A(e^{i\lambda})-h(e^{i\lambda}))}]d\lambda=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)}\boldsymbol{a}(k)^{\top}\psi(k-p)(\psi(j-p))^{*}\overline{\boldsymbol{a}(j)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)}(\boldsymbol{a}(k)-\boldsymbol{h}(k))^{\top}d(k-p)(d(j-p))^{*}\overline{(\boldsymbol{a}(j)-\boldsymbol{h}(j))}-$$

$$
-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)}(\boldsymbol{a}(k)-\boldsymbol{h}(k))^{\top}\psi(k-p)(\psi(j-p))^{*}\overline{\boldsymbol{a}(j)}-
$$

$$
-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\min(k,j)}(\boldsymbol{a}(k))^{\top}\psi(k-p)(\psi(j-p))^{*}\overline{\boldsymbol{a}(j)-\boldsymbol{h}(j)}=
$$

$$
=\|\Psi a\|^{2}+\|D(a-h)\|^{2}-\langle\Psi(a-h),\Psi a\rangle-\langle\Psi a,\Psi(a-h)\rangle,
$$

де

$$
A(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{a}(j)e^{-ij\lambda},
$$

$$
\|\Psi a\|^{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\|(\Psi a)_{k}\|^{2}, \quad (\Psi a)_{k}=\sum_{l=0}^{k}\psi(k-l)^{\top}\boldsymbol{a}(l),
$$

$$
\|D(a-h)\|^{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\|(D(a-h))_{k}\|^{2}, (D(a-h))_{k}=\sum_{l=0}^{k}d(k-l)^{\top}(\boldsymbol{a}(l)-\boldsymbol{h}(l)),
$$

$$
\langle\Psi(a-h),\Psi a\rangle=\overline{\langle\Psi a,\Psi(a-h)\rangle}=\sum_{k=0}^{\infty}\langle(\Psi(a-h))_{k},(\Psi a)_{k}\rangle.
$$

Спектральна характеристика $h(F,G)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ при заданих щільностях $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ визначається умовою

$$
\Delta(F,G)=\Delta(h(F,G);F,G)=\min_{h\in L_2^-(F+G)}\Delta(h;F,G). \tag{1.131}
$$

В тому випадку, коли щільності допускають канонічну факторизацію (1.128), (1.130) можна показати, що величина середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$ дорівнює

$$
\Delta(F,G)=\|\Psi a\|^{2}-\|B^{*}\Psi^{*}\Psi a\|^{2}=\langle c_G,a\rangle-\|C_G b^{*}\|^{2}. \tag{1.132}
$$

Тут

$$
\|B^{*}\Psi^{*}\Psi a\|^{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\|(B^{*}\Psi^{*}\Psi a)_{k}\|^{2}, (B^{*}\Psi^{*}\Psi a)_{k}=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{b(l)}(\Psi^{*}\Psi a)_{l+k},
$$

$$
\langle c_G,a\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\langle c_G(k),\ \boldsymbol{a}(k)\rangle, \quad c_G(k)=(\Psi^{*}\Psi a)_{k}=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\psi(l)}(\Psi a)_{l+k},
$$

$$
\|C_G b^{*}\|^{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\|(C_G b^{*})_{k}\|^{2}, \quad (C_G b^{*})_{k}=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{b(l)}c_G(l+k)
$$

$b(\lambda) = \{b_{ij}(\lambda)\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,T}}$ – матрична функція, така що

$$b(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b(k) e^{-ik\lambda}, \quad b(\lambda) d(\lambda) = E_m.$$

Спектральну характеристику $h(F, G)$ оптимальної оцінки можна обчислити за формулою

$$h(F, G) = A(e^{i\lambda}) - b(\lambda)^{\top} r_G(e^{i\lambda}), \quad r_G(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} (C_G b^*)_k e^{-ik\lambda}. \quad (1.133)$$

Якщо ж щільності допускають канонічні факторизації (1.128), (1.129), то величину середньоквадратичної похибки і спектральну характеристику оптимальної оцінки можна обчислити за формулами

$$\Delta(F, G) = \langle c_F, a \rangle - \|C_F b^*\|^2, \quad (1.134)$$

$$h(F, G) = b(\lambda)^{\top} r_F(e^{i\lambda}), \quad r_F(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} (C_F b^*)_k e^{-ik\lambda}, \quad (1.135)$$

де

$$c_F(k) = (\Phi^* \Phi a)_k = \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\varphi(l)} (\Phi a)_{l+k}, \quad (\Phi a)_k = \sum_{l=0}^{k} \varphi(k-l)^{\top} \boldsymbol{a}(l).$$

В тому випадку, коли $\boldsymbol{\eta}(j)$ або $\boldsymbol{\xi}(j)$ – послідовність покоординатно некорельованих випадкових векторів з дисперсією σ^2 (векторна послідовність білого шуму), маємо

$$\Delta(F, G) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|\boldsymbol{a}(k)\|^2 - \sigma^4 \|Ab^*\|^2, \quad (1.136)$$

де

$$\|Ab^*\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|(Ab^*)_k\|^2, \quad (Ab*)_k = \sum_{l=0}^{\infty} \overline{b(l)} \boldsymbol{a}(k+l).$$

Величину середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки значення $\boldsymbol{a}(N)^{\top} \boldsymbol{\xi}(-N)$ за даними спостережень $\boldsymbol{\xi}(j) + \boldsymbol{\eta}(j)$ при $j \le 0$ у цьому випадку можна обчислити за формулою

$$\Delta(F, G) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{T} |a_k(N)|^2 - \sigma^4 \sum_{k=0}^{N} \left\| \overline{b(k)} \boldsymbol{a}(N) \right\|^2.$$

Коефіцієнти $b(k)$ знаходять за факторизацією (1.128) щільності $F(\lambda) + \sigma^2 E_T$.

Отже справджується така теорема.

Теорема 1.18. *Величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(F, G)$ *оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$ *від невідомих значень векторної послідовності* $\boldsymbol{\xi}(j)$ *за даними спостережень послідовності* $\boldsymbol{\xi}(j) + \boldsymbol{\eta}(j)$ *при* $j \leq 0$, *де* $\boldsymbol{\xi}(j)$, $\boldsymbol{\eta}(j)$ *– некорельовані векторні стаціонарні послідовності, що мають щільності* $F(\lambda)$, $G(\lambda)$, *які допускають канонічні факторизації* (1.128), (1.130) *чи* (1.128), (1.129), *можна обчислити за формулами* (1.132), (1.134). *Спектральну характеристику* $h(F, G)$ *оптимальної фільтрації можна обчислити за формулами* (1.133), (1.135).

Приклад 1.9. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціоналу

$$A_0\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{a}(0)^\top \boldsymbol{\xi}(0) = a_1^0 \xi_1(0) + a_2^0 \xi_2(0)$$

за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(j) + \boldsymbol{\eta}(j)$, $j \leq 0$, якщо матриці спектральних щільностей послідовностей $\boldsymbol{\xi}(j)$, $\boldsymbol{\eta}(j)$ мають вигляд

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f(\lambda) \\ f(\lambda) & f(\lambda) + f_1(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$f(\lambda) = \frac{P_1^2}{|1 - b_1 e^{-i\lambda}|^2}, \quad f_1(\lambda) = \frac{P_2^2}{|1 - b_2 e^{-i\lambda}|^2};$$

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} g(\lambda) & g(\lambda) \\ g(\lambda) & g(\lambda) + g_1(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$g(\lambda) = \sigma^2, \quad g_1(\lambda) = \frac{P_3^2}{|1 - b_3 e^{-i\lambda}|^2}.$$

Тоді

$$F(\lambda) + G(\lambda) = d(\lambda)\,(d(\lambda))^*,$$

де

$$d(\lambda) = \begin{pmatrix} A\frac{1-\beta e^{-i\lambda}}{1-b_1 e^{-i\lambda}} & 0 \\ A\frac{1-\beta e^{-i\lambda}}{1-b_1 e^{-i\lambda}} & B\frac{1-\gamma e^{-i\lambda}}{(1-b_2 e^{-i\lambda})(1-b_3 e^{-i\lambda})} \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \frac{\sigma^2 b_1}{\beta}, \quad B^2 = \frac{P_2^2 b_3 + P_3^2 b_2}{\gamma},$$

$$\beta = 1/2(b_1 + b_1^{-1})(1+\theta) - (1/4(1+\theta^2)(b_1 + b_1^{-1})^2 - 1)^{1/2}, \theta = \frac{P_1^2}{\sigma^2(1+b_1^2)},$$

а γ – корінь рівняння

$$z^2 - \frac{P_2^2 + P_3^2 + P_2^2 b_3^2 + P_3^2 b_2^2}{P_2^2 b_3 + P_3^2 b_2} z + 1 = 0$$

за модулем менший 1. Порахуємо обернену матрицю

$$b(\lambda) = (d(\lambda))^{-1} = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{A}\frac{1-b_1 e^{-i\lambda}}{1-\beta e^{-i\lambda}} & 0 \\ -\frac{1}{B}\frac{(1-b_2 e^{-i\lambda})(1-b_3 e^{-i\lambda})}{1-\gamma e^{-i\lambda}} & \frac{1}{B}\frac{(1-b_2 e^{-i\lambda})(1-b_3 e^{-i\lambda})}{1-\gamma e^{-i\lambda}} \end{array} \right).$$

Підрахуємо спектральну характеристику оптимальної оцінки:

$$h(\lambda) = (h_1(\lambda), \quad h_2(\lambda))^\top = b(\lambda)^\top r_F(e^{i\lambda}),$$

де

$$r_F(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} (C_F b^*)_k e^{-ik\lambda}, \quad (C_F b^*)_k = \sum_{l=0}^{\infty} \overline{b(l)} c_F(l+k).$$

Оскільки

$$c_F(l) = (\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi(k)} \varphi(k+l)^\top) \boldsymbol{a}(0) = (c_1(l)\ ,\ c_2(l))^\top,$$

де

$$c_1(l) = \left[\frac{(a_1^0 + a_2^0) P_1^2}{|1 - b_1 e^{-i\lambda}|^2} \right]_l, \quad c_2(l) = c_1(l) + \left[\frac{a_2^0 P_2^2}{|1 - b_2 e^{-i\lambda}|^2} \right]_l,$$

$[f(\lambda)]_l$ – коефіцієнти Фур'є функції f, що стоять при $e^{-il\lambda}$, маємо

$$h_1(\lambda) = \frac{(a_1^0 + a_2^0) P_1^2}{A^2} \frac{1 - b_1 e^{-i\lambda}}{1 - \beta e^{-i\lambda}} \left[\frac{1 - b_1 e^{i\lambda}}{1 - \beta e^{i\lambda}} \cdot \frac{1}{|1 - b_1 e^{-i\lambda}|^2} \right]_- -$$

$$- \frac{a_2^0 P_2^2}{B^2} \frac{(1 - b_2 e^{-i\lambda})(1 - b_3 e^{-i\lambda})}{1 - \gamma e^{-i\lambda}} \left[\frac{(1 - b_2 e^{i\lambda})(1 - b_3 e^{i\lambda})}{1 - \gamma e^{i\lambda}} \frac{1}{|1 - b_2 e^{-i\lambda}|^2} \right]_-,$$

де $[f(\lambda)]_-$ – розклад функції f в ряд Фур'є по від'ємним степеням $e^{-ik\lambda}$, $k \geq 0$. Враховуючи, що

$$\left[e^{i\mu\lambda} \frac{1}{(1 - \gamma e^{i\lambda})(1 - b_2 e^{-i\lambda})} \right]_- = \frac{b_2^\mu}{1 - \gamma b_2} \cdot \frac{1}{1 - b_2 e^{-i\lambda}},$$

отримаємо

$$h_1(\lambda) = \frac{a_1^0 + a_2^0}{A^2(1 - b_1\beta)} \frac{P_1^2}{1 - \beta e^{-i\lambda}} - \frac{a_2^0(1 - b_2 b_3) P_2^2}{B^2(1 - \gamma b_2)} \frac{1 - b_3 e^{-i\lambda}}{1 - \gamma e^{-i\lambda}}.$$

Аналогічно

$$h_2(\lambda) = \frac{a_2^0(1 - b_2 b_3) P_2^2}{B^2(1 - \gamma b_2)} \frac{1 - b_3 e^{-i\lambda}}{1 - \gamma e^{-i\lambda}}.$$

Середньоквадратична похибка обчислюється за формулою

$$\Delta(F, G) = \frac{(a_1^0 + a_2^0)^2 P_1^2}{1 - b_1^2} + \frac{(a_2^0)^2 P_2^2}{1 - b_2^2} - \frac{C^2}{1 - b_1^2} - \frac{D^2}{1 - b_2^2},$$

де

$$C = \frac{(a_1^0 + a_2^0) P_1^2}{A(1 - b_1\beta)(1 - b_1^2)} (1 - \frac{b_1}{\beta}),$$

$$D = \frac{a_2^0 P_2^2}{B(1 - b_2^2)(1 - b_2\gamma)} (1 - \frac{b_2 + b_3}{\gamma} + \frac{b_2 b_3}{\gamma^2}).$$

Використовуючи наведені вище міркування спектральну характеристику оптимальної оцінки випадкової величини $\boldsymbol{a}(N)^\top \boldsymbol{\xi}(-N)$ можемо підрахувати за формулою

$$h_1(\lambda) = \frac{(a_1^N + a_2^N) P_1^2}{A^2} p(\lambda) - \frac{a_2^N P_2^2}{B^2} q(\lambda), \quad h_2(\lambda) = \frac{a_2^N P_2^2}{B^2} q(\lambda),$$

де

$$p(\lambda) = \left(\frac{\beta e^{i\lambda}(1 - \beta^N e^{iN\lambda})}{1 - \beta e^{i\lambda}} + \frac{1}{1 - b_1 e^{-i\lambda}} \right) \frac{e^{-iN\lambda}(1 - b_1 e^{-i\lambda})}{(1 - b_1\beta)(1 - \beta e^{-i\lambda})},$$

$$q(\lambda) = \frac{(1 - b_2 e^{-i\lambda}) e^{-iN\lambda}}{1 - \gamma b_2} \frac{1 - b_3 e^{-i\lambda}}{1 - \gamma e^{-i\lambda}} \times$$
$$\times \left(\frac{1 - b_3 b_2}{1 - b_2 e^{-i\lambda}} + \frac{\gamma e^{i\lambda}(1 - \gamma^N e^{iN\lambda})}{1 - \gamma e^{i\lambda}} \left(1 - \frac{b_3}{\gamma} \right) \right).$$

Середньоквадратична похибка обчислюється аналогічно. ♢

1.3.2. Мінімаксний метод лінійної фільтрації

Формулами (1.132) – (1.136) можна користуватись лише тоді, коли відомі матриці спектральних щільностей $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ векторних стаціонарних послідовностей $\boldsymbol{\xi}(j)$, $\boldsymbol{\eta}(j)$. Якщо задається лише множина $D = D_F \times D_G$ можливих щільностей, то застосовують мінімаксний підхід до задач оцінювання функціоналів від векторних стаціонарних послідовностей. Замість того, щоб шукати оцінку, яка була б оптимальною для деяких спектральних щільностей, шукають оцінку, що мінімізує величину середньоквадратичної похибки одночасно для всіх пар спектральних щільностей із заданого класу.

Означення 1.3. *Спектральні щільності $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ називаються найменш сприятливими в класі D для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо виконуються співвідношення:*

$$\Delta(h(F^0,G^0);F^0,G^0) = \max_{(F,G)\in D} \Delta(h(F,G);F,G).$$

Враховуючи співвідношення (1.132) – (1.136), можна переконатись, що вірні такі твердження.

Теорема 1.19. *Спектральні щільності $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$, що допускають канонічні факторизації* (1.128) – (1.130), *найменш сприятливі в класі D для оптимальної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо коефіцієнти факторизації* (1.128) – (1.130) *є розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\Delta(F,G) = \langle c_G, a\rangle - \|C_G b^*\|^2 \to \sup, \tag{1.137}$$

$$G(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k)e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k)e^{-ik\lambda}\right)^* \in D_G,$$

$$F(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d(k)e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} d(k)e^{-ik\lambda}\right)^* -$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k)e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k)e^{-ik\lambda}\right)^* \in D_F,$$

або задачі на умовний екстремум

$$\Delta(F,G) = \langle c_F, a\rangle - \|C_F b^*\|^2 \to \sup, \tag{1.138}$$

$$F(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)e^{-ik\lambda}\right)^* \in D_F,$$

$$G(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d(k)e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} d(k)e^{-ik\lambda}\right)^* -$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)e^{-ik\lambda}\right)^* \in D_G.$$

В тому випадку, коли одна із щільностей задана, (1.137), (1.138) – це задачі на екстремум лише по змінній $b = \{b(k),\ k \geq 0\}$.

Теорема 1.20. *Спектральна щільність $F^0(\lambda)$, що допускає канонічну факторизацію* (1.128), (1.129) *при заданій регулярній щільності $G(\lambda)$, найменш сприятлива в класі D_F для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо*

$$F^0(\lambda)+G(\lambda)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}d^0(k)e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}d^0(k)e^{-ik\lambda}\right)^*,$$

де $d^0=\left\{d^0(k),\ k\geq 0\right\}$ визначаються коефіцієнтами розкладу матричної функції $b(\lambda)$:

$$b(\lambda)d(\lambda)=E_m,\quad b(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}b^0(k)e^{-ik\lambda},$$

де $b^0=\left\{b^0(k),\ k\geq 0\right\}$ – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\left\|C_G b^*\right\|^2\to\inf, \tag{1.139}$$

$$F(\lambda)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}d(k)e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}d(k)e^{-ik\lambda}\right)^*-G(\lambda)\in D_F.$$

Теорема 1.21. *Спектральна щільність $G^0(\lambda)$, що допускає канонічну факторизацію* (1.128), (1.130) *при заданій регулярній щільності $F(\lambda)$, найменш сприятлива в класі D_G для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо*

$$F(\lambda)+G^0(\lambda)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}d^0(k)e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}d^0(k)e^{-ik\lambda}\right)^*,$$

де $d^0=\left\{d^0(k),\ k\geq 0\right\}$ визначаються коефіцієнтами $b^0=\left\{b^0(k),\ k\geq 0\right\}$, що є розв'язками задачі на умовний екстремум

$$\left\|C_F b^*\right\|^2\to\inf, \tag{1.140}$$

$$G(\lambda)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}d(k)e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}d(k)e^{-ik\lambda}\right)^*-F(\lambda)\in D_G.$$

Означення 1.4. *Спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ називається мінімаксною (робастною),* *якщо виконуються умови*

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{(F,G)\in D} L_2^-(F+G),$$

$$\min_{h\in H_D} \sup_{(F,G)\in D} \Delta(h;F,G) = \sup_{(F,G)\in D} \Delta(h^0;F,G).$$

Найменш сприятливі спектральні щільності $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ та мінімаксна (робастна) спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda}) \in H_D$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h;F,G)$. Нерівності сідлової точки:

$$\Delta(h;F^0,G^0) \geq \Delta(h^0;F^0,G^0) \geq \Delta(h^0;F,G),\ \forall (F,G) \in D,\ \forall h \in H_D$$

виконуються, коли $h^0 = h(F^0,G^0) \in H_D$, де (F^0,G^0)– розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\Delta(h(F^0,G^0);F^0,G^0) = \sup_{(F,G)\in D} \Delta(h(F^0,G^0);F,G), \tag{1.141}$$

де

$$\Delta(h(F^0,G^0);F,G) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r_G(e^{i\lambda})^\top b^0(\lambda)F(\lambda)(b^0(\lambda))^*\overline{r_G(e^{i\lambda})}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r_F(e^{i\lambda})^\top b^0(\lambda)F(\lambda)(b^0(\lambda))^*\overline{r_F(e^{i\lambda})}d\lambda,$$

а функції $r_F(e^{i\lambda})$, $r_G(e^{i\lambda})$ обчислені за формулами (1.133), (1.135) за умови, що $F(\lambda) = F^0(\lambda)$, $G(\lambda) = G^0(\lambda)$.

Задача на умовний екстремум (1.141) еквівалентна такій задачі на безумовний екстремум [47]

$$\Delta_D(F,G) = -\Delta(h(F^0,G^0);F,G) + \delta((F,G)|D) \to \inf, \tag{1.142}$$

де $\delta((F,G)|D)$ – індикаторна функція множини D. Розв'язок задачі (1.142) характеризується умовою $0 \in \partial\Delta_D(F^0,G^0)$, де $\partial\Delta_D(F^0,G^0)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(F,G)$ в точці (F^0,G^0). Користуючись співвідношенням (1.141), (1.142) можна знайти найменш сприятливі спектральні щільності для конкретних класів спектральних щільностей.

1.3.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{0,0}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналу $A\boldsymbol{\xi}$ від векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ для множин спектральних щільностей, що характеризують обмеження на перший момент послідовності:

$$D_{0,0}^{1}=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Tr}F(\lambda)d\lambda=p,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Tr}G(\lambda)d\lambda=q,\right\},$$

$$D_{0,0}^{2}=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_{kk}(\lambda)d\lambda=p_k,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g_{kk}(\lambda)d\lambda=q_k,k=\overline{1,T}\right\},$$

$$D_{0,0}^{3}=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\langle B_1,F(\lambda)\right\rangle d\lambda=p,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\langle B_2,G(\lambda)\right\rangle d\lambda=q\right\},$$

$$D_{0,0}^{4}=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(\lambda)d\lambda=P,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}G(\lambda)d\lambda=Q,\right\}.$$

З умови $0\in\partial\Delta_D(F^0,G^0)$ знайдемо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ заданих множин відповідно:

$$b^0(\lambda)^{\top}r_G(e^{i\lambda})(r_G(e^{i\lambda}))^{*}\overline{b^0(\lambda)}=\alpha^2E,$$

$$b^0(\lambda)^{\top}r_F(e^{i\lambda})(r_F(e^{i\lambda}))^{*}\overline{b^0(\lambda)}=\beta^2E;$$

$$b^0(\lambda)^{\top}r_G(e^{i\lambda})(r_G(e^{i\lambda}))^{*}\overline{b^0(\lambda)}=\left\{\alpha_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T},$$

$$b^0(\lambda)^{\top}r_F(e^{i\lambda})(r_F(e^{i\lambda}))^{*}\overline{b^0(\lambda)}=\left\{\beta_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T};$$

$$b^0(\lambda)^{\top}r_G(e^{i\lambda})(r_G(e^{i\lambda}))^{*}\overline{b^0(\lambda)}=\alpha^2B_1,$$

$$b^0(\lambda)^{\top}r_F(e^{i\lambda})(r_F(e^{i\lambda}))^{*}\overline{b^0(\lambda)}=\beta^2B_2;$$

$$b^0(\lambda)^\top r_G(e^{i\lambda})(r_G(e^{i\lambda}))^*\overline{b^0(\lambda)} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*,$$
$$b^0(\lambda)^\top r_F(e^{i\lambda})(r_F(e^{i\lambda}))^*\overline{b^0(\lambda)} = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^*,$$
де $\alpha^2, \beta^2, \alpha_k^2, \beta_k^2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ – невизначені множники Лагранжа. Дані співвідношення можна переписати наступним чином:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* = \alpha^2 d^0(\lambda)^\top\overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.143)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Fb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Fb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* = \beta^2 d^0(\lambda)^\top\overline{d^0(\lambda)}; \quad (1.144)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top\left\{\alpha_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T\overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.145)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Fb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Fb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top\left\{\beta_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T\overline{d^0(\lambda)}; \quad (1.146)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* = \alpha^2 d^0(\lambda)^\top B_1\overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.147)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Fb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Fb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* = \alpha^2 d^0(\lambda)^\top B_2\overline{d^0(\lambda)}; \quad (1.148)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* = d^0(\lambda)^\top\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*\overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.149)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Fb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Fb^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* = d^0(\lambda)^\top\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^*\overline{d^0(\lambda)}. \quad (1.150)$$

Невідомі $\alpha^2, \beta^2, \alpha_k^2, \beta_k^2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ та $b = \{b(k), k \geq 0\}, d = \{d(k), k \geq 0\}$ обчислюємо, користуючись рівняннями канонічної факторизації (1.128) – (1.130) щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$, $F^0(\lambda)+G^0(\lambda)$ та обмеженнями, що накладаються на щільності відповідних множин. В тому випадку, коли одна із щільностей відома, для визначення найменш сприятливої спектральної щільності $F^0(\lambda)$ або $G^0(\lambda)$ можна використати лише одне з двох співвідношень.

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.22. *Найменш сприятливі матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ в класах $D_{0,0}$ для оптимальної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ визначаються співвідношеннями* (1.143) – (1.150), (1.128) – (1.130), (1.137), (1.138). *Якщо відома матриця спектральних щільностей $G(\lambda)$ ($F(\lambda)$), що допускає канонічну факторизацію* (1.130) ((1.129)), *то найменш сприятливі матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda) \in D_0$ ($G^0(\lambda) \in D_0$) визначаються співвідношеннями* (1.143), (1.145), (1.147), (1.149), (1.128) – (1.130), (1.139) *(або* (1.144), (1.146), (1.148), (1.150), (1.128) – (1.130), (1.140)*). Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки $A\boldsymbol{\xi}$ обчислюється за формулами* (1.133), (1.135).

1.3.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{F_1}^{F_2} \times D_\varepsilon$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналу $A\boldsymbol{\xi}$ від векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ для наступних множин спектральних щільностей, що описують смугову модель та модель „ε – забруднення" стохастичних послідовностей:

$$D_{F_1}^{F_2}{}^1 = \left\{ F(\lambda) | \operatorname{Tr} F_1(\lambda) \leq \operatorname{Tr} F(\lambda) \leq \operatorname{Tr} F_2(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} F(\lambda) d\lambda = p \right\},$$

$$D_\varepsilon^1 = \left\{ G(\lambda) | \operatorname{Tr} G(\lambda) = (1-\varepsilon) \operatorname{Tr} V_1(\lambda) + \varepsilon \operatorname{Tr} V(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} G(\lambda) d\lambda = q \right\};$$

$$D_{F_1}^{F_2}{}^2 = \left\{ F(\lambda) | f_{kk}^1(\lambda) \leq f_{kk}(\lambda) \leq f_{kk}^2(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_\varepsilon^2 = \left\{ G(\lambda) | g_{kk}(\lambda) = (1-\varepsilon) v_{kk}^1(\lambda) + \varepsilon v_{kk}(\lambda), \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_{kk}(\lambda) d\lambda = q_k, k = \overline{1,T} \right\};$$

$$D_{F_1}^{F_2\,3}=\Bigg\{F(\lambda)|\left\langle B_1,F_1(\lambda)\right\rangle\leq\left\langle B_1,F(\lambda)\right\rangle\leq\left\langle B_1,F_2(\lambda)\right\rangle, \\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\langle B_1,F(\lambda)\right\rangle d\lambda=p\Bigg\},$$

$$D_{\varepsilon}^{3}=\Bigg\{G(\lambda)|\left\langle B_2,G(\lambda)\right\rangle=(1-\varepsilon)\left\langle B_2,V_1(\lambda)\right\rangle+\varepsilon\left\langle B_2,V(\lambda)\right\rangle, \\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\langle B_2,G(\lambda)\right\rangle d\lambda=q\Bigg\};$$

$$D_{F_1}^{F_2\,4}=\left\{F(\lambda)|F_1(\lambda)\leq F(\lambda)\leq F_2(\lambda),\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(\lambda)d\lambda=P\right\},$$

$$D_{\varepsilon}^{4}=\left\{G(\lambda)|G(\lambda)=(1-\varepsilon)V_1(\lambda)+\varepsilon V(\lambda),\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}G(\lambda)d\lambda=Q\right\},$$

де $F_1(\lambda),F_2(\lambda),V_1(\lambda)$ – задані матриці спектральних щільностей, а $V(\lambda)$ – невідома матриця спектральних щільностей.

З умови $0\in\partial\Delta_D(F^0,G^0)$ одержимо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей $F^0(\lambda),G^0(\lambda)$ заданих множин відповідно:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_ke^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_ke^{-ik\lambda}\right)^*= \\ =(\alpha^2+\gamma_1(\lambda)+\gamma_2(\lambda))d^0(\lambda)^{\top}\overline{d^0(\lambda)},\quad(1.151)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Fb^*)_ke^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Fb^*)_ke^{-ik\lambda}\right)^*= \\ =(\beta^2+\gamma_3(\lambda))d^0(\lambda)^{\top}\overline{d^0(\lambda)};\quad(1.152)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_ke^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_Gb^*)_ke^{-ik\lambda}\right)^*= \\ =d^0(\lambda)^{\top}\left\{(\alpha_k^2+\gamma_{1k}(\lambda)+\gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{\top}\overline{d^0(\lambda)},\quad(1.153)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_F b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_F b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^{\top}\left\{(\beta_k^2+\gamma_{3k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}\overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.154)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_G b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_G b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* =$$
$$= (\alpha^2+\gamma_1'(\lambda)+\gamma_2'(\lambda))d^0(\lambda)^{\top}B_1\overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.155)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_F b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_F b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* =$$
$$= (\beta^2+\gamma_3'(\lambda))d^0(\lambda)^{\top}B_2\overline{d^0(\lambda)}; \quad (1.156)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_G b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_G b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^{\top}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*+\Gamma_1(\lambda)+\Gamma_2(\lambda))\overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.157)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_G b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_G b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^{\top}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^*+\Gamma_3(\lambda))\overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.158)$$

де $\Gamma_1(\lambda),\Gamma_2(\lambda),\Gamma_3(\lambda)$ – ермітові матриці та м.н.
$\gamma_1(\lambda)\le 0$, $\gamma_3(\lambda)\le 0$; $\gamma_1'(\lambda)\le 0$, $\gamma_3'(\lambda)\le 0$; $\gamma_{1k}(\lambda)\le 0$, $\gamma_{3k}(\lambda)\le 0, k=\overline{1,T}$; $\Gamma_1(\lambda)\le 0$, $\Gamma_3(\lambda)\le 0$, $\gamma_2(\lambda)\ge 0$; $\gamma_2'(\lambda)\ge 0$; $\gamma_{2k}(\lambda)\ge 0, k=\overline{1,T}$; $\Gamma_2(\lambda)\ge 0$,

$$\gamma_1(\lambda)=0:\operatorname{Tr}F^0(\lambda)>\operatorname{Tr}F_1(\lambda),\gamma_2(\lambda)=0:\operatorname{Tr}F^0(\lambda)<\operatorname{Tr}F_2(\lambda),$$

$$\gamma_3(\lambda)=0:\operatorname{Tr}G^0(\lambda)>(1-\varepsilon)\operatorname{Tr}V_1(\lambda);$$
$$\gamma_{1k}(\lambda)=0:f_{kk}^0(\lambda)>f_{kk}^1(\lambda),\gamma_{2k}(\lambda)=0:f_{kk}^0(\lambda)<f_{kk}^2(\lambda),$$
$$\gamma_{3k}(\lambda)=0:g_{kk}^0(\lambda)>(1-\varepsilon)v_{kk}^1(\lambda);$$
$$\gamma_1'(\lambda)=0:\left\langle B_1,F^0(\lambda)\right\rangle>\left\langle B_1,F_1(\lambda)\right\rangle,$$
$$\gamma_2'(\lambda)=0:\left\langle B_1,F^0(\lambda)\right\rangle<\left\langle B_1,F_2(\lambda)\right\rangle,$$

$$\gamma_3'(\lambda) = 0 : \left\langle B_2,\ G^0(\lambda)\right\rangle > (1-\varepsilon)\left\langle B_2,\ V_1(\lambda)\right\rangle;$$
$$\Gamma_1(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) > F_1(\lambda), \Gamma_2(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) < F_2(\lambda),$$
$$\Gamma_3(\lambda) = 0 : G^0(\lambda) > (1-\varepsilon)G_1(\lambda).$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.23. *Найменш сприятливі матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ *в класах* $D = D_{F_1}^{F_2} \times D_\varepsilon$ *для оптимальної фільтрації функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$ *визначаються співвідношеннями* (1.151) – (1.158), (1.128) – (1.130), (1.137), (1.138). *Якщо ж відома щільність* $G(\lambda)$ *(або* $F(\lambda)$*), що допускає канонічну факторизацію* (1.130) *(* (1.129)*), то найменш сприятливі матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda) \in D_{F_1}^{F_2}$ *(*$G^0(\lambda) \in D_\varepsilon$*) визначаються співвідношеннями* (1.151), (1.153), (1.155), (1.157), (1.128) – (1.130), (1.139), *(*(1.152), (1.154), (1.156), (1.158), (1.128) – (1.130), (1.140)*). Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулами* (1.133), (1.135).

1.3.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{1\varepsilon_1} \times D_{2\varepsilon_2}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналу $A\boldsymbol{\xi}$ для множин спектральних щільностей, що описують моделі „ε – околу” в просторах L_1, L_2 стохастичних послідовностей:

$$D_{1\varepsilon_1}^1 = \left\{ F(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - F_1(\lambda))\right| d\lambda \le \varepsilon_1 \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}^1 = \left\{ G(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{Tr}\,(G(\lambda) - G_1(\lambda))\right|^2 d\lambda \le \varepsilon_2 \right\};$$

$$D_{2\varepsilon_1}^2 = \left\{ F(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f_{kk}(\lambda) - f_{kk}^1(\lambda)\right| d\lambda \le \varepsilon_k^1, k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}^2 = \left\{ G(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|g_{kk}(\lambda) - g_{kk}^1(\lambda)\right|^2 d\lambda \le \varepsilon_k^2, k = \overline{1,T} \right\};$$

$$D_{2\varepsilon_1}^3 = \left\{ F(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\langle B_1, F(\lambda) - F_1(\lambda)\rangle\right| d\lambda \le \varepsilon_1 \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}^3 = \left\{ G(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\langle B_2,\ G(\lambda) - G_1(\lambda)\rangle\right|^2 d\lambda \le \varepsilon_2 \right\};$$

$$D^4_{1\varepsilon_1} = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| f_{ij}(\lambda) - f^1_{ij}(\lambda) \right| d\lambda \le \varepsilon^1_{ij},\ i,j = \overline{1,T} \right\},$$

$$D^4_{2\varepsilon_2} = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| g_{ij}(\lambda) - g^1_{ij}(\lambda) \right|^2 d\lambda \le \varepsilon^2_{ij},\ i,j = \overline{1,T} \right\},$$

де $F_1(\lambda), G_1(\lambda)$ – задані матриці спектральних щільностей; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon^1_k, \varepsilon^2_k$, $k = \overline{1,T}$ – задані числа; $E_1 = \left\{ \varepsilon^1_{ij} \right\}^T_{i,j=1}$, $E_2 = \left\{ \varepsilon^2_{ij} \right\}^T_{i,j=1}$ – задані симетричні матриці. З умови $0 \in \partial \Delta_D(F^0, G^0)$ одержимо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей заданих множин відповідно:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (C_G b^*)_k e^{-ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (C_G b^*)_k e^{-ik\lambda} \right)^* =$$
$$= \alpha^2 \gamma(\lambda) d^0(\lambda)^\top \overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.159)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (C_F b^*)_k e^{-ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (C_F b^*)_k e^{-ik\lambda} \right)^* =$$
$$= \beta^2 \mathrm{Tr}\, (G^0(\lambda) - G_1(\lambda)) d^0(\lambda)^\top \overline{d^0(\lambda)}; \quad (1.160)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (C_G b^*)_k e^{-ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (C_G b^*)_k e^{-ik\lambda} \right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top \left\{ \alpha^2_k \gamma_k(\lambda) \delta_{kl} \right\}^T_{k,l=1} \overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.161)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (C_F b^*)_k e^{-ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (C_F b^*)_k e^{-ik\lambda} \right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top \left\{ \beta^2_k (g^0_{kk}(\lambda) - g^1_{kk}(\lambda)) \delta_{kl} \right\}^T_{k,l=1} \overline{d^0(\lambda)}; \quad (1.162)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (C_G b^*)_k e^{-ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (C_G b^*)_k e^{-ik\lambda} \right)^* =$$
$$= \alpha^2 \gamma'(\lambda) d^0(\lambda)^\top B_1 \overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.163)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_F b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_F b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* =$$
$$= \beta^2 \left\langle B_2, G^0(\lambda) - G_1(\lambda)\right\rangle d^0(\lambda)^\top B_2 \overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.164)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_G b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_G b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_{ij}\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^{T} \overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.165)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_F b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(C_F b^*)_k e^{-ik\lambda}\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top \left\{\beta_{ij}(g_{ji}^0(\lambda) - g_{ji}^1(\lambda))\right\}_{i,j=1}^{T} \overline{d^0(\lambda)}, \quad (1.166)$$

де

$$|\gamma(\lambda)| \leq 1;\ |\gamma_k(\lambda)| \leq 1,\ k = \overline{1,T}; |\gamma'(\lambda)| \leq 1;\ \ \left|\gamma_{ij}(\lambda)\right| \leq 1,\ i,j = \overline{1,T},$$

$$\begin{aligned}
\gamma(\lambda) &= \mathrm{sign}\,(\mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda) - F_1(\lambda))) : \mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda) - F_1(\lambda)) \neq 0,\\
\gamma_k(\lambda) &= \mathrm{sign}\,(f_{kk}^0(\lambda) - f_{kk}^1(\lambda)) : f_{kk}^0(\lambda) - f_{kk}^1(\lambda) \neq 0, k = \overline{1,T},\\
\gamma'(\lambda) &= \mathrm{sign}\,\left\langle B_1,\ F^0(\lambda) - F_1(\lambda)\right\rangle : \left\langle B_1,\ F^0(\lambda) - F_1(\lambda)\right\rangle \neq 0,\\
\gamma_{ij}(\lambda) &= \frac{f_{ji}^0(\lambda) - f_{ji}^1(\lambda)}{\left|f_{ij}^0(\lambda) - f_{ij}^1(\lambda)\right|} : f_{ij}^0(\lambda) - f_{ij}^1(\lambda) \neq 0,\ i,j = \overline{1,T}.
\end{aligned}$$

Невідомі множники α^2, β^2, α_k^2, β_k^2, α_{ij}, β_{ij} та коефіцієнти канонічної факторизації визначаються з рівнянь факторизації (1.128) – (1.130), умов (1.137), (1.138) та умов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - F_1(\lambda))|\, d\lambda = \varepsilon_1,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{Tr}\,(G(\lambda) - G_1(\lambda))|^2\, d\lambda = \varepsilon_2; \quad (1.167)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_{kk}(\lambda)-f_{kk}^{1}(\lambda)\right|d\lambda=\varepsilon_k^1,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|g_{kk}(\lambda)-g_{kk}^{1}(\lambda)\right|^2 d\lambda=\varepsilon_k^2, k=\overline{1,T}; \tag{1.168}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\langle B_1,\ F(\lambda)-F_1(\lambda)\rangle\right|d\lambda=\varepsilon_1,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\langle B_2,\ G(\lambda)-G_1(\lambda)\rangle\right|^2 d\lambda=\varepsilon_2; \tag{1.169}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_{ij}(\lambda)-f_{ij}^{1}(\lambda)\right|d\lambda=\varepsilon_{ij}^1,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|g_{ij}(\lambda)-g_{ij}^{1}(\lambda)\right|^2 d\lambda=\varepsilon_{ij}^2,\ i,j=\overline{1,T}. \tag{1.170}$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 1.24. *Найменш сприятливі матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda), G^0(\lambda)$ *в класах* $D_{1\varepsilon_1}\times D_{2\varepsilon_2}$ *для оптимальної фільтрації функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$ *визначаються співвідношеннями* (1.159) – (1.166), (1.128) – (1.130), (1.137), (1.138), (1.167) – (1.170). *Якщо ж відома щільність* $G(\lambda)$ *(або* $F(\lambda)$*), що допускає канонічну факторизацію* (1.130) *(* (1.129)*), то найменш сприятливі матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda)\in D_{1\varepsilon_1}$ *(*$G^0(\lambda)\in D_{2\varepsilon_2}$*) визначаються співвідношеннями* (1.159), (1.161), (1.163), (1.165), (1.128) – (1.130), (1.139), (1.167) – (1.170) *(* (1.160), (1.162), (1.164), (1.166), (1.128)– (1.130), (1.140), (1.167) – (1.170)*). Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулами* (1.133), (1.135).

1.4. Інтерполяція функціоналів від стаціонарних послідовностей

У цьому підрозділі досліджується задача лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання функціонала

$$A_N \boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{a}(j)^{\top} \boldsymbol{\xi}(j)$$

від невідомих значень векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j) = \{\xi_k(j)\}_{k=1}^{T}$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j) + \boldsymbol{\eta}(j)$ при $j < 0$, та $j > N$, де $\boldsymbol{\eta}(j) = \{\eta_k(j)\}_{k=1}^{T}$ – некорельована із $\boldsymbol{\xi}(j)$ векторна стаціонарна послідовність.

Якщо матриці спектральних щільностей $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ стаціонарних послідовностей $\boldsymbol{\xi}(j)$, $\boldsymbol{\eta}(j)$ відомі точно, то до задачі оцінювання лінійного функціоналу доцільно застосовувати класичний метод А.М. Колмогорова, який базується на геометрії гільбертових просторів. У тому ж випадку, якщо відома лише множина можливих значень щільностей D застосовується мінімаксний підхід до задачі оцінювання, тобто шукаються такі оцінки, які мінімізують максимальне значення величини похибки.

1.4.1. Класичний метод лінійної інтерполяції

Нехай $\boldsymbol{\xi}(j) = \{\xi_k(j)\}_{k=1}^{T}$, $\boldsymbol{\eta}(j) = \{\eta_k(j)\}_{k=1}^{T}$ – некорельовані між собою стаціонарні стохастичні векторні послідовності, які мають спектральні щільності $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$, $G(\lambda) = \{g_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$, що задовольняють умову мінімальності [54]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Tr}\left[(F(\lambda) + G(\lambda))^{-1}\right] d\lambda < \infty. \tag{1.171}$$

Така умова необхідна і достатня для того щоб була неможлива безпомилкова інтерполяція невідомих значень послідовності. Позначимо через $L_2^{N-}(F)$ підпростір, породжений у просторі $L_2(F)$ функціями вигляду:

$$e^{in\lambda}\delta_k,\ \delta_k = \{\delta_{kl}\}_{l=1}^{T},\ k = \overline{1,T}\ ,\ n \in Z \setminus \{0,\ \ldots,\ N\}\,.$$

Кожна лінійна оцінка $\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)+\boldsymbol{\eta}(j)$ при $j\in Z\setminus\{0,\ \ldots,\ N\}$ має вигляд:

$$\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}h(e^{i\lambda})^{\top}(Z^{\xi}(d\lambda)+Z^{\eta}(d\lambda))=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{T}h_k(e^{i\lambda})(Z_k^{\xi}(d\lambda)+Z_k^{\eta}(d\lambda)),$$

де $Z^{\xi}(\Delta)=\left\{Z_k^{\xi}(\Delta)\right\}_{k=1}^{T}, Z^{\eta}(\Delta)=\{Z_k^{\eta}(\Delta)\}_{k=1}^{T}$ – ортогональні випадкові міри послідовностей $\boldsymbol{\xi}(j)$ та $\boldsymbol{\eta}(j)$ відповідно, $h(e^{i\lambda})=\left\{h_k(e^{i\lambda})\right\}_{k=1}^{T}$ – спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}$. Функція $h(e^{i\lambda})$ належить простору $L_2^{N-}(F+G)$.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h;F,G)$ оцінки $\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}$ обчислюється за формулою:

$$\Delta(h;F,G)=E\left|A_N\boldsymbol{\xi}-\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}\right|^2=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(A_N(e^{i\lambda})-h(e^{i\lambda}))^{\top}F(\lambda)\overline{A_N(e^{i\lambda})-h(e^{i\lambda})}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}h(e^{i\lambda})^{\top}G(\lambda)\overline{h(e^{i\lambda})}d\lambda,$$

де

$$A_N(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{a}(j)e^{ij\lambda}.$$

Спектральна характеристика $h(F,G)$ оптимальної лінійної оцінки $A_N\boldsymbol{\xi}$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(F,G)=\Delta(h(F,G);F,G)=\min_{h\in L_2^{N-}(F+G)}\Delta(h;F,G)=$$

$$=\min_{\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}}E\left|A_N\boldsymbol{\xi}-\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}\right|^2. \tag{1.172}$$

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}$ є розв'язком оптимізаційної задачі (1.172). Вона характеризується двома умовами [21, 22]:

$$1)\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}\in H\left[\xi_k(n)+\eta_k(n),k=\overline{1,T},n\in Z\setminus\{0,\ldots,N\}\right],$$

$$2)A_N\boldsymbol{\xi}-\hat{A}_N\boldsymbol{\xi}\perp H\left[\xi_k(n)+\eta_k(n),k=\overline{1,T},n\in Z\setminus\{0,\ldots,N\}\right], \tag{1.173}$$

де $H\left[\xi_k(n)+\eta_k(n),k=\overline{1,T},n\in Z\setminus\{0,\ldots,N\}\right]$ – підпростір, породжений випадковими величинами $\left[\xi_k(n)+\eta_k(n),k=\overline{1,T},n\in Z\setminus\{0\ldots N\}\right]$ у гільбертовому просторі L_2 випадкових величин із скінченим другим моментом та нульовим математичним сподіванням. Ці умови дозволяють знайти спектральну характеристику $h(F,G)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(F,G)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ у тому випадку коли відомі щільності $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ та виконується умова (1.171).

Теорема 1.25. *Нехай* $\boldsymbol{\xi}(j) = \{\xi_k(j)\}_{k=1}^T$, $\boldsymbol{\eta}(j) = \{\eta_k(j)\}_{k=1}^T$ *– некорельовані між собою стаціонарні стохастичні векторні послідовності, які мають спектральні щільності* $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$, $G(\lambda) = \{g_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$, *що задовольняють умову* (1.171). *Спектральна характеристика* $h(F,G)$ *та величина середньоквадратичної похибки* $\Delta(F,G)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\boldsymbol{\xi}$ *від невідомих значень послідовності* $\boldsymbol{\xi}(j)$ *за даними спостережень послідовності* $\boldsymbol{\zeta}(j) = \boldsymbol{\xi}(j) + \boldsymbol{\eta}(j)$, $j \in Z\setminus\{0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$ *обчислюються за формулами:*

$$h(F,G)^\top = (A_N(e^{i\lambda})^\top F(\lambda) - C_N(e^{i\lambda})^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1} =$$

$$= A_N(e^{i\lambda})^\top - ((A_N(e^{i\lambda})^\top G(\lambda) + C_N(e^{i\lambda})^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}, \quad (1.174)$$

$$\Delta(F,G) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((A_N(e^{i\lambda})^\top G(\lambda) + C_N(e^{i\lambda})^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}F(\lambda)\times$$
$$\times(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}((A_N(e^{i\lambda})^\top G(\lambda) + C_N(e^{i\lambda})^\top)^* d\lambda +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A_N(e^{i\lambda})^\top F(\lambda) - C_N(e^{i\lambda})^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}G(\lambda)\times$$
$$\times(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}(A_N(e^{i\lambda})^\top G(\lambda) + C_N(e^{i\lambda})^\top)^* d\lambda =$$
$$= \langle \boldsymbol{c}_N\,,\, B_N\boldsymbol{c}_N\rangle + \langle \boldsymbol{a}_N\,,\, R_N\boldsymbol{a}_N\rangle\,, \quad (1.175)$$

де

$$C_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{c}(j)e^{ij\lambda}, \boldsymbol{c}_N = \{\boldsymbol{c}(k)\}_{k=0}^N = B_N^{-1}D_N\boldsymbol{a}_N, \boldsymbol{a}_N = \{\boldsymbol{a}(k)\}_{k=0}^N\,,$$

$\langle a,b\rangle$ *– позначення скалярного добутку,* B_N, D_N, R_N *– матриці, що складаються із матриць-блоків розмірності* $T\times T$*:*

$$B_N(k,j) = B_N(k-j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}\right]^\top e^{i(j-k)\lambda}d\lambda,$$

$$D_N(k,j) = D_N(k-j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[F(\lambda)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}\right]^\top e^{i(j-k)\lambda}d\lambda,$$

$$R_N(k,j) = R_N(k-j) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[F(\lambda)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}G(\lambda)\right]^\top e^{i(j-k)\lambda}d\lambda,$$
$$k,j=0,1,\dots,N.$$

Доведення. Друга умова (1.173) виконується, якщо

$$E(A_N\boldsymbol{\xi} - \hat{A}_N\boldsymbol{\xi})\overline{\zeta_k(j)} = 0, j \in Z\setminus\{0,\dots,N\}, k = \overline{1,T},$$

тобто

$$E\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(A_N(e^{i\lambda})^\top Z^\xi(d\lambda) - h(e^{i\lambda})^\top Z^\zeta(d\lambda)\right)\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ij\lambda}\overline{(Z^\zeta(d\lambda))}\right] = 0,$$

$$j \in Z\setminus\{0,\dots,N\}.$$

Отже,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(A_N(e^{i\lambda})^\top F(\lambda) - h(e^{i\lambda})^\top(F(\lambda)+G(\lambda)))e^{-ij\lambda}d\lambda = 0, j \in \{0,\dots,N\}.$$

Із цієї умови випливає, що

$$A_N(e^{i\lambda})^\top F(\lambda) - h(e^{i\lambda})^\top(F(\lambda)+G(\lambda)) = C_N(e^{i\lambda})^\top,$$

де $C_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^N \boldsymbol{c}(j)e^{ij\lambda}$, $\boldsymbol{c}_N = \{\boldsymbol{c}(k)\}_{k=0}^N$ – невідомі коефіцієнти. Звідси знаходимо

$$h(e^{i\lambda})^\top = (A_N(e^{i\lambda})^\top F(\lambda) - C_N(e^{i\lambda})^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1} =$$

$$= A_N(e^{i\lambda})^\top - (A_N(e^{i\lambda})^\top G(\lambda) + C_N(e^{i\lambda})^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}.$$

Перша умова (1.173) еквівалентна тому, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda})e^{-ij\lambda}d\lambda = 0,\ j = \overline{0,N},$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\lambda})^\top F(\lambda)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}e^{-ij\lambda}d\lambda =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} C_N(e^{i\lambda})^\top(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}e^{-ij\lambda}d\lambda,\ j = \overline{0,N}.$$

Якщо записати коефіцієнти Фур'є матричних функцій $[(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}]^\top$,

$[F(\lambda)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}G(\lambda)]^\top$, $[F(\lambda)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}]^\top$:

$$B(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}\right]^\top e^{-ik\lambda}d\lambda,$$

$$D(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[F(\lambda)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}\right]^\top e^{-ik\lambda}d\lambda,$$

$$R(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[F(\lambda)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}G(\lambda)\right]^\top e^{-ik\lambda}d\lambda,$$

то отримаємо наступну систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $\boldsymbol{c}(k)$:

$$D(0)\boldsymbol{a}(0)+\ldots+D(-N)\boldsymbol{a}(N)=B(0)\boldsymbol{c}(0)+\ldots+B(-N)\boldsymbol{c}(N),$$

$$D(1)\boldsymbol{a}(0)+\ldots+D(N-1)\boldsymbol{a}(N)=B(1)\boldsymbol{c}(0)+\ldots+B(N-1)\boldsymbol{c}(N),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D(N)\boldsymbol{a}(0)+\ldots+D(0)\boldsymbol{a}(N)=B(N)\boldsymbol{c}(0)+\ldots+B(0)\boldsymbol{c}(N).$$

Звідки

$$\boldsymbol{c}_N=\{\boldsymbol{c}(k)\}_{k=0}^N=B_N^{-1}D_N\boldsymbol{a}_N.$$

Середньоквадратична похибка має вигляд

$$\Delta(F,G)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A_N(e^{i\lambda})^\top G(\lambda)+C_N(e^{i\lambda})^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}F(\lambda)\times$$

$$\times(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}(A_N(e^{i\lambda})^\top G(\lambda)+C_N(e^{i\lambda})^\top)^*d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A_N(e^{i\lambda})^\top F(\lambda)-C_N(e^{i\lambda})^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}G(\lambda)\times$$

$$\times(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}(A_N(e^{i\lambda})^\top F(\lambda)-C_N(e^{i\lambda})^\top)^*d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A_N(e^{i\lambda})^\top F(\lambda)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}G(\lambda)\overline{A_N(e^{i\lambda})}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}C_N(e^{i\lambda})^\top(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}\overline{C_N(e^{i\lambda})}d\lambda=$$

$$=\langle a_N,R_Na_N\rangle+\langle c_N,B_Nc_N\rangle.$$

Спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ визначається формулою (1.174) та мінімізує величину середньоквадратичної похибки.

Отже, твердження доведено.

Наслідок 1.4. *Нехай* $\boldsymbol{\xi}(j) = \{\xi_k(j)\}_{k=1}^{T}$ *– стаціонарна стохастична векторна послідовність, яка має спектральну щільність* $F(\lambda)$*, що задовольняє умову мінімальності:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Tr}\,\left[(F(\lambda))^{-1}\right]\, d\lambda < \infty.$$

Спектральна характеристика $h(F)$ *та величина середньоквадратичної похибки* $\Delta(F)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\boldsymbol{\xi}$ *від невідомих значень послідовності* $\boldsymbol{\xi}(j)$ *за даними спостережень* $\boldsymbol{\xi}(j)$*,* $j \in Z\backslash\{0,\ldots,N\}$ *обчислюються за формулами:*

$$h(F)^{\top} = A_N(e^{i\lambda})^{\top} - C_N(e^{i\lambda})^{\top}[F(\lambda)]^{-1}, \tag{1.176}$$

$$\Delta(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_N(e^{i\lambda})^{\top}[F(\lambda)]^{-1}\overline{C_N(e^{i\lambda})}d\lambda = \left\langle B_N^{-1}\boldsymbol{a}_N\,,\,\boldsymbol{a}_N\right\rangle, \tag{1.177}$$

де

$$C_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N}\boldsymbol{c}(j)e^{ij\lambda}, \boldsymbol{c}_N = B_N^{-1}\boldsymbol{a}_N,$$

B_N *– матриця, складена із матриць-блоків розмірності* $T\times T$*:*

$$B_N(k,j) = B_N(k-j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(F(\lambda))^{-1}\right]^{\top} e^{i(j-k)\lambda}d\lambda, k,j = 0,1,\ldots,N.$$

Приклад 1.10. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціоналу

$$A_1\boldsymbol{\zeta} = (\alpha\,,\,\beta)\begin{pmatrix}\zeta_1(0)\\ \zeta_2(0)\end{pmatrix} + (\gamma\,,\,\delta)\begin{pmatrix}\zeta_1(1)\\ \zeta_2(1)\end{pmatrix} =$$

$$= \alpha\,\zeta_1(0) + \beta\,\zeta_2(0) + \gamma\,\zeta_1(1) + \delta\,\zeta_1(1)$$

від двовимірної послідовності $\boldsymbol{\zeta}(n) = \{\zeta_k(n)\}_{k=1}^{2}$ за даними спостережень $\boldsymbol{\zeta}(j)$, $j \in Z\backslash\{0\,,\,1\}$, де $\zeta_1(n) = \xi(n)$ – стаціонарна випадкова послідовність із спектральною щільністю $f(\lambda)$, а $\zeta_2(n) = \xi(n) + \eta(n)$, де $\eta(n)$ – некорельована із $\xi(n)$ стаціонарна випадкова послідовність із спектральною щільністю $g(\lambda)$. Маємо матрицю спектральних щільностей:

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f(\lambda)\\ f(\lambda) & f(\lambda)+g(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Її визначник:

$$D = |F(\lambda)| = f(\lambda)\, g(\lambda),$$

а обернена матриця:

$$F(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{f(\lambda)+g(\lambda)}{f(\lambda)\,g(\lambda)} & \frac{-1}{g(\lambda)} \\ \frac{-1}{g(\lambda)} & \frac{1}{g(\lambda)} \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$f(\lambda) = \frac{P_1}{2\pi\ \left|1 - b\, e^{i\lambda}\right|^2}, \quad g(\lambda) = \frac{P_2}{2\pi}, \quad P_1, P_2, b \in R.$$

Тоді:

$$\frac{f(\lambda)+g(\lambda)}{f(\lambda)\,g(\lambda)} = \frac{2\pi}{P_1 P_2}\left(P_1 + P_2 + P_2 b^2 - P_2 b e^{-i\lambda} - P_2 b e^{i\lambda}\right), \frac{1}{g(\lambda)} = \frac{2\pi}{P_2}.$$

Маємо матрицю B_1:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{P_1\,P_2}(P_1 + P_2 + P_2 b^2) & -\frac{2\pi}{P_2} & -\frac{2\pi}{P_1} b & 0 \\ -\frac{2\pi}{P_2} & \frac{2\pi}{P_2} & 0 & 0 \\ -\frac{2\pi}{P_1} b & 0 & \frac{2\pi}{P_1\,P_2}(P_1 + P_2 + P_2 b^2) & -\frac{2\pi}{P_2} \\ 0 & 0 & -\frac{2\pi}{P_2} & \frac{2\pi}{P_2} \end{pmatrix}.$$

Дискримінант цієї матриці:

$$D = \left(\frac{2\pi}{P_2}\right)^4 \cdot \frac{P_2^2}{P_1^2}(1 + b^2 + b^4).$$

Знайдемо обернену матрицю B_1^{-1}:

$$\frac{P_2}{D \cdot P_1} \begin{pmatrix} 1+b^2 & 1+b^2 & b & b \\ 1+b^2 & \frac{P_1+P_2}{P_1}(1+b^2) + \frac{P_2}{P_1} b^4 & b & b \\ b & b & 1+b^2 & 1+b^2 \\ b & b & 1+b^2 & \frac{P_1+P_2}{P_1}(1+b^2) + \frac{P_2}{P_1} b^4 \end{pmatrix}.$$

Порахуємо вектор $\boldsymbol{c}_1$:

$$\boldsymbol{c}_1 = B_1^{-1} \boldsymbol{a}_1 = B_1^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+b^2+b^4)} \left(\begin{array}{c} P_1 \left[(\alpha+\beta)(1+b^2)+b(\gamma+\delta)\right] \\ P_1 \left[(\alpha+\beta)(1+b^2)+b(\gamma+\delta)\right] + P_2\beta(1+b^2+b^4) \\ P_1 \left[(1+b^2)(\gamma+\delta)+b(\alpha+\beta)\right] \\ P_1 \left[b(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)(1+b^2)\right] + P_2\delta(1+b^2+b^4) \end{array} \right).$$

Маємо спектральну характеристику оптимальної оцінки випадкової величини $A_1\boldsymbol{\zeta}$:

$$h(F)^\top = (\alpha+\gamma\, e^{i\lambda}\,,\, \beta+\delta\, e^{i\lambda}) - C_1(e^{i\lambda})^\top F(\lambda)^{-1} = (h_1\,, h_2),$$

де

$$h_1 = A\left[(\alpha+\beta)(1+b^2)+b(\gamma+\delta)\right] e^{-i\lambda} +$$

$$+A\left[(\gamma+\delta)(1+b^2)+b(\alpha+\beta)\right] e^{2i\lambda},\ h_2 = 0,\ A = \frac{b}{1+b^2+b^4}.$$

Отже найкраща оцінка випадкової величини $A_1\boldsymbol{\zeta}$ має вигляд:

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\zeta} = A\left[(\alpha+\beta)(1+b^2)+b(\gamma+\delta)\right]\ \zeta_1(-1)+$$

$$+A\left[(\gamma+\delta)(1+b^2)+b(\alpha+\beta)\right]\ \zeta_1(2).$$

Похибка найкращої оцінки:

$$\Delta(F) = \langle \boldsymbol{c}_1\,,\, \boldsymbol{a}_1 \rangle =$$

$$= \frac{AP_1}{2\pi b}\left[(\alpha+\beta)^2(1+b^2)+(\gamma+\delta)^2(1+b^2)+2b(\gamma+\delta)(\alpha+\beta)\right] +$$

$$+\frac{P_2}{2\pi}\left[\beta^2+\delta^2\right].$$

$\diamondsuit$

Приклад 1.11. Нехай у попередньому прикладі

$$f(\lambda) = \frac{P_1}{2\pi\ |1-b_1e^{i\lambda}|^2}, \quad g(\lambda) = \frac{P_2}{2\pi\ |1-b_2e^{i\lambda}|^2}, P_1\,,\ P_2\,,\ b_1, b_2 \in R.$$

Тоді:

$$B_1^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{P_1}{2\pi}A & \frac{P_1}{2\pi}A & \frac{P_1}{2\pi}C & \frac{P_1}{2\pi}C \\ \frac{P_1}{2\pi}A & \frac{P_1}{2\pi}A+\frac{P_2}{2\pi}B & \frac{P_1}{2\pi}C & \frac{P_1}{2\pi}C+\frac{P_2}{2\pi}D \\ \frac{P_1}{2\pi}C & \frac{P_1}{2\pi}C & \frac{P_1}{2\pi}A & \frac{P_1}{2\pi}A \\ \frac{P_1}{2\pi}C & \frac{P_1}{2\pi}C+\frac{P_2}{2\pi}D & \frac{P_1}{2\pi}A & \frac{P_1}{2\pi}A+\frac{P_2}{2\pi}B \end{array} \right),$$

де

$$A = \frac{1+b_1^2}{1+b_1^2+b_1^4}, B = \frac{1+b_2^2}{1+b_2^2+b_2^4}, C = \frac{b_1}{1+b_1^2+b_1^4}, D = \frac{b_2}{1+b_2^2+b_2^4}.$$

Порахуємо спектральну характеристику оптимальної оцінки випадкової величини $A_1\boldsymbol{\zeta}$:

$$h(F)^\top = (\alpha + \gamma\, e^{i\lambda}\,,\, \beta + \delta\, e^{i\lambda}) - C_1(e^{i\lambda})^\top F(\lambda)^{-1} = (h_1(e^{i\lambda}), h_2(e^{i\lambda})),$$

де

$$h_1(e^{i\lambda}) = (C\left[(\alpha+\beta)(1+b_1^2) + b_1(\gamma+\delta)\right] - D\left[\beta(1+b_2^2) + b_2\delta\right])\, e^{-i\lambda} +$$

$$+(C\left[(\gamma+\delta)(1+b_1^2) + b_1(\alpha+\beta)\right] - D\left[\delta(1+b_2^2) + b_2\beta\right])\, e^{2i\lambda};$$
$$h_2(e^{i\lambda}) = D\left[\beta(1+b_2^2) + b_2\delta\right]\, e^{-i\lambda} + D\left[\delta(1+b_2^2) + b_2\beta\right])\, e^{2i\lambda}.$$

Отже найкраща оцінка випадкової величини $A_1\boldsymbol{\zeta}$ має вигляд:

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\zeta} = (C\left[(\alpha+\beta)(1+b_1^2) + b_1(\gamma+\delta)\right] - D\left[\beta(1+b_2^2) + b_2\delta\right])\, \zeta_1(-1) +$$

$$+(C\left[(\gamma+\delta)(1+b_1^2) + b_1(\alpha+\beta)\right] - D\left[\delta(1+b_2^2) + b_2\beta\right])\, \zeta_1(2) +$$
$$+D\left[\beta(1+b_2^2) + b_2\delta\right]\, \zeta_2(-1) + D\left[\delta(1+b_2^2) + b_2\beta\right]\, \zeta_2(2).$$

Похибка найкращої оцінки:

$$\Delta(F) = \langle \boldsymbol{c}_1\,,\, \boldsymbol{a}_1\rangle = \frac{P_1}{2\pi(1+b_1^2+b_1^4)} \times$$

$$\times\left[(\alpha+\beta)^2(1+b_1^2) + (\gamma+\delta)^2(1+b_1^2) + 2b_1(\gamma+\delta)(\alpha+\beta)\right] +$$
$$+\frac{P_2}{2\pi(1+b_2^2+b_2^4)}\left[(\beta^2+\delta^2)(1+b_2^2) + 2b_2\delta\beta\right]. \qquad \diamondsuit$$

1.4.2. Мінімаксний метод лінійної інтерполяції

Щоб користуватись формулами (1.174) – (1.177) і обчислювати спектральну характеристику та середньоквадратичну похибку оптимальної оцінки функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ потрібно знати спектральні щільності $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ стаціонарних процесів. Мінімаксний підхід до задач оцінювання доцільно застосовувати в тому випадку, коли точні значення щільностей невідомі, а відомо лише те, що вони є елементами деякого класу допустимих спектральних щільностей $D = D_F \times D_G$. Замість того, щоб шукати оцінку, яка була б оптимальною для деяких спектральних щільностей, ми шукаємо оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх спектральних щільностей з даного класу D.

Означення 1.5. *Для заданої множини пар спектральних щільностей* $D = D_F \times D_G$ *щільності* $F^0(\lambda) \in D_F, G^0(\lambda) \in D_G$ *називаються най-*

менш сприятливими, якщо виконується співвідношення:

$$\Delta\left(F^0, G^0\right) = \Delta\left(h\left(F^0, G^0\right); F^0, G^0\right) = \max_{(F,G)\in D} \Delta\left(h\left(F, G\right); F, G\right).$$

Означення 1.6. *Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_F \times D_G$ спектральна характеристика $h^0\left(e^{i\lambda}\right)$ називається мінімаксною (робастною), якщо*

$$h^0\left(e^{i\lambda}\right) \in H_D = \bigcap_{(F,G)\in D} L_2^{N-}\left(F + G\right),$$

$$\min_{h\in H_D} \max_{(F,G)\in D} \Delta\left(h; F, G\right) = \max_{(F,G)\in D} \Delta\left(h^0; F, G\right).$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 1.26. *Спектральні щільності $F^0(\lambda), G^0(\lambda)$, що задовольняють умову* (1.171), *найменш сприятливі в $D = D_F \times D_G$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$, якщо коефіцієнти Фур'є матричних функцій*

$$(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^{-1}, F^0(\lambda)(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^{-1}, F^0(\lambda)(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^{-1}G^0(\lambda)$$

задають B_N^0, D_N^0, R_N^0, які визначають розв'язок екстремальної задачі:

$$\max_{(F,G)\in D}(\left\langle B_N^{-1} D_N \boldsymbol{a}_N, D_N \boldsymbol{a}_N\right\rangle + \left\langle \boldsymbol{a}_N, R_N \boldsymbol{a}_N\right\rangle) =$$

$$= \left\langle (B_N^0)^{-1} D_N^0 \boldsymbol{a}_N\ ,\ D_N^0 \boldsymbol{a}_N\right\rangle + \left\langle \boldsymbol{a}_N, R_N^0 \boldsymbol{a}_N\right\rangle. \qquad (1.178)$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(F^0, G^0)$ можна обчислити за формулою (1.174) *за умови, що $h(F^0, G^0) \in H_D$.*

Теорема 1.27. *Спектральна щільність $F^0(\lambda) \in D_F$, що задовольняє умову мінімальності, є найменш сприятливою в D_F для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень $\boldsymbol{\xi}(j)$, $j \in Z\setminus\{0\dots N\}$, якщо коефіцієнти Фур'є матричної функції $[F^0(\lambda)]^{-1}$ задають B_N^0, яка визначає розв'язок задачі:*

$$\max_{F\in D_F} \left\langle (B_N^{-1} \boldsymbol{a}_N\ ,\ \boldsymbol{a}_N\right\rangle = \left\langle (B_N^0)^{-1} \boldsymbol{a}_N\ ,\ \boldsymbol{a}_N\right\rangle. \qquad (1.179)$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(F^0)$ можна обчислити за формулою (1.176) *за умови, що $h(F^0) \in H_D$.*

Найменш сприятливі щільності $F^0(\lambda), G^0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h\left(F^0, G^0\right)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; F, G)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки:

$$\Delta\left(h^0; F, G\right) \leq \Delta\left(h^0; F^0, G^0\right) \leq \Delta\left(h; F^0, G^0\right),$$

$$\forall h \in H_D, \forall F \in D_F, \forall G \in D_G$$

виконуються, якщо $h^0 = h(F^0, G^0)$, $h\left(F^0, G^0\right) \in H_D$ і $\left(F^0, G^0\right)$ є розв'язком задачі на умовний екстремум:

$$\sup_{(F,G)\in D} \Delta\left(h\left(F^0, G^0\right); F, G\right) = \Delta\left(h\left(F^0, G^0\right); F^0, G^0\right), \qquad (1.180)$$

де

$$\Delta(F,G) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A_N(e^{i\lambda})^\top G^0(\lambda) + C_N(e^{i\lambda})^\top)(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^{-1}F(\lambda)\times$$

$$\times(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^{-1}(A_N(e^{i\lambda})^\top G^0(\lambda) + C_N(e^{i\lambda})^\top)^* d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A_N(e^{i\lambda})^\top F^0(\lambda) - C_N(e^{i\lambda})^\top)(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^{-1}G(\lambda)\times$$

$$\times(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^{-1}(A_N(e^{i\lambda})^\top F^0(\lambda) - C_N(e^{i\lambda})^\top)^* d\lambda.$$

Таким чином задача про пошук мінімакса для функції $\Delta(h(F,G);F,G)$ зводиться до задачі на умовний екстремум функції $\Delta(h(F^0,G^0);F,G)$ на прямому добутку опуклих множин $D_F \times D_G$.

Справедливі такі твердження.

Теорема 1.28. *Нехай $\left(F^0, G^0\right)$ – розв'язок екстремальної задачі* (1.180)*. Спектральні щільності $F^0(\lambda), G^0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D = D_F \times D_G$, а спектральна характеристика $h^0 = h(F^0, G^0)$ мінімаксною для оптимального оцінювання $A_N\boldsymbol{\xi}$, якщо $h(F^0, G^0) \in H_D$.*

Теорема 1.29. *Спектральна щільність $F^0(\lambda) \in D_F$, що задовольняє умову мінімальності, є найменш сприятливою в D_F для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень $\boldsymbol{\xi}(j)$, $j < 0$, $j > N$, якщо $F^0(\lambda)$ є розв'язком екстремальної задачі:*

$$\sup_{F\in D_F} \Delta\left(h\left(F^0\right); F\right) = \Delta\left(h\left(F^0\right); F^0\right), \qquad (1.181)$$

де

$$\Delta\left(h\left(F^0\right);F\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} C_N^0(e^{i\lambda})^{\top}[F^0(\lambda)]^{-1}F(\lambda)[F^0(\lambda)]^{-1}\overline{C_N^0(e^{i\lambda})}d\lambda.$$

Спектральна характеристика $h^0 = h(F^0)$ є мінімаксною для оптимального оцінювання $A_N\boldsymbol{\xi}$, якщо $h(F^0)\in H_D$.

Задача на умовний екстремум (1.180) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [47]

$$\Delta_D(F,G)=-\Delta(h(F^0,G^0);F,G)+\delta\left((F,G)|D_F\times D_G\right)\to\inf, \quad (1.182)$$

де $\delta\left((F,G)|D_F\times D_G\right)$ – індикаторна функція множини $D_F\times D_G$. Розв'язок задачі (1.182) визначається умовою $0\in\partial\Delta_D(F^0,G^0)$, яка є необхідною та достатньою для того, щоб точка (F^0,G^0) належала множині мінімумів опуклої функції, де $\partial\Delta_D(F^0,G^0)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(F,G)$ в точці (F^0,G^0).

1.4.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі D_0^-

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень $\boldsymbol{\xi}(j)$, $j\in Z\backslash\{0,\dots,N\}$ за умови, що спектральна щільність $F(\lambda)$ векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ належить наступній множині:

$$D_0^-=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[F(\lambda)]^{-1}d\lambda=P\right\},$$

де $P=\{p_{ij}\}_{i,j=1}^T$ – задана матриця. З умови $0\in\partial\Delta_D(F^0)$ отримаємо наступне співвідношення для визначення найменш сприятливої спектральної щільності заданої множини

$$(F^0(\lambda)^{\top})^{-1}C_N^0(e^{i\lambda})(C_N^0(e^{i\lambda}))^*(F^0(\lambda)^{\top})^{-1}=(F^0(\lambda)^{\top})^{-1}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*(F^0(\lambda)^{\top})^{-1},$$

де $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_k\}_{k=1}^T$ – вектор невизначених множників Лагранжа. Звідси знаходимо, що коефіцієнти Фур'є матричної функції $[F^0(\lambda)]^{-1}$ задовольняють наступне рівняння:

$$\left(\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{c}(k)e^{ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{c}(k)e^{ik\lambda}\right)^*=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*, \quad (1.183)$$

де вектор $\boldsymbol{c}_N = \{\boldsymbol{c}(k)\}_{k=0}^{N}$ задовольняє рівняння

$$B_N^0 \boldsymbol{c}_N = \boldsymbol{a}_N,$$

матриця B_N^0 складається з коефіцієнтів Фур'є $R^0(k)$ функції $[F^0(\lambda)]^{-1}$:

$$B_N^0(k,j) = R^0(k-j)^{\top} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[(F^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top} e^{i(j-k)\lambda} d\lambda, k, j = \overline{0, N}.$$

Рівняння (1.183) та рівняння $B_N^0 \boldsymbol{c}_N = \boldsymbol{a}_N$ задовольняють коефіцієнти Фур'є

$$R(k) = R(-k), k = \overline{0, N},$$

які знайдені з рівняння

$$B\boldsymbol{\alpha}_N^0 = \boldsymbol{a}_N,$$

де $\boldsymbol{\alpha}_N^0 = (\boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{0},\ \ldots,\ \mathbf{0})$, або з рівняння

$$B\boldsymbol{\alpha}_0^N = \boldsymbol{a}_N,$$

де $\boldsymbol{\alpha}_0^N = (\mathbf{0},\ \ldots,\ \mathbf{0},\ \boldsymbol{\alpha})$. З першого рівняння знаходимо

$$R(k) = P\boldsymbol{a}(0)^{-1}\boldsymbol{a}(k)^{\top},$$

де $\boldsymbol{a}(0)^{-1}$ – вектор, що задовольняє рівняння

$$(\boldsymbol{a}(0)^{-1})^{\top} \cdot \boldsymbol{a}(0) = 1.$$

З другого рівняння знаходимо

$$R(k) = P\boldsymbol{a}(N)^{-1}\boldsymbol{a}(N-k)^{\top},$$

де $\boldsymbol{a}(N)^{-1}$ – вектор, що задовольняє рівняння

$$(\boldsymbol{a}(N)^{-1})^{\top} \cdot \boldsymbol{a}(N) = 1.$$

Рівність $R(0) = P$ є наслідком обмеження, що накладається на щільності заданого класу. Нехай векторна послідовність $\boldsymbol{a}(k), k = \overline{0, N}$ задана таким чином, що матрична функція

$$[F^0(\lambda)]^{-1} = \sum_{k=-N}^{N} R(k)e^{ik\lambda}$$

додатно визначена і має визначник не рівний тотожно нулю. Тоді матричну функцію можна представити у вигляді [55]

$$[F^0(\lambda)]^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{N} A_k e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N} A_k e^{-ik\lambda}\right)^*$$

Тому $[F^0(\lambda)]^{-1}$ – щільність стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку N, яка задається рівнянням:

$$\sum_{k=0}^{N} A_k \boldsymbol{\xi}(n-k) = \boldsymbol{\varepsilon}(n), \tag{1.184}$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}(n)$ – векторна послідовність білого шуму.

Мінімаксну спектральну характеристику $h(F^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ можна обчислити за формулою

$$h(F^0) = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{a}(k)e^{ik\lambda} - \left[(F^0(\lambda))^{-1}\right]^\top \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{c}(k)e^{ik\lambda} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{a}(k)e^{ik\lambda} - \sum_{k=-N}^{N} R(k)^\top e^{ik\lambda}\boldsymbol{c}(0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{a}(k)e^{ik\lambda} - \sum_{k=-N}^{N} R(k)^\top e^{ik\lambda}[P^\top]^{-1}\boldsymbol{a}(0) = -\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{a}(k)e^{-ik\lambda} \tag{1.185}$$

або за формулою

$$h(F^0) = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{a}(k)e^{ik\lambda} - \sum_{k=-N}^{N} R(k)^\top e^{ik\lambda} \cdot \left[P^\top\right]^{-1} \boldsymbol{a}(N)e^{iN\lambda} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{a}(N-k)e^{i(N+k)\lambda}. \tag{1.186}$$

Отже справедливе таке твердження.

Теорема 1.30. *Найменш сприятливою спектральною щільністю в класі D_0^- для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$, що визначається послідовністю $\boldsymbol{a}(k), k=\overline{0,N}$, заданою таким чином, що матрична функція $\sum_{k=-N}^{N} R(k)e^{ik\lambda}$, де*

$$R(k) = R(-k) = P\boldsymbol{a}(0)^{-1}\boldsymbol{a}(k)^\top,\ k=\overline{0,N},$$

або

$$R(k)=R(-k)=P\boldsymbol{a}(N)^{-1}\boldsymbol{a}(N-k)^{\top},\ k=\overline{0,N},$$

додатно визначена і має визначник не рівний тотожно нулю, є щільність стохастичної векторної послідовності авторегресії (1.184) *порядку N з коефіцієнтами Фур'є $R(k)$. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.185) *або* (1.186).

Приклад 1.12. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{a}(0)\boldsymbol{\xi}(0)$ за спостереженнями на множині $Z\backslash\{0\}$. Тоді:

$$F^0(\lambda)^{-1}=P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix}=A_0\cdot A_0^*,$$

де $A_0=\sqrt{P}$, за умови що

$$P_{11}>0,\ P_{22}>0,\ P_{11}P_{22}-|P_{12}|^2>0.$$

Тому $F^0(\lambda)$ – щільність векторної послідовності білого шуму:

$$F^0(\lambda)=P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{P_{22}}{D} & -\frac{P_{12}}{D} \\ -\frac{P_{21}}{D} & \frac{P_{11}}{D}\end{pmatrix},$$

де $D=P_{11}P_{22}-|P_{12}|^2$, що задається рівнянням:

$$\sqrt{P}\boldsymbol{\xi}(n)=\boldsymbol{\varepsilon}(n).$$

Тобто $\boldsymbol{\xi}(n)=(\sqrt{P})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(n)$ – найменш сприятлива послідовність для оцінювання одного пропущеного значення. ♢

1.4.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі D_M^-

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень $\boldsymbol{\xi}(j)$, $j\in Z\backslash\{0,\ldots,N\}$ за умови, що спектральна щільність $F(\lambda)$ векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ належить класу:

$$D_M^-=\left\{F(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[F(\lambda)]^{-1}\cos(m\lambda)d\lambda=P(m),\ m=\overline{0,M}\right.\right\},$$

де послідовність матриць $P(m)=P(-m)$, $m=\overline{0,M}$ задана таким чином, що матрична функція $\sum_{m=-M}^{M}P(m)e^{im\lambda}$ додатно визначена і має визначник не рівний тотожно нулю. З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0)$ знаходимо наступне рівняння для визначення найменш сприятливої спектральної щільності заданого класу:

$$(F^0(\lambda)^\top)^{-1}C_N^0(e^{i\lambda})(C_N^0(e^{i\lambda}))^*(F^0(\lambda)^\top)^{-1} =$$

$$= (F^0(\lambda)^\top)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{M}\boldsymbol{\alpha}(k)e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{M}\boldsymbol{\alpha}(k)e^{ik\lambda}\right)^*(F^0(\lambda)^\top)^{-1},$$

де $\boldsymbol{\alpha}(k),\ k=\overline{0,M}$ – невизначені множники Лагранжа. Звідси отримаємо таку рівність:

$$\left(\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{c}(k)e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{c}(k)e^{ik\lambda}\right)^* = \left(\sum_{k=0}^{M}\boldsymbol{\alpha}(k)e^{ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{M}\boldsymbol{\alpha}(k)e^{ik\lambda}\right)^*.$$

Нехай $M \geq N$. Тоді задані коефіцієнти Фур'є визначають матрицю B_N^0 і екстремальна задача вироджена. Покладемо

$$\boldsymbol{\alpha}(N+1) = \ldots = \boldsymbol{\alpha}(M) = \boldsymbol{0},$$

а $\boldsymbol{\alpha}(0),\ \ldots,\ \boldsymbol{\alpha}(N)$ знайдемо з рівняння

$$B_N^0\boldsymbol{\alpha}_N^0 = \boldsymbol{a}_N,$$

де $\boldsymbol{\alpha}_N^0 = (\boldsymbol{\alpha}(0),\ \ldots,\ \boldsymbol{\alpha}(N))^\top$. Тоді найменш сприятливою буде кожна щільність $F(\lambda) \in D_M^-$ і, як наслідок, щільність

$$(F^0(\lambda))^{-1} = \sum_{m=-M}^{M} P(m)e^{im\lambda} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{M}A_k e^{-ik\lambda}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{M}A_k e^{-ik\lambda}\right)^* \tag{1.187}$$

стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку M:

$$\sum_{k=0}^{M} A_k\boldsymbol{\xi}(n-k) = \boldsymbol{\varepsilon}(n).$$

Нехай $M < N$. Тоді матрицю B_N визначають відомі $P(m), m = \overline{0,M}$ та невідомі $P(m), m = \overline{M+1,N}$ коефіцієнти Фур'є функції $[F(\lambda)]^{-1}$. Невідомі $\boldsymbol{\alpha}(k)$, $k = \overline{0,M}$ та $P(m)$, $m = \overline{M+1,N}$ знаходимо з рівняння:

$$B_N\boldsymbol{\alpha}_M^0 = \boldsymbol{a}_N,$$

де $\boldsymbol{\alpha}_M^0 = (\boldsymbol{\alpha}(0), \ \ldots, \boldsymbol{\alpha}(M), \ \mathbf{0}, \ \ldots, \ \mathbf{0})$. Якщо знайдена послідовність $P(m) = P(-m), m = \overline{0, N}$ така, що матрична функція $\sum_{m=-N}^{N} P(m)e^{im\lambda}$ – додатно визначена і має визначник не рівний тотожно нулю, то найменш сприятлива спектральна щільність $F^0(\lambda)$ визначається коефіцієнтами Фур'є $P(m), m = \overline{0, N}$ функції $[F^0(\lambda)]^{-1}$:

$$[F^0(\lambda)]^{-1} = \sum_{m=-N}^{N} P(m)e^{im\lambda} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N} A_k e^{-ik\lambda}\right) \left(\sum_{k=0}^{N} A_k e^{-ik\lambda}\right)^* . \tag{1.188}$$

Отже, $F^0(\lambda)$ – щільність стохастичної векторної послідовності авторегресії порядкуN:

$$\sum_{k=0}^{N} A_k \boldsymbol{\xi}(n-k) = \boldsymbol{\varepsilon}(n).$$

Отже справедливе таке твердження.

Теорема 1.31. *Щільність* (1.187) *стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку M, що визначається коефіцієнтами $P(m)$, $m = \overline{0, M}$ найменш сприятлива в класі D_M^- для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ при $M \geq N$. Якщо $M < N$ і розв'язки $P(m) = P(-m), m = \overline{M+1, N}$ рівняння*

$$B_N \boldsymbol{\alpha}_M^0 = \boldsymbol{a}_N$$

разом із коефіцієнтами $P(m) = P(-m), m = \overline{0, M}$ утворюють додатно визначену матричну функцію $\sum_{m=-N}^{N} P(m)e^{im\lambda}$, що має визначник не рівний тотожно нулю, то найменш сприятливою в D_M^- є щільність (1.188) *стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку N. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.176).

1.4.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі D_V^U

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень $\boldsymbol{\xi}(j)$, $j \in Z \backslash \{0, \ldots, N\}$ за умови, що спектральна щільність $F(\lambda)$ векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ належить класу

$$D_V^U = \left\{ F(\lambda) | V(\lambda) \leq F(\lambda) \leq U(\lambda),\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F^{-1}(\lambda) d\lambda = P \right\},$$

де $V(\lambda), U(\lambda)$ – задані спектральні щільності. Такий клас описує „смугову" модель стохастичних послідовностей. З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0)$ знайдемо, що коефіцієнти Фур'є функції $[F^0(\lambda)]^{-1}$ задовольняють рівняння $B_N^0 \boldsymbol{c}_N = \boldsymbol{a}_N$ та рівняння

$$\left(\sum_{k=0}^{N} ((B_N^0)^{-1} \boldsymbol{a}_N)_k e^{ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{N} ((B_N^0)^{-1} \boldsymbol{a}_N)_k e^{ik\lambda} \right)^* = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \Psi_1(\lambda) + \Psi_2(\lambda),$$

де $\Psi_1(\lambda),\ \Psi_2(\lambda)$ – ермітові матриці, $\Psi_1(\lambda) \leq 0,\ \Psi_2(\lambda) \geq 0$ м.н. і
$\Psi_1(\lambda) = 0$ при $F^0(\lambda) > V(\lambda)$, $\Psi_2(\lambda) = 0$ при $F^0(\lambda) < U(\lambda)$. Тому при

$$V(\lambda) < F^0(\lambda) < U(\lambda)$$

функція $[F^0(\lambda)]^{-1}$ має вигляд

$$[F^0(\lambda)]^{-1} = \sum_{k=-N}^{N} R(k) e^{ik\lambda} = \left(\sum_{k=0}^{N} A_k e^{-ik\lambda} \right) \left(\sum_{k=0}^{N} A_k e^{-ik\lambda} \right)^*,$$

де

$$R(k) = P \boldsymbol{a}(0)^{-1} \boldsymbol{a}(k)^\top,$$

якщо вони задають коефіцієнти Фур'є додатно визначеної матричної функції, або

$$R(k) = P \boldsymbol{a}(N)^{-1} \boldsymbol{a}(N-k)^\top,$$

якщо матрична функція $[F^0(\lambda)]^{-1}$ з такими коефіцієнтами Фур'є додатно визначена. Найменш сприятливою в класі D_V^U буде щільність (1.184) стохастичної послідовності авторегресії порядку N, якщо виконується нерівність

$$V(\lambda) < \left[\sum_{k=-N}^{N} R(k) e^{ik\lambda} \right]^{-1} =$$

$$= \left[\left(\sum_{k=0}^{N} A_k e^{-ik\lambda} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{N} A_k e^{-ik\lambda} \right)^* \right]^{-1} < U(\lambda). \quad (1.189)$$

В загальному випадку найменш сприятлива спектральна щільність має вигляд

$$F^0(\lambda) = \max\left\{V(\lambda), \min\left\{U(\lambda), \left[\sum_{k=-N}^{N} R(k)e^{ik\lambda}\right]^{-1}\right\}\right\}, \qquad (1.190)$$

де $\max\{A, B\} = B$, якщо $B \geq A$, і нулю в іншому випадку; $\min\{A, B\} = B$, якщо $A \geq B$, і нулю в іншому випадку.

Отже справедливе таке твердження.

Теорема 1.32. *Якщо послідовність $\boldsymbol{a}(k), k = \overline{0, N}$ задає додатно визначену матричну функцію $\sum_{k=-N}^{N} R(k)e^{ik\lambda}$, де*

$$R(k) = R(-k) = P\boldsymbol{a}(0)^{-1}\boldsymbol{a}(k)^{\top}, k = \overline{0, N}$$

або

$$R(k) = R(-k) = P\boldsymbol{a}(N)^{-1}\boldsymbol{a}(N-k)^{\top}, k = \overline{0, N},$$

визначник якої не рівний тотожно нулю, і коефіцієнти $R(k)$ задовольняють нерівність (1.189)*, то найменш сприятливою в класі D_V^U для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ є щільність послідовності авторегресії* (1.184) *порядку N. Мінімаксна спектральна характеристика $h(F^0)$ обчислюється за формулою* (1.185) *чи* (1.186)*. Якщо ж нерівність* (1.189) *не виконується, то найменш сприятлива в D_V^U спектральна щільність визначається співвідношенням* (1.190) *та екстремальною умовою* (1.179)*. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.176)*.*

1.4.6. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{0,0}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j) + \boldsymbol{\eta}(j)$, $j \in Z\backslash\{0, \ldots, N\}$ за умови, що спектральні щільності $F(\lambda), G(\lambda)$ векторних стаціонарних послідовностей $\boldsymbol{\xi}(j), \boldsymbol{\eta}(j)$ належать класам $D_{0,0} = D_F^0 \times D_G^0$:

$$D_{0,0}^1 = \left\{(F(\lambda), G(\lambda)) | \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} F(\lambda)d\lambda = p, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} G(\lambda)d\lambda = q\right\},$$

$$D_{0,0}^2 = \left\{(F(\lambda), G(\lambda)) | \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda)d\lambda = p_k, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_{kk}(\lambda)d\lambda = q_k, k = \overline{1, T}\right\},$$

$$D_{0,0}^3=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\langle B_1,F(\lambda)\rangle\,d\lambda=p,\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\langle B_2,G(\lambda)\rangle\,d\lambda=q\right\},$$

$$D_{0,0}^4=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(\lambda)d\lambda=P,\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}G(\lambda)d\lambda=Q\right\}.$$

Використовуючи умову $0\in\partial\Delta_D(F^0,G^0)$ знайдемо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих щільностей $F^0(\lambda),G^0(\lambda)$ заданих множин відповідно:

$$(a^0(\lambda))^*a^0(\lambda)=\alpha^2(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^2, \tag{1.191}$$

$$(b^0(\lambda))^*b^0(\lambda)=\beta^2(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^2, \tag{1.192}$$

$$(a^0(\lambda))^*a^0(\lambda)=(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))\left\{\alpha_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}(F^0(\lambda)+G^0(\lambda)), \tag{1.193}$$

$$(b^0(\lambda))^*b^0(\lambda)=(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))\left\{\beta_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}(F^0(\lambda)+G^0(\lambda)); \tag{1.194}$$

$$(a^0(\lambda))^*a^0(\lambda)=\alpha^2(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))B_1^\top(F^0(\lambda)+G^0(\lambda)), \tag{1.195}$$

$$(b^0(\lambda))^*b^0(\lambda)=\beta^2(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))B_2^\top(F^0(\lambda)+G^0(\lambda)); \tag{1.196}$$

$$(a^0(\lambda))^*a^0(\lambda)=(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*(F^0(\lambda)+G^0(\lambda)), \tag{1.197}$$

$$(b^0(\lambda))^*b^0(\lambda)=(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^*(F^0(\lambda)+G^0(\lambda)), \tag{1.198}$$

де

$$a^0(\lambda)=A_N(e^{i\lambda})^\top G^0(\lambda)+C_N^0(e^{i\lambda})^\top, b^0(\lambda)=A_N(e^{i\lambda})^\top F^0(\lambda)-C_N^0(e^{i\lambda})^\top,$$

а $\alpha^2,\beta^2,\alpha_k^2,\beta_k^2,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ – невизначені множники Лагранжа.

Отже справедливе таке твердження.

Теорема 1.33. *Нехай матриці спектральних щільностей $F(\lambda)\in D_F^0$, $G(\lambda)\in D_G^0$ задовольняють умову* (1.171). *Матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ найменш сприятливі в класах $D_{0,0}=D_F^0\times D_G^0$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$, якщо вони задовольняють співвідношення* (1.191) – (1.198) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (1.178). *Функція $h(F^0,G^0)$ що обчислена за формулою* (1.174)*, є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$.*

Наслідок 1.5. *Нехай матриці спектральних щільностей $F(\lambda)\in D_F^0$ задовольняють умову мінімальності. Матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$ найменш сприятливі в класах D_F^0 для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ при $j\in Z\setminus\{0,\dots,N\}$, якщо вони задовольняють наступні співвідно-*

шення відповідно:

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})}\cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top=\alpha^2(F^0(\lambda))^2, \tag{1.199}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})}\cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top=F^0(\lambda)\left\{\alpha_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T F^0(\lambda), \tag{1.200}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})}\cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top=\alpha^2F^0(\lambda)B_1^\top F^0(\lambda), \tag{1.201}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})}\cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top=F^0(\lambda)\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*F^0(\lambda) \tag{1.202}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (1.179). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.176).

1.4.7. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_V^U\times D_\varepsilon$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання для множин матриць спектральних щільностей вигляду:

$$D_V^{U^1}=\left\{F(\lambda)|\operatorname{Tr}V(\lambda)\leq\operatorname{Tr}F(\lambda)\leq\operatorname{Tr}U(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Tr}F(\lambda)d\lambda=p\right\},$$

$$D_\varepsilon^1=\Bigg\{G(\lambda)|\operatorname{Tr}G(\lambda)=(1-\varepsilon)\operatorname{Tr}G_1(\lambda)+\varepsilon\operatorname{Tr}W(\lambda),$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Tr}G(\lambda)d\lambda=q\Bigg\};$$

$$D_V^{U^2}=\left\{F(\lambda)|v_{kk}(\lambda)\leq f_{kk}(\lambda)\leq u_{kk}(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{kk}(\lambda)d\lambda=p_k,\ k=\overline{1,T}\right\},$$

$$D_\varepsilon^2=\Bigg\{G(\lambda)|g_{kk}(\lambda)=(1-\varepsilon)g_{kk}^1(\lambda)+\varepsilon w_{kk}(\lambda),$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_{kk}(\lambda)d\lambda=q_k,\ k=\overline{1,T}\Bigg\};$$

$$D_V^{U^3}=\Bigg\{F(\lambda)|\left\langle B_1,V(\lambda\mathrm{Tr}\,)\right\rangle\leq\left\langle B_1,F(\lambda)\right\rangle\leq\left\langle B_1,U(\lambda)\right\rangle,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\langle B_1,F(\lambda)\right\rangle d\lambda=p\Bigg\},$$

$$D_\varepsilon^3=\Bigg\{G(\lambda)|\left\langle B_2,G(\lambda)\right\rangle=(1-\varepsilon)\left\langle B_2,G_1(\lambda)\right\rangle+\varepsilon\left\langle B_2,W(\lambda)\right\rangle,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\langle B_2,W(\lambda)\right\rangle d\lambda=q\Bigg\};$$

$$D_V^{U^4}=\left\{F(\lambda)|V(\lambda)\leq F(\lambda)\leq U(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(\lambda)d\lambda=P\right\},$$

$$D_\varepsilon^4=\left\{G(\lambda)|G(\lambda)=(1-\varepsilon)G_1(\lambda)+\varepsilon W(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}G(\lambda)d\lambda=Q\right\},$$

де $V(\lambda),U(\lambda),G_1(\lambda)$ – фіксовані матриці спектральних щільностей, $W(\lambda)$ – невідома матриця спектральних щільностей. Множини D_ε описують модель "ε-забруднення" стохастичних послідовностей, а множини D_V^U "смугову" модель стохастичних послідовностей.

З умови $0\in\partial\Delta_D(F^0,G^0)$ отримаємо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей заданих множин відповідно:

$$(a^0(\lambda))^*a^0(\lambda)=(\alpha^2+\gamma_1(\lambda)+\gamma_2(\lambda))(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^2,\tag{1.203}$$

$$(b^0(\lambda))^*b^0(\lambda)=(\beta^2+\gamma_3(\lambda))(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^2;\tag{1.204}$$

$$(a^0(\lambda))^*a^0(\lambda)=$$
$$=(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))\left\{(\alpha_k^2+\gamma_{1k}(\lambda)+\gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T(F^0(\lambda)+G^0(\lambda)),\tag{1.205}$$

$$(b^0(\lambda))^*b^0(\lambda)=$$
$$=(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))\left\{(\beta_k^2+\gamma_{3k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T(F^0(\lambda)+G^0(\lambda));\tag{1.206}$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) =$$
$$= (\alpha^2 + \gamma_1'(\lambda) + \gamma_2'(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) B_1^\top (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \quad (1.207)$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) = (\beta^2 + \gamma_3'(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) B_2^\top (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)); \quad (1.208)$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda))(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \quad (1.209)$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) = (F^0(\lambda) + G^0(\lambda))(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^* + \Gamma_3(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \quad (1.210)$$

де м.н.

$$a^0(\lambda) = A_N(e^{i\lambda})^\top G^0(\lambda) + C_N^0(e^{i\lambda})^\top,$$
$$b^0(\lambda) = A_N(e^{i\lambda})^\top F^0(\lambda) - C_N^0(e^{i\lambda})^\top,$$

$$\gamma_1(\lambda) \le 0, \gamma_1(\lambda) = 0 : \operatorname{Tr} F^0(\lambda) > \operatorname{Tr} V(\lambda),$$
$$\gamma_2(\lambda) \ge 0, \gamma_2(\lambda) = 0 : \operatorname{Tr} F^0(\lambda) < \operatorname{Tr} U(\lambda);$$
$$\gamma_3(\lambda) \le 0, \gamma_3(\lambda) = 0 : \operatorname{Tr} G^0(\lambda) > (1-\varepsilon) \operatorname{Tr} G_1(\lambda);$$

$$\gamma_{1k}(\lambda) \le 0, \gamma_{1k}(\lambda) = 0 : f_{kk}^0(\lambda) > v_{kk}(\lambda),$$
$$\gamma_{2k}(\lambda) \ge 0, \gamma_{2k}(\lambda) = 0 : f_{kk}^0(\lambda) < u_{kk}(\lambda),$$
$$\gamma_{3k}(\lambda) \le 0, \gamma_{3k}(\lambda) = 0 : g_{kk}^0(\lambda) > (1-\varepsilon) g_{kk}^1(\lambda);$$

$$\gamma_1'(\lambda) \le 0, \gamma_{13}(\lambda) = 0 : \langle B_1, F^0(\lambda)\rangle > \langle B_1, V(\lambda)\rangle;$$
$$\gamma_2'(\lambda) \ge 0, \gamma_{23}(\lambda) = 0 : \langle B_1, F^0(\lambda)\rangle < \langle B_1, U(\lambda)\rangle;$$
$$\gamma_3'(\lambda) \le 0, \gamma_{33}(\lambda) = 0 : \langle B_2, G^0(\lambda)\rangle > (1-\varepsilon)\langle B_2, G_1(\lambda)\rangle;$$

$$\Gamma_1(\lambda) \le 0, \Gamma_1(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) > V(\lambda);$$
$$\Gamma_2(\lambda) \ge 0, \Gamma_2(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) < U(\lambda),$$
$$\Gamma_3(\lambda) \le 0, \Gamma_3(\lambda) = 0 : G^0(\lambda) > (1-\varepsilon) G_1(\lambda).$$

Отже справедливе таке твердження.

Теорема 1.34. *Нехай матриці спектральних щільностей* $F(\lambda) \in D_V^U$, $G(\lambda) \in D_\varepsilon$ *задовольняють умову* (1.171). *Матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ *найменш сприятливі в класах* $D = D_V^U \times D_\varepsilon$ *для оптимальної інтерполяції функціонала* $A_N\boldsymbol{\xi}$ *якщо вони задовольняють співвідношення* (1.203) – (1.210) *і визначають розв'язок екстремальної* *задачі* (1.178). *Функція* $h(F^0, G^0)$ *що обчислена за формулою* (1.174), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_N\boldsymbol{\xi}$.

Наслідок 1.6. *Нехай матриці спектральних щільностей* $F(\lambda) \in D_V^U$, *задовольняють умову мінімальності. Матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda)$ *найменш сприятливі в класах* D_V^U *для оптимальної інтерполяції функціонала* $A_N\boldsymbol{\xi}$ *за даними спостережень послідовності* $\boldsymbol{\xi}(j)$ *при* $j \in Z\setminus\{0,\ldots,N\}$, *якщо вони задовольняють наступні співвідношення відповідно:*

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = (\alpha^2 + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda))(F^0(\lambda))^2, \tag{1.211}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = \\ = F^0(\lambda)\left\{(\alpha_k^2 + \gamma_{1k}(\lambda) + \gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T F^0(\lambda), \tag{1.212}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = (\alpha^2 + \gamma_1'(\lambda) + \gamma_2'(\lambda))F^0(\lambda)B_1^\top F^0(\lambda) \tag{1.213}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = F^0(\lambda)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda))F^0(\lambda) \tag{1.214}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (1.179). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.176).

Наслідок 1.7. *Нехай матриці спектральних щільностей* $F(\lambda) \in D_\varepsilon$ *задовольняють умову мінімальності. Матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda)$ *найменш сприятливі в класах* D_ε *для оптимальної інтерполяції функціонала* $A_N\boldsymbol{\xi}$ *за даними спостережень послідовності* $\boldsymbol{\xi}(j)$ *при* $j \in Z\setminus\{0,\ \ldots,\ N\}$ *якщо вони задовольняють наступні співвідношення відповідно:*

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = (\beta^2 + \gamma_3(\lambda))(F^0(\lambda))^2, \tag{1.215}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = F^0(\lambda)\left\{(\beta_k^2 + \gamma_{3k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T F^0(\lambda), \tag{1.216}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = (\beta^2 + \gamma_3'(\lambda))F^0(\lambda)B_2^\top F^0(\lambda), \tag{1.217}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = F^0(\lambda)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_3(\lambda))F^0(\lambda) \tag{1.218}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (1.179). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (1.176).

1.4.8. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D = D_{1\varepsilon_1} \times D_{2\varepsilon_2}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання для множин матриць спектральних щільностей вигляду:

$$D^1_{1\varepsilon_1} = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - F_1(\lambda)| \, d\lambda \le \varepsilon_1 \right\},$$

$$D^1_{2\varepsilon_2} = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{Tr}\,(G(\lambda) - G_1(\lambda)|^2 \, d\lambda \le \varepsilon_2 \right\};$$

$$D^2_{1\varepsilon_1} = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| f_{kk}(\lambda) - f^1_{kk}(\lambda) \right| d\lambda \le \varepsilon^1_k, \ k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D^2_{2\varepsilon_2} = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| g_{kk}(\lambda) - g^1_{kk}(\lambda) \right|^2 d\lambda \le \varepsilon^2_k, \ k = \overline{1,T} \right\};$$

$$D^3_{1\varepsilon_1} = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\langle B_1, F(\lambda) - F_1(\lambda) \rangle| \, d\lambda \le \varepsilon_1 \right\},$$

$$D^3_{2\varepsilon_2} = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\langle B_2, G(\lambda) - G_1(\lambda) \rangle|^2 \, d\lambda \le \varepsilon_2 \right\};$$

$$D^4_{1\varepsilon_1} = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| f_{ij}(\lambda) - f^1_{ij}(\lambda) \right| d\lambda \le \varepsilon^1_{ij}, \ i,j = \overline{1,T} \right\},$$

$$D^4_{2\varepsilon_2} = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| g_{ij}(\lambda) - g^1_{ij}(\lambda) \right|^2 d\lambda \le \varepsilon^2_{ij}, \ i,j = \overline{1,T} \right\},$$

де $F_1(\lambda)$, $G_1(\lambda)$ – задані матриці спектральних щільностей; ε_1, ε_2, ε^1_k, ε^2_k, $k = \overline{1,T}$ – задані числа; $E_1 = \left\{ \varepsilon^1_{ij} \right\}^T_{i,j=1}, E_2 = \left\{ \varepsilon^2_{ij} \right\}^T_{i,j=1}$ – задані симетричні матриці.

З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0, G^0)$ отримаємо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей заданих множин відповідно:

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) = \alpha^2 \gamma(\lambda)(F^0(\lambda) + G^0(\lambda))^2, \tag{1.219}$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) = \beta^2 \mathrm{Tr}\,(G^0(\lambda) - G_1(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda))^2; \tag{1.220}$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) \left\{\alpha_k^2 \gamma_k(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T} (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \quad (1.221)$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) \left\{\beta_k^2 (g_{kk}^0(\lambda) - g_{kk}^1(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T} (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)); \quad (1.222)$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) = \alpha^2 \gamma'(\lambda)(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) B_1^{\top} (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \quad (1.223)$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) =$$
$$= \beta^2 \left\langle B_2, G^0(\lambda) - G_1(\lambda)\right\rangle (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) B_2^{\top} (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)); \quad (1.224)$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) = (F^0(\lambda)+G^0(\lambda)) \left\{\alpha_{ij}\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^{T} (F^0(\lambda)+G^0(\lambda)), \quad (1.225)$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) \left\{\beta_{ij} (g_{ij}^0(\lambda) - g_{ij}^1(\lambda))\right\}_{i,j=1}^{T} (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \quad (1.226)$$

де

$$a^0(\lambda) = A_N(e^{i\lambda})^{\top} G^0(\lambda) + C_N^0(e^{i\lambda})^{\top},$$
$$b^0(\lambda) = A_N(e^{i\lambda})^{\top} F^0(\lambda) - C_N^0(e^{i\lambda})^{\top},$$

$$|\gamma(\lambda)| \leq 1,\ |\gamma'(\lambda)| \leq 1,\ |\gamma_k(\lambda)| \leq 1,\ |\gamma_{ij}(\lambda)| \leq 1,\ k = \overline{1,T},\ i,j = \overline{1,T},$$

$$\gamma(\lambda) = \mathrm{sign}(\mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda) - F_1(\lambda))):\ \mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda) - F_1(\lambda)) \neq 0,$$
$$\gamma_k(\lambda) = \mathrm{sign}(f_{kk}^0(\lambda) - f_{kk}^1(\lambda)):\ f_{kk}^0(\lambda) - f_{kk}^1(\lambda) \neq 0,\ k = \overline{1,T},$$
$$\gamma'(\lambda) = \mathrm{sign}\left\langle B_1, F^0(\lambda) - F_1(\lambda)\right\rangle:\ \left\langle B_1, F^0(\lambda) - F_1(\lambda)\right\rangle \neq 0,$$
$$\gamma_{ij}(\lambda) = \frac{f_{ij}^0(\lambda) - f_{ij}^1(\lambda)}{\left|f_{ij}^0(\lambda) - f_{ij}^1(\lambda)\right|}:\ f_{ij}^0(\lambda) - f_{ij}^1(\lambda) \neq 0,\ i,j = \overline{1,T}.$$

Невідомі множники $\alpha^2, \beta^2, \alpha_k^2, \beta_k^2, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, k = \overline{1,T}, i,j = \overline{1,T}$ визначаються з умов:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{Tr}\,(F(\lambda)-F_1(\lambda))|\,d\lambda=\varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{Tr}\,(G(\lambda)-G_1(\lambda))|^2\,d\lambda=\varepsilon_2; \tag{1.227}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_{kk}(\lambda)-f_{kk}^1(\lambda)\right|d\lambda=\varepsilon_k^1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_{kk}(\lambda)-g_{kk}^1(\lambda)\right|^2 d\lambda=\varepsilon_k^2, k=\overline{1,T}; \tag{1.228}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\langle B_1,F(\lambda)-F_1(\lambda)\rangle|\,d\lambda=\varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\langle B_2,G(\lambda)-G_1(\lambda)\rangle|\,d\lambda=\varepsilon_2; \tag{1.229}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_{ij}(\lambda)-f_{ij}^1(\lambda)\right|d\lambda=\varepsilon_{ij}^1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_{ij}(\lambda)-g_{ij}^1(\lambda)\right|^2 d\lambda=\varepsilon_{ij}^2, i,j=\overline{1,T}. \tag{1.230}$$

Отже справедливе таке твердження.

Теорема 1.35. *Нехай матриці спектральних щільностей $F(\lambda)\in D_{1\varepsilon_1}$, $G(\lambda)\in D_{2\varepsilon_2}$ задовольняють умову* (1.171). *Матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ найменш сприятливі в класах $D=D_{1\varepsilon_1}\times D_{2\varepsilon_2}$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$, якщо $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ задовольняють співвідношення* (1.219) – (1.230) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (1.178). *Функція $h(F^0,G^0)$, що обчислена за формулою* (1.174), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$.*

Наслідок 1.8. *Нехай матриці спектральних щільностей $F(\lambda)\in D_{1\varepsilon_1}$*

задовольняють умову мінімальності. Матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$ найменш сприятливі в класах $D_{1\varepsilon_1}$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ при $j \in Z\backslash\{0,\dots,N\}$, якщо вони задовольняють наступні співвідношення відповідно:

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = \alpha^2\gamma(\lambda)(F^0(\lambda))^2, \tag{1.231}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = F^0(\lambda)\left\{\alpha_k^2\gamma_k(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T F^0(\lambda), \tag{1.232}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = \alpha^2\gamma'(\lambda)F^0(\lambda)B_1^\top F^0(\lambda), \tag{1.233}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = F^0(\lambda)\left\{\alpha_{ij}(\lambda)\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^T F^0(\lambda) \tag{1.234}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (1.179). *Мінімаксна спектральна характеристика $h(F^0)$ оптимальної оцінки $A_N\boldsymbol{\xi}$ обчислюється за формулою* (1.176).

Наслідок 1.9. *Нехай матриці спектральних щільностей $F(\lambda) \in D_{2\varepsilon_2}$ задовольняють умову мінімальності. Матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$ найменш сприятливі в класах $D_{2\varepsilon_2}$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_N\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ при $j \in Z\backslash\{0,\dots,N\}$ якщо вони задовольняють наступні співвідношення відповідно:*

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = \beta^2\mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda) - G_1(\lambda))(F^0(\lambda))^2, \tag{1.235}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = F^0(\lambda)\left\{\beta_k^2(f_{kk}^0(\lambda) - g_{kk}^1(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T F^0(\lambda), \tag{1.236}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = \beta^2\left\langle B_2, F^0(\lambda) - G_1(\lambda)\right\rangle F^0(\lambda)B_2^\top F^0(\lambda), \tag{1.237}$$

$$\overline{C_N^0(e^{i\lambda})} \cdot C_N^0(e^{i\lambda})^\top = F^0(\lambda)\left\{\beta_{ij}(f_{ij}^0(\lambda) - g_{ij}^1(\lambda))\right\}_{i,j=1}^T F^0(\lambda) \tag{1.238}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (1.179). *Мінімаксна спектральна характеристика $h(F^0)$ оптимальної оцінки $A_N\boldsymbol{\xi}$ обчислюється за формулою* (1.176).

1.5. Висновки

У даному розділі вивчалися задачі екстраполяції, фільтрації та інтерполяції функціоналів від векторних стаціонарних послідовностей. Окремо розглядався випадок спектральної визначеності, коли матриці спектральних щільностей послідовностей відомі точно, та випадок спектральної невизначеності, коли матриці спектральних щільностей послідовностей точно невідомі, а задані лише певні обмеження у вигляді опуклих множин, яким вони мають задовольняти.

При дослідженні задач екстраполяції знайдені спектральні характеристики та середньоквадратичні похибки оптимальних лінійних оцінок функціоналів

$$A\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(j)^{\top}\boldsymbol{\xi}(j), A_N\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{a}(j)^{\top}\boldsymbol{\xi}(j)$$

від невідомих значень векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ за умови, що відома матриця спектральних щільностей $F(\lambda)$ стаціонарної послідовності, а також знайдені найменш сприятливі щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальних оцінок функціоналів в тому випадку, коли матриця спектральних щільностей послідовності точно невідома, але задана множина її можливих значень D.

При дослідженні задач фільтрації знайдено спектральну характеристику та середньоквадратичну похибку оптимальної лінійної оцінки функціонала

$$A\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(j)^{\top}\boldsymbol{\xi}(-j)$$

від невідомих значень векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ за даними спостережень послідовності $\boldsymbol{\xi}(j) + \boldsymbol{\eta}(j)$, де $\boldsymbol{\eta}(j)$ – некорельована із $\boldsymbol{\xi}(j)$ векторна стаціонарна послідовність (некорельований шум), за умови, що матриці спектральних щільностей послідовностей $F(\lambda), G(\lambda)$ відомі точно, а також розглянуто випадок спектральної невизначеності і знайдено найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальних лінійних оцінок функціоналу для різних заданих множин можливих значень щільностей.

При дослідженні задач інтерполяції отримані формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки функціоналу

$$A_N\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{a}(j)^{\top}\boldsymbol{\xi}(j)$$

від невідомих значень векторної стаціонарної послідовності $\boldsymbol{\xi}(j)$ за наявності некорельованого шуму $\boldsymbol{\eta}(j)$ для заданих матриць спектральних щільностей послідовностей, а також знайдено найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальних оцінок функціоналу у випадку спектральної невизначеності. Есі отримані результати проілюстровано на конкретних прикладах.

Розділ 2

ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ВЕКТОРНИХ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

2.1. Максимальне значення похибок оцінок функціоналів

У цьому підрозділі досліджується задача лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання функціоналів

$$A\boldsymbol{\xi} = \int_0^\infty \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(t)dt, \quad A_L\boldsymbol{\xi} = \int_0^L \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(t)dt$$

від невідомих значень векторного стохастичного процесу $\boldsymbol{\xi}(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1}^T$ з класу Ξ середньоквадратично неперервних векторних стаціонарних процесів рангу m $(1 \leq m \leq T)$, що задовольняють умови

$$E\boldsymbol{\xi}(t) = \{E\xi_k(t)\}_{k=1}^T = \mathbf{0}, \|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 = \sum_{k=1}^T E\,|\xi_k(t)|^2 \leq P, \tag{2.1}$$

за результатами спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ при $t < 0$. Знайдені максимальні значення величин середньоквадратичних похибок оптимальних лінійних оцінок функціоналів $A\boldsymbol{\xi}$ та $A_L\boldsymbol{\xi}$ від стаціонарних процесів з класу Ξ. Показано, що максимальну похибку дають стаціонарні процеси одностороннього рухомого середнього.

2.1.1. Мінімаксне значення похибки оцінки функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$

Припустимо, що елементи векторної функції $\boldsymbol{a}(t) = \{a_k(t)\}_{k=1}^T$ неперервні і задовольняють умови

$$\sum_{k=1}^T \int_0^L |a_k(t)|\,dt < \infty, \quad \int_0^L t\,\|\boldsymbol{a}(t)\|^2\,dt < \infty. \tag{2.2}$$

Позначимо через Λ_1 клас усіх лінійних оцінок функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$, що мають вигляд

$$\hat{A}_L\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{-\infty}^{0} \boldsymbol{c}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(t)dt, \tag{2.3}$$

де $\boldsymbol{c}(t) = \{c_k(t)\}_{k=1}^{T}$ – векторна комплекснозначна функція, яка визначає оцінку. Знайдемо максимальне значення величини похибки

$$\Delta_L = E\left|A_L\boldsymbol{\xi} - \hat{A}_L\boldsymbol{\xi}\right|^2$$

оцінки (2.3) за умови, що функція $\boldsymbol{c}(t)$ фіксована. Максимум будемо брати по всіх векторних стаціонарних процесах, які задовольняють умови (2.1). Для цього апроксимуємо функцію $\boldsymbol{a}(t)$ дискретною векторною функцією

$$\boldsymbol{a}_n(t) = \boldsymbol{a}(p/n) = \boldsymbol{a}_p,\ t \in [p/n, (p+1)/n).$$

Оскільки функція $\boldsymbol{a}(t)$ неперервна, $\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 \leq P$, та

$$\|A_L\boldsymbol{\xi} - A_L^n\boldsymbol{\xi}\| = \left\|\int\limits_0^L (\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{a}_n(t))^\top \boldsymbol{\xi}(t)dt\right\| \leq \int\limits_0^L \left\|(\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{a}_n(t))^\top \boldsymbol{\xi}(t)\right\| dt \leq$$

$$\leq P^{1/2} \sum_{k=1}^{T} \int\limits_0^L |a_k(t) - a_{nk}(t)|\ dt \to 0, n \to \infty,$$

то, замінивши $A_L\boldsymbol{\xi}$ на

$$A_L^n\boldsymbol{\xi} = \int\limits_0^L \boldsymbol{a}_n(t)^\top \boldsymbol{\xi}(t)dt,$$

ми допускаємо як завгодно малу похибку.

Позначимо через Λ – клас усіх лінійних оцінок функціонала $A_L^n\boldsymbol{\xi}$ за спостереженнями процесу при t<0, а через Λ_2 – клас усіх лінійних оцінок вигляду

$$\hat{A}_L^n\boldsymbol{\xi} = \sum_{p=-\infty}^{-1} \boldsymbol{c}(p)^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}}(p),$$

побудованих за даними векторної стохастичної послідовності, отриманої із векторного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за формулою

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(p) = n \int\limits_{p/n}^{(p+1)/n} \boldsymbol{\xi}(t)dt, \tag{2.4}$$

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}(p)\right\|^2 = \left\| n \int\limits_{p/n}^{(p+1)/n} \boldsymbol{\xi}(t)dt \right\|^2 \leq \left(n \int\limits_{p/n}^{(p+1)/n} \|\boldsymbol{\xi}(t)\| \, dt \right)^2 = P.$$

Позначимо через Ξ_D клас усіх дискретних векторних стаціонарних послідовностей (2.4), що задаються векторними стаціонарними процесами, а через Ξ_E – клас усіх дискретних векторних стаціонарних послідовностей (2.4), що задовольняють умову нормування:

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}(p)\right\|^2 = P.$$

Скориставшись позначеннями, можемо записати наступні оцінки

$$\min_{\Lambda} \max_{\Xi} \left\| A_L^n \boldsymbol{\xi} - \hat{A}_L^n \boldsymbol{\xi} \right\|^2 = \min_{\Lambda} \max_{\Xi} \Delta_L^n \leq \min_{\Lambda_1} \max_{\Xi} \Delta_L^n =$$

$$= \min_{\Lambda_2} \max_{\Xi_D} \Delta_L^n \leq \min_{\Lambda_2} \max_{\Xi_E} \Delta_L^n.$$

Скориставшись спектральним зображенням стаціонарної послідовності, можемо записати

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(p) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda p} Z(d\lambda),$$

де $Z(d\lambda) = \{Z_k(d\lambda)\}_{k=1}^{T}$ – випадкова векторна спектральна міра, що задає матричну спектральну міру $F(\lambda)$ послідовності $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(p)$:

$$F(\lambda) = \{F_{kl}(d\lambda)\}_{k,l=1}^{T} = \left\{ E Z_k(d\lambda) \overline{Z_l(d\lambda)} \right\}_{k,l=1}^{T},$$

елементи якої задовольняють наступні умови

$$F_{kk}(d\lambda) \geq 0, \ |F_{kl}(d\lambda)|^2 \leq F_{kk}(d\lambda) F_{ll}(d\lambda), \ k,l = \overline{1,T}.$$

Враховуючи це, отримаємо

$$\Delta_L^n = \left\| (1/n) \sum_{p=0}^{Ln-1} \boldsymbol{a}_p^{\top} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(p) - \sum_{p=-\infty}^{-1} \boldsymbol{c}(p)^{\top} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(p) \right\|^2 =$$

$$= \left\| \sum_{p=-\infty}^{Ln-1} \boldsymbol{b}(p)^{\top} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(p) \right\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{b}(\lambda)^{\top} F(d\lambda) \boldsymbol{b}(\lambda)^{*}.$$

Тут

$$\boldsymbol{b}(\lambda)=\sum_{p=-\infty}^{Ln-1}\boldsymbol{b}(p)e^{ip\lambda}=\sum_{p=0}^{Ln-1}(1/n)\boldsymbol{a}_p e^{ip\lambda}-\sum_{p=-\infty}^{-1}\boldsymbol{c}(p)e^{ip\lambda}.$$

Оскільки $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(p)\in\Xi_E$, то

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}(p)\right\|^2=\sum_{k=1}^{T}\left\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_k(p)\right\|^2=\sum_{k=1}^{T}\int_{-\pi}^{\pi}F_{kk}(d\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Tr}F(d\lambda)=P.$$

Отже,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{b}(\lambda)^\top F(d\lambda)\boldsymbol{b}(\lambda)^*\leq\int_{-\pi}^{\pi}\|\boldsymbol{b}(\lambda)\|^2\,\|F(d\lambda)\|\leq\max_{\lambda\in[-\pi,\pi]}\|\boldsymbol{b}(\lambda)\|^2\int_{-\pi}^{\pi}\|F(d\lambda)\|\,,$$

де

$$\|F(d\lambda)\|=\left(\sum_{k,l=1}^{T}|F_{kl}(d\lambda)|^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{k,l=1}^{T}F_{kk}(d\lambda)F_{ll}(d\lambda)\right)^{1/2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{T}F_{kk}(d\lambda)=\operatorname{Tr}F(\lambda).$$

Таким чином,

$$\max_{\Xi_E}\Delta_L^n=\max_{F(\lambda)}\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{b}(\lambda)^\top F(d\lambda)\boldsymbol{b}(\lambda)^*\leq P\max_{\lambda\in[-\pi,\pi]}\|\boldsymbol{b}(\lambda)\|^2\,.$$

Для того, щоб обчислити $\max\limits_{\lambda\in[-\pi,\pi]}\|\boldsymbol{b}(\lambda)\|^2$, скористаємося результатами з [12]. Розглянемо клас усіх регулярних при $|z|<1$ векторних степеневих рядів

$$\boldsymbol{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{\alpha}(n)z^n,$$

які розпочинаються із заданих N доданків

$$\sum_{n=0}^{N}\boldsymbol{d}(n)z^n.$$

Позначимо через μ_N^2 найбільше власне значення матриці H, що складена із блок-матриць

$$H = \{H(p,q)\}_{p,q=0}^{N}\,, \quad H(p,q) = \sum_{n=0}^{\min(p,q)} \boldsymbol{d}(p-n)\boldsymbol{d}(q-n)^*,\ p,q=\overline{0,N}.$$

Тоді

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}(n):n\geq N+1} \max_{|z|=1} \|\boldsymbol{f}(z)\|^2 = \mu_N^2.$$

Отже, для того, щоб оцінити $\min\limits_{\Lambda_2} \max\limits_{\Xi_E} \Delta_L^n$, потрібно визначити найбільше власне значення μ_{Ln}^2 – матриці, шо складена із блок-матриць вигляду

$$H(p,q) = (n)^{-2} \sum_{u=0}^{\min(p,q)} \boldsymbol{a}(T-(p-u+1)/n)\boldsymbol{a}(T-(q-u+1)/n)^*,$$

$$p,q=\overline{0,Ln-1}.$$

Таким чином,

$$\min_{\Lambda} \max_{\Xi} \Delta_L^n \leq \min_{\Lambda_2} \max_{\Xi_E} \Delta_L^n \leq P\mu_{Ln}^2. \tag{2.5}$$

Оскільки векторна функція $\boldsymbol{a}(t)$ неперервна, то при $p/n \to x, q/n \to y$ одержимо

$$\lim_{n\to\infty} nH(p,q) = \int\limits_0^{\min(x,y)} \boldsymbol{a}(L-x+u)\boldsymbol{a}(L-y+u)^* du = K_L(L-x,L-y).$$

Крім того, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{Ln}^2 = \nu_L^2$, де ν_L^2 – найбільше власне значення оператора K_L у гільбертовому просторі $L_2^T([0,L])$ – декартовому добутку гільбертових просторів $L_2([0,L])$, що визначений ядром $K_L(L-x,L-y)$. Тому

$$\min_{\Lambda} \max_{\Xi} \Delta_L \leq \nu_L^2 P. \tag{2.6}$$

2.1.2. Максимальне значення похибки оцінки функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$

Позначимо через Ξ_R клас регулярних векторних стаціонарних процесів, що задовольняють умови (2.1). Регулярний векторний стаціонарний процес допускає канонічне зображення

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t-u)d\boldsymbol{\eta}(u). \tag{2.7}$$

Тут $G(u) = \{G_{ij}(u)\}_{i=\overline{1,T}}^{j=\overline{1,m}}$ – матрична функція, а $\boldsymbol{\eta}(u) = \{\eta_k(u)\}_{k=1}^{m}$ – векторний стохастичний процес з ортогональними приростами:

$$E\boldsymbol{\eta}(ds)(\boldsymbol{\eta}(ds))^* = Eds,$$

де E – одинична матриця, m – ранг процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$. Регулярний векторний стаціонарний процес задається матричною функцією G(t) такою, що

$$\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 = \int\limits_{0}^{\infty} \|G(t)\|^2 \, dt = P. \tag{2.8}$$

У тому випадку, коли $\boldsymbol{a}(t) = \mathbf{0}$ при t>T, обмеження (2.8) має вигляд

$$\int\limits_{0}^{L} \|G(t)\|^2 \, dt = P.$$

Оптимальна оцінка невідомих значень процесу за спостереженнями $\boldsymbol{\xi}(t)$ при t<0 має вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} G(t-u)d\boldsymbol{\eta}(u). \tag{2.9}$$

Скориставшись (2.7) та (2.9), можна записати

$$\min_{\Lambda} \Delta_L = E\left|\int\limits_{0}^{L} \boldsymbol{a}(t)^\top[\boldsymbol{\xi}(t) - \hat{\boldsymbol{\xi}}(t)]dt\right|^2 = E\left|\int\limits_{0}^{L} \boldsymbol{a}(t)^\top \int\limits_{0}^{t} G(t-u)d\boldsymbol{\eta}(u)dt\right|^2 =$$

$$= \int\limits_{0}^{L}\int\limits_{0}^{L} \boldsymbol{a}(t)^\top \left(\int\limits_{0}^{\min(t,x)} G(t-u)G(x-u)^* du\right) \overline{a(x)}\, dt\, dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{L}\int\limits_{0}^{L} \boldsymbol{a}(t)^\top R(t,x)\overline{a(x)}\; dt\, dx,$$

де
$$R(t,x)=\int\limits_0^{\min(t,x)} G(t-u)G(x-u)^* du.$$
Використовуючи заміну $x=t-u$, $y=x-u$, одержимо співвідношеняя
$$\min_{\Lambda}\Delta_L=\int\limits_0^L\int\limits_0^L \langle K_L(x,y)G(x),G(y)\rangle\, dx\, dy,$$
де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярний добуток у просторі C^{Tm}, K_L – самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $L_2^T\left([0,L]\right)$, що заданий ядром
$$K_L(x,y)=\int\limits_0^{\min(L-x,L-y)} \boldsymbol{a}(x+u)\boldsymbol{a}(y+u)^* du.$$
Оскільки функція $\boldsymbol{a}(t)$ неперервна, то
$$N(K_L)=\left(\int\limits_0^L\int\limits_0^L \left\|K_L(x,y)\right\|^2 dxdy\right)^{1/2}\le\int\limits_0^L\int\limits_0^L \left\|\boldsymbol{a}(x+u)\right\|^2 dxdu=$$
$$=\int\limits_0^L x\left\|\boldsymbol{a}(x)\right\|^2 dx<\infty,$$
де $N(K_L)$ – норма Гільберта-Шмідта оператора K_L [1]. В силу нерівності
$$\|K_L\|\le N(K_L)$$
оператор K_L є неперервним оператором у просторі $L_2^T\left([0,L]\right)$. Тому екстремальна задача
$$|(K_LG,G)|\to\max,\ \|G\|=1$$
має розв'язок [48]. Розв'язком задачі є власний елемент оператора K_L. Відповідне власне значення ν_L^2 дорівнює
$$\max_{\|G\|=1}|(K_LG,G)|=\|K_L\|\,.$$
Оскільки
$$\max_{\Xi_R}\min_{\Lambda}\Delta_L=P\max_{\|G\|=1}\left(K_LG,G\right),$$

де через $(\cdot,\cdot)$ позначений скалярний добуток в $L_2^T([0,L])$, то

$$\max_{\Xi}\min_{\Lambda}\Delta_L \geq \max_{\Xi_R}\min_{\Lambda}\Delta_L = P\nu_L^2, \tag{2.10}$$

де ν_L^2 – найбільше власне значення оператора K_L. Враховуючи, що завжди

$$\max_{\Xi}\min_{\Lambda}\Delta_L \leq \min_{\Lambda}\max_{\Xi}\Delta_L,$$

а також (2.6) і (2.10), дістанемо

$$\max_{\Xi}\min_{\Lambda}\Delta_L = \min_{\Lambda}\max_{\Xi}\Delta_L = P\nu_L^2.$$

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови* (2.2). *Максимальне в класі Ξ значення величини похибки при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ дорівнює $P\nu_L^2$, де ν_L^2 – найбільше власне значення оператора K_L у просторі $L_2^T([0,L])$. Векторний стаціонарний процес $\boldsymbol{\xi}(t)$, що дає таку похибку при лінійному оцінюванні функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ – це процес одностороннього рухомого середнього*

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int_{t-L}^{t} G(t-u)d\boldsymbol{\eta}(u),$$

де матрична функція $G(u)$ визначається однозначно. У випадку мінімального рангу $m=1$ функція $G(u)$ є власною функцією оператора K_L, що відповідає найбільшому власному значенню ν_L^2 і задовольняє умову (2.8).

2.1.3. Максимінне та мінімаксне значення похибки оцінки $A\boldsymbol{\xi}$

Нехай векторна функція $\boldsymbol{a}(t)$ неперервна і задовольняє наступні умови

$$\sum_{k=1}^{T}\int_0^{\infty}|a_k(t)|\,dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} t\,\|\boldsymbol{a}(t)\|^2\,dt < \infty. \tag{2.11}$$

Обчислимо $\max\limits_{\Xi}\min\limits_{\Lambda}\Delta$. Нехай випадкові процеси належать класу Ξ_R. Тоді, як і в попередньому випадку, використовуючи канонічне зображення (2.7) процесу та вигляд (2.9) оптимальних лінійних оцінок невідомих значень процесу, дістанемо

$$\min_{\Lambda} \Delta = \min_{\Lambda} E \left| A\boldsymbol{\xi} - \hat{A}\boldsymbol{\xi} \right|^2 = E \left| \int_0^\infty \boldsymbol{a}(t)^\top \left[\boldsymbol{\xi}(t) - \hat{\boldsymbol{\xi}}(t) \right] dt \right|^2 =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \langle K(x,y)G(x), G(y) \rangle \, dx \, dy,$$

де K – самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $L_2^T([0,\infty])$, що заданий ядром

$$K(x,y) = \int_0^\infty \boldsymbol{a}(x+u)\boldsymbol{a}(y+u)^* du.$$

Крім того, він компактний за умови (2.11). Отже,

$$\max_{\Xi} \min_{\Lambda} \Delta \leq \max_{\Xi_R} \min_{\Lambda} \Delta = P\nu^2,$$

де ν^2 – найбільше власне значення оператора K.

Щоб оцінити $\min\limits_{\Lambda} \max\limits_{\Xi} \Delta$, апроксимуємо оператор K в $L_2^T([0,\infty])$ послідовністю операторів K_L, що задані ядрами

$$K_L(x,y) = \int_0^\infty \boldsymbol{a}_L(x+u)\boldsymbol{a}_L(y+u)^* du,$$

де $\boldsymbol{a}_L(t) = \boldsymbol{a}(t)$, коли $t \in [0, L]$ і $\boldsymbol{a}_L(t) = \boldsymbol{0}$ при $t > L$. Оскільки виконана умова (2.11), то

$$\lim_{L\to\infty} \|K_L - K\| = 0.$$

Тому [14, 15]

$$\lim_{L\to\infty} \nu_L^2 = \nu^2,$$

де ν_L^2, ν^2 – найбільші власні значення операторів K_L та K відповідно.

Отже справедливе таке твердження.

Теорема 2.2. *За умов* (2.11) *максимальне в класі* Ξ *значення величини похибки при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$ *за спостереженнями процесу при t<0 дорівнює* $P\nu^2$, *де* ν^2 *– найбільше власне значення оператора K у просторі* $L_2^T([0,\infty])$, *заданого ядром*

$$K(x,y) = \int_0^\infty \boldsymbol{a}(x+u)\boldsymbol{a}(y+u)^* du.$$

Векторний стаціонарний процес $\boldsymbol{\xi}(t)$, який дає таку похибку при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ – це процес векторного одностороннього рухомого середнього (2.7), де $G(u)$ однозначно визначається, а у випадку мінімального рангу і є власною функцією оператора K, що відповідає найбільшому власному значенню і задовольняє умову (2.8). Оптимальна лінійна оцінка функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ має вигляд

$$\hat{A}\boldsymbol{\xi} = \int_0^{\infty} \boldsymbol{a}(t) \int_{-\infty}^{0} G(t-u)d\boldsymbol{\eta}(u)dt.$$

Приклад 2.1. Розглянемо задачу оптимального оцінювання функціоналу $A_L\boldsymbol{\xi}$ від невідомих значень векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за результатами спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ при $t<0$. Нехай

$$L = P = 1,\ \boldsymbol{a}(t) = (1,\ 1).$$

Задача пошуку найбільшого власного значення ν^2 оператора K та власної функції

$$\boldsymbol{g}(u) = (g_1(u),\ g_2(u)),$$

що йому відповідає, зводиться до розв'язку наступного інтегрального рівняння

$$\int_0^1 K(x,y)g(x)dx = \lambda g(y),$$

де

$$K(x,y) = \min(1-x,\ 1-y),\ \nu^2 = 2\lambda,\ g_1(x) = g_2(x) = g(x).$$

Отже,

$$\lambda g(y) = (1-y)\int_0^y g(x)dx + \int_y^1 (1-x)g(x)dx.$$

Продиференціювавши дане інтегральне рівняння двічі, отримаємо звичайне диференціальне рівняння із заданими початковими умовами

$$\lambda g''(y) + g(y) = 0,\ g(1) = g'(0) = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$g(u) = Ae^{i\mu u} + Be^{-i\mu u},$$

де $\mu = \lambda^{-1/2}$. Використовуючи початкові умови, отримаємо

$$Ae^{i\mu} + Be^{-i\mu} = 0,\ A - B = 0.$$

Звідки $\cos\mu = 0$ або

$$\nu^2 = 2\lambda = 2\sqrt{2/\pi},\ g(u) = A\cos(\pi/2)u,$$

де константа A визначається умовою (2.8). Зокрема, у випадку мінімального рангу $m = 1$ маємо

$$G(u) = \boldsymbol{g}(u) = \cos(\pi/2)u \cdot (1,\ 1),$$

а у випадку максимального рангу $m = 2$

$$G(u) = 2^{-1/2}\cos(\pi/2)u \cdot I,$$

де I – матриця, елементами якої є одиниці. $\diamondsuit$

Приклад 2.2. Розглянемо задачу оптимального оцінювання функціоналу $A\boldsymbol{\xi}$ від невідомих значень векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за результатами спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ при $t < 0$. Нехай

$$P = 1,\ \boldsymbol{a}(t) = (e^{-\mu t},\ e^{-\mu t}).$$

Тоді умови (2.11), очевидно, виконуються, і аналогічно попередньому прикладу отримаємо таке інтегральне рівняння для визначення $\nu^2 = 2\lambda$ та $\boldsymbol{g}(u) = (g(u),\ g(u))$:

$$e^{-\lambda y}\mu^{-1}\int_0^\infty e^{-\mu x}g(x)dx = \lambda g(y).$$

Отже, функція g має вигляд $C\mu^{-1}e^{-\mu y}$, де невідома константа C визначається умовою нормування (2.8). Таким чином,

$$\nu^2 = 2\lambda = \mu^{-2},\ g(u) = C\mu^{-1}e^{-\mu u}.$$

Зокрема, у випадку мінімального рангу $m = 1$ маємо

$$G(u) = \mu^{1/2}e^{-\mu u}(1,\ 1),$$

а у випадку максимального рангу $m = 2$

$$G(u) = (\mu/2)^{1/2} e^{-\mu u} I.$$

Отже, найменш сприятливий в класі Ξ векторний стаціонарний процес мінімального рангу $\boldsymbol{\xi}(t)$ – це процес векторного одностороннього рухомого середнього, що має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mu^{1/2} e^{-\mu t} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\mu u} I \, d\eta(u),$$

де I – вектор, що складається з одиниць, $\eta(u)$ – стаціонарний процес з ортогональними приростами. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ дорівнює

$$\hat{A}\boldsymbol{\xi} = 2\mu^{1/2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\mu t} \left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\mu u} d\eta(u) \right].$$

У випадку максимального рангу аналогічно отримаємо

$$\boldsymbol{\xi}(t) = (\mu/2)^{1/2} e^{-\mu t} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\mu u} I \, d\boldsymbol{\eta}(u),$$

$$\hat{A}\boldsymbol{\xi} = 2\mu^{1/2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\mu t} \left[\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\mu u} d\eta_k(u) \right],$$

де I – матриця, елементами якої є одиниці, $\boldsymbol{\eta}(u) = \{\eta_k(u)\}_{k=1}^{2}$ – векторний стаціонарний процес з ортогональними приростами. Похибка при виборі оцінки у всіх випадках не перевищує величини μ^{-2}. Таке значення величини похибки має найменш сприятливий векторний стаціонарний процес. $\diamondsuit$

2.2. Екстраполяція функціоналів від стаціонарних процесів

У цьому підрозділі розв'язана задача оптимального лінійного оцінювання функціоналів

$$A\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{0}^{\infty} \boldsymbol{a}(t)^{\top} \boldsymbol{\xi}(t) dt, \quad A_L\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{0}^{L} \boldsymbol{a}(t)^{\top} \boldsymbol{\xi}(t) dt$$

від невідомих значень стаціонарного векторного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)=\{\boldsymbol{\xi}_k(t)\}_{k=1}^{T}$ за даними спостережень процесу при $t<0$.

Якщо спектральна щільність $F(\lambda)$ стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ відома точно, то до задачі оцінювання лінійних функціоналів доцільно застосовувати класичний метод А.М. Колмогорова, який базується на геометрії гільбертових просторів. У тому ж випадку, якщо відома лише множина можливих значень щільностей D, застосовується мінімаксний підхід до задачі оцінювання, тобто шукаються такі оцінки, які мінімізують максимальне значення величини похибки.

2.2.1. Класичний метод лінійної екстраполяції

Нехай векторна функція $\boldsymbol{a}(t)$, яка визначає функціонал $A\boldsymbol{\xi}$, задовольняє наступні умови

$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^{T} |a_k(t)|\, dt<\infty, \quad \int_0^\infty t\sum_{k=1}^{T} |a_k(t)|^2\, dt<\infty. \tag{2.12}$$

Тоді функціонал $A\boldsymbol{\xi}$ має скінчений другий момент. Нехай стаціонарний процес $\boldsymbol{\xi}(t)$ допускає канонічний розклад рухомого середнього [3]

$$\boldsymbol{\xi}(t)=\int_{-\infty}^{t} d(t-u)d\varepsilon(u), \tag{2.13}$$

де $d(u)=\{d_{ij}(u)\}_{i=\overline{1,T}}^{j=\overline{1,m}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(u)=\{\varepsilon_k(u)\}_{k=1}^{m}$ – векторний процес білого шуму:

$$E\,|\varepsilon_k(u)|^2=1,\ E\varepsilon_k(t)\overline{\varepsilon_j(s)}=0,\ k,j=\overline{1,T},\ t\neq s,\ k\neq j.$$

Тоді матриця спектральних щільностей $F(\lambda)=\{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$ стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ допускає канонічну факторизацію

$$F(\lambda)=\varphi(\lambda)\varphi^*(\lambda),\ \varphi(\lambda)=\int_0^\infty d(u)e^{-iu\lambda}d\lambda. \tag{2.14}$$

Позначимо через $L_2(F)$ гільбертів простір векторних комплекснозначних функцій $\boldsymbol{a}(\lambda)=\{a_k(\lambda)\}_{k=1}^{T}$ таких, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{a}(\lambda)^\top F(\lambda)\overline{\boldsymbol{a}(\lambda)}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k,l=1}^{T} a_k(\lambda)\overline{a_l(\lambda)}\, f_{kl}(\lambda)\, d\lambda<\infty.$$

Позначимо через $L_2^-(F)$ підпростір, породжений у просторі $L_2(F)$ функціями вигляду

$$e^{it\lambda}\delta_k,\ \delta_k = \{\delta_{kl}\}_{l=1}^{T},\ k=\overline{1,T},\ t<0.$$

Середньоквадратичну похибку лінійної оцінки $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ від векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за даними спостережень процесу при $t<0$ можна обчислити за формулою

$$\Delta(h,F) = E\left|A\boldsymbol{\xi} - \hat{A}\boldsymbol{\xi}\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(A(\lambda)-h(\lambda))^{\top}F(\lambda)\overline{(A(\lambda)-h(\lambda))}d\lambda,$$

де

$$A(\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty}\boldsymbol{a}(t)e^{it\lambda}dt,$$

$h(\lambda)$ – спектральна характеристика оцінки, що належить підпростору $L_2^-(F)$.

Якщо векторний стаціонарний процес $\boldsymbol{\xi}(t)$ допускає канонічний розклад (2.13), то оптимальна оцінка функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ визначається спектральною характеристикою $h(F)\in L_2^-(F)$ такою, що

$$\Delta(h(F),F) = \min_{h\in L_2^-(F)}\Delta(h,F) = \|Ad\|^2, \tag{2.15}$$

де

$$(Ad)(t) = \int\limits_{0}^{\infty}d(u)^{\top}\boldsymbol{a}(t+u)du, \quad \|Ad\|^2 = \int\limits_{0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}|(Ad)_k(t)|^2\,dt.$$

Зауважимо, що $\|Ad\|^2<\infty$ за виконання умов (2.12). Спектральна характеристика $h(F)$ обчислюється за формулою:

$$h(F) = A(\lambda) - \psi(\lambda)^{\top}r(\lambda), \quad r(\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty}(Ad)(t)e^{it\lambda}dt. \tag{2.16}$$

Тут $\psi(\lambda) = \{\psi_{ij}(\lambda)\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,T}}$ – матрична функція, що задовольняє рівняння:

$$\psi(\lambda)\varphi(\lambda) = E_m,$$

де E_m – одинична матриця порядку m.

Для функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ середньоквадратичну похибку та спектральну характеристику оптимальної оцінки можна визначити за формулами

$$\Delta_L(h(F), F) = \|A_L d\|^2, \tag{2.17}$$

$$h(F) = A_L(\lambda) - \psi(\lambda)^\top r_L(\lambda), \quad r_L(\lambda) = \int_0^T (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt, \tag{2.18}$$

де

$$(A_L d)(t) = \int_0^{L-t} d(u)^\top \boldsymbol{a}(t+u) du, \quad \|A_L d\|^2 = \int_0^L \sum_{k=1}^m |(A_L d)_k(t)|^2 \, dt.$$

Як наслідок, з формули (2.17) можна знайти таку формулу для обчислення середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки $\hat{\xi}_k(L)$ невідомого значення $\xi_k(L)$, $k = \overline{1, T}$:

$$E \left| \xi_k(L) - \hat{\xi}_k(L) \right|^2 = \int_0^L \sum_{l=1}^m |d_{kl}(t)|^2 \, dt. \tag{2.19}$$

Отже справджується така теорема.

Теорема 2.3. *Якщо виконуються умови* (2.12) *і щільність* $F(\lambda)$ *допускає канонічну факторизацію* (2.14)*, то середньоквадратичну похибку оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$ *за даними спостережень процесу* $\boldsymbol{\xi}(t)$ *при* $t < 0$ *можна обчислити за формулою* (2.15) *(за формулою* (2.17)*, коли оцінюється функціонал* $A_L\boldsymbol{\xi}$*). Спектральну характеристику оптимальної лінійної оцінки можна обчислити за формулою* (2.16) *(* (2.18) *для функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$*).*

Приклад 2.3. Розглянемо двовимірний процес $\boldsymbol{\zeta}(t) = (\zeta_1(t), \ \zeta_2(t))$, де $\zeta_1(t) = \xi(t)$ – стаціонарний випадковий процес із спектральною щільністю $f(\lambda)$, а $\zeta_2(t) = \xi(t) + \eta(t)$, де $\eta(t)$ – некорельований із $\xi(t)$ стаціонарний випадковий процес із спектральною щільністю $g(\lambda)$. Маємо матрицю спектральних щільностей

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f(\lambda) \\ f(\lambda) & f(\lambda) + g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Оціними функціонал

$$A_1\boldsymbol{\zeta} = \int_0^1 \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\zeta}(t) \, dt,$$

де $\boldsymbol{a}(t) = (e^{-at},\ e^{-bt})$, за даними спостережень $\boldsymbol{\zeta}(t)$, $t < 0$. Нехай $\xi(t)$, $\eta(t)$ – процеси Орнштейна–Угленбека зі щільностями

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_1^2 \alpha_1}{\pi\,(\alpha_1^2 + \lambda^2)}, \quad g(\lambda) = \frac{\sigma_2^2 \alpha_2}{\pi(\alpha_2^2 + \lambda^2)}.$$

Тоді $F(\lambda) = \varphi(\lambda)(\varphi(\lambda))^*$, де

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_0^\infty d(u) e^{-iu\lambda} d\lambda, \quad d(u) = \begin{pmatrix} A_1 e^{-\alpha_1 u} & 0 \\ A_1 e^{-\alpha_1 u} & A_2 e^{-\alpha_2 u} \end{pmatrix},$$

$$A_1^2 = \frac{\sigma_1^2 \alpha_1}{\pi}, \quad A_2^2 = \frac{\sigma_2^2 \alpha_2}{\pi}.$$

Спектральна характеристика оптимальної оцінки буде такою

$$h(\lambda) = (h_1\ ,\ h_2)^\top,\ h_1 = \frac{1 - e^{-(\alpha_1 + a)}}{\alpha_1 + a} + \frac{1 - e^{-(\alpha_1 + b)}}{\alpha_1 + b} - \frac{1 - e^{-(\alpha_2 + b)}}{\alpha_2 + b},$$

$$h_2 = \frac{1 - e^{-(\alpha_2 + b)}}{\alpha_2 + b}.$$

Отже оптимальна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1 \boldsymbol{\zeta} = h_1 \zeta_1(0) + h_2 \zeta_2(0).$$

Середньоквадратична похибка оптимальної оцінки обчислюється за формулою

$$\Delta_1 = \|A_1 d\|^2 = C(\alpha_1, a) + C(\alpha_1, b) + C(\alpha_2, b) + D(\alpha_1, a, b),$$

де

$$C(\alpha_k, b) = \frac{\sigma_k^2 \alpha_k}{\pi(\alpha_k + b)^2} \left(\frac{1 - e^{-2b}}{2b} + \frac{e^{-2b}(1 - e^{-2\alpha_k})}{2\alpha_k} - \frac{2e^{-b}(e^{-b} - e^{-\alpha_k})}{\alpha_k - b} \right),$$

$$D(\alpha_1, a, b) = \frac{2\sigma_1^2 \alpha_1}{\pi(\alpha_1 + a)(\alpha_1 + b)} \left(\frac{1 - e^{-(a+b)}}{a + b} - \frac{e^{-b}(e^{-a} - e^{-\alpha_1})}{\alpha_1 - a} - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{-a}(e^{-b} - e^{-\alpha_1})}{\alpha_1 - b} + e^{-(a+b)} \frac{e^{2\alpha_1} - 1}{2\alpha_1} \right).$$

Для функціонала $A\boldsymbol{\zeta}=\int_0^\infty \boldsymbol{a}(t)^\top\boldsymbol{\zeta}(t)dt$ аналогічно маємо

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\zeta}=h_1\zeta_1(0)+h_2\zeta_2(0),$$

де

$$h_1=\frac{1}{\alpha_1+a}+\frac{1}{\alpha_1+b}-\frac{1}{\alpha_2+b},\quad h_2=\frac{1}{\alpha_2+b}.$$

Середньоквадратична похибка обчислюється за формулою

$$\Delta=\frac{\sigma_1^2\alpha_1}{\pi}\left(\frac{1}{2a(\alpha_1+a)^2}+\frac{1}{2b(\alpha_1+b)^2}+\frac{2}{(a+b)(\alpha_1+a)(\alpha_1+b)}\right)+$$

$$+\frac{\sigma_2^2\alpha_2}{2b\pi(\alpha_2+b)^2}.$$

$\diamondsuit$

Приклад 2.4. Нехай у попередньому прикладі $\boldsymbol{a}(t)=(1-t\ ,\ 1)$. Тоді оптимальна оцінка функціонала $A_1\boldsymbol{\zeta}$ буде такою

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\zeta}=h_1\zeta_1(0)+h_2\zeta_2(0),$$

де

$$h_1=\left(1-\frac{1}{\alpha_1}\right)\frac{1-e^{-\alpha_1}}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1-e^{-\alpha_2}}{\alpha_2},\quad h_2=\frac{1-e^{-\alpha_2}}{\alpha_2}.$$

Середньоквадратична похибка обчислюється за формулою

$$\Delta_1=\frac{\sigma_1^2}{\pi\alpha_1}\left(\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)^2-\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)^2\frac{1-e^{-2\alpha_1}}{2\alpha_1}+\right.$$

$$\left.+2\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)\frac{1-e^{-\alpha_1}}{\alpha_1}-2\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1-e^{-\alpha_1}}{\alpha_1^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{\sigma_2^2}{\pi\alpha_2}\left(1+\frac{2e^{-\alpha_2}-3-e^{-2\alpha_2}}{2\alpha_2}\right).$$

$\diamondsuit$

Приклад 2.5. Нехай $\boldsymbol{a}(t)=(e^{-bt}\ ,\ 1-t)$. Тоді оптимальна оцінка функціонала $A_1\boldsymbol{\zeta}$ має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\zeta}=h_1\zeta_1(0)+h_2\zeta_2(0),$$

де

$$h_1=\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1-e^{-\alpha_1}}{\alpha_1^2}-\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1-e^{-\alpha_2}}{\alpha_2^2}+\frac{1-e^{-(\alpha_1+b)}}{\alpha_1+b},$$

$$h_2 = \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1-e^{-\alpha_2}}{\alpha_2^2}.$$

Середньоквадратична похибка оптимальної оцінки дорівнює

$$\Delta_1 = C(A_1,\alpha_1) + C(A_2,\alpha_2) + D(A_1,\alpha_1,b) + E(A_1,\alpha_1,b) + F(A_1,\alpha_1,b),$$

де

$$C(A_k,\alpha_k) = \frac{\sigma_k^2}{\pi\alpha_k}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1-2e^{-\alpha_k}}{\alpha_k^2} + \frac{1-e^{-2\alpha_k}}{2\alpha_k^3}\right),$$

$$D(A_1,\alpha_1,b) =$$
$$= \frac{\sigma_1^2\alpha_1}{\pi(\alpha_1+b)}\left(\frac{1-e^{-2b}}{2b} + e^{-2(\alpha_1+b)}\frac{e^{2\alpha_1}-1}{2\alpha_1} - \; -2e^{-(\alpha_1+b)}\frac{e^{\alpha_1-b}-1}{\alpha_1-b}\right),$$

$$E(A_1,\alpha_1,b) = \frac{2\sigma_1^2}{\alpha_1\pi(\alpha_1+b)}\left(e^{-\alpha_1}\frac{e^{\alpha_1-b}-1}{\alpha_1-b} - e^{-(2\alpha_1+b)}\frac{e^{2\alpha_1}-1}{2\alpha_1}\right),$$

$$F(A_1,\alpha_1,b) =$$
$$= \frac{2\sigma_1^2}{\pi(\alpha_1+b)}\left[e^{-b}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\alpha_1}\right) - \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1-e^{-b}}{b} - e^{-(\alpha_1+b)}\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}\right)\right]. \quad \diamondsuit$$

2.2.2. Мінімаксний метод лінійної екстраполяції

Формулами (2.12) – (2.19) можна користуватись лише тоді, коли відома матриця спектральних щільностей $F(\lambda)$ векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$. Якщо ж матриця спектральних щільностей невідома, проте визначена множина D можливих щільностей, то застосовують мінімаксний підхід до задач оцінювання функціоналів від невідомих значень стаціонарного процесу. Замість того, щоб шукати оцінку, яка є оптимальною для деякої матриці спектральних щільностей, шукають оцінку, що мінімізує величину середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу.

Означення 2.1. *Спектральна щільність $F^0(\lambda)$ називається найменш сприятливою в класі D для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо виконуються співвідношення:*

$$\Delta(h(F^0),F^0) = \max_{F\in D}\Delta(h(F),F) = \max_{F\in D}\min_{h\in L_2^-(F)}\Delta(h,F).$$

Враховуючи співвідношення (2.12) – (2.19), можна переконатись, що вірні такі твердження.

Теорема 2.4. *Спектральна щільність $F^0(\lambda) \in D$ найменш сприятлива в класі D для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо вона допускає канонічну факторизацію*

$$F^0(\lambda) = \left(\int\limits_0^\infty d^0(t)e^{-it\lambda}dt\right) \cdot \left(\int\limits_0^\infty d^0(t)e^{-it\lambda}dt\right)^*,$$

де $d^0(t)$ – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\|Ad\|^2 \to \max,\ F(\lambda) = \left(\int\limits_0^\infty d(t)e^{-it\lambda}dt\right) \cdot \left(\int\limits_0^\infty d(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* \in D. \quad (2.20)$$

Теорема 2.5. *Спектральна щільність $F^0(\lambda) \in D$ найменш сприятлива в класі D для оптимальної екстраполяції функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$, якщо вона допускає канонічну факторизацію*

$$F^0(\lambda) = \left(\int\limits_0^L d^0(t)e^{-it\lambda}dt\right) \cdot \left(\int\limits_0^L d^0(t)e^{-it\lambda}dt\right)^*,$$

де $d^0(t)$, $0 \leq t \leq L$ – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\|A_L d\|^2 \to \max,\ F(\lambda) = \left(\int\limits_0^L d(t)e^{-it\lambda}dt\right) \cdot \left(\int\limits_0^L d(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* \in D. \quad (2.21)$$

Стаціонарний процес $\boldsymbol{\xi}(t)$ в такому разі допускає канонічний розклад рухомого середнього

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int\limits_{t-L}^{t} d(t-u)d\varepsilon(u). \quad (2.22)$$

Означення 2.2. *Спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ називається мінімаксною (робастною), якщо виконуються умови*

$$h^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{F \in D} L_2^-(F), \quad \min_{h \in H_D} \max_{F \in D} \Delta(h, F) = \max_{F \in D} \Delta(h^0, F).$$

Найменш сприятлива спектральна щільність $F^0(\lambda) \in D$ та мінімаксна (робастна) спектральна характеристика $h^0(\lambda) \in H_D$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h, F)$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h, F^0) \geq \Delta(h^0, F^0) \geq \Delta(h^0, F), \ \forall F \in D, \ \forall h \in H_D$$

виконуються, коли $h^0 = h(F^0) \in H_D$, де F^0– розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\Delta(h(F^0), F^0) = \max_{F \in D} \Delta(h(F^0), F).$$

Якщо ми знайшли розв'язок F^0 цієї задачі, то мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулами (2.16), (2.18) за умови, що $h(F^0) \in H_D$. Щільність $F^0(\lambda)$ є розв'язком такої задачі на умовний екстремум

$$\Delta(F) = -\Delta(h(F^0), F) \to \inf, \ F(\lambda) \in D, \tag{2.23}$$

$$\Delta(h(F^0), F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda)^\top \psi^0(\lambda) F(\lambda) (\psi^0(\lambda))^* \overline{r(\lambda)} d\lambda,$$

де $r(\lambda)$ обчислюється за формулами (2.16), (2.18) при $F(\lambda) = F^0(\lambda)$.

Задача на умовний екстремум (2.23) еквівалентна такій задачі на безумовний екстремум [47]

$$\Delta_D(F) = -\Delta(h(F^0), F) + \delta(F|D) \to \inf, \tag{2.24}$$

де $\delta(F|D)$ – індикаторна функція множини D. Розв'язок задачі (2.24) характеризується умовою $0 \in \partial\Delta_D(F^0)$, де $\partial\Delta_D(F^0)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(F)$ в точці F^0. Користуючись співвідношеннями (2.23), (2.24) можна знайти найменш сприятливі спектральні щільності для конкретних класів спектральних щільностей.

2.2.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах D_0

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\boldsymbol{\xi}$ та $A_L\boldsymbol{\xi}$ від векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ для наступних множин спектральних щільностей:

$$D_0^1 = \left\{ F(\lambda) | \, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} F(\lambda) d\lambda = p \right\},$$

$$D_0^2 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_0^3 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle B, F(\lambda) \rangle \, d\lambda = p \right\},$$

$$D_0^4 = \left\{ F(\lambda) | \, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d\lambda = P \right\},$$

де $p, p_k, k = \overline{1,T}$ – задані числа, B, P – задані додатно визначені ермітові матриці. З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0)$ знайдемо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей $F^0(\lambda)$ заданих множин відповідно

$$\psi^0(\lambda)^\top r(\lambda) \, (r(\lambda))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \alpha^2 E,$$

$$\psi^0(\lambda)^\top r(\lambda)(r(\lambda))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \left\{ \alpha_k^2 \delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^T,$$

$$\psi^0(\lambda)^\top r(\lambda)(r(\lambda))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \alpha^2 B,$$

$$\psi^0(\lambda)^\top r(\lambda)(r(\lambda))^* \overline{\psi^0(\lambda)} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^*,$$

де $\alpha^2, \alpha_k^2, \boldsymbol{\alpha}$ – невизначені множники Лагранжа. Дані співвідношення можна переписати наступним чином

$$\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t) e^{it\lambda} dt \right) \left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t) e^{it\lambda} dt \right)^* = \alpha^2 \varphi^0(\lambda)^\top \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{2.25}$$

$$\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t) e^{it\lambda} dt \right) \left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t) e^{it\lambda} dt \right)^* = \varphi^0(\lambda)^\top \left\{ \alpha_k^2 \delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{2.26}$$

$$\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t) e^{it\lambda} dt \right) \left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t) e^{it\lambda} dt \right)^* = \alpha^2 \varphi^0(\lambda)^\top B \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{2.27}$$

$$\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t) e^{it\lambda} dt \right) \left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t) e^{it\lambda} dt \right)^* = \varphi^0(\lambda)^\top \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* \overline{\varphi^0(\lambda)}. \tag{2.28}$$

Невідомі $\alpha^2, \alpha_k^2, \boldsymbol{\alpha}$ та $d(t), t \geq 0$ обчислюємо, користуючись рівнянням канонічної факторизації (2.14) щільності $F^0(\lambda)$, умовою (2.20) та обмеженнями, що накладаються на щільності відповідних множин.

Для всіх розв'язків $\{d(t), t \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \overline{\boldsymbol{a}(t+v)} \boldsymbol{a}(u+v)^\top d(u) du dv = \alpha^2 d(t), \tag{2.29}$$

таких, що задовольняють умову

$$\|d\|^2 = \int_0^\infty \sum_{k=1}^T \sum_{n=1}^m |d_{kn}(t)|^2 \, dt = p, \tag{2.30}$$

виконується рівність (2.25).

Для всіх розв'язків $\{d(t), t \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \overline{\boldsymbol{a}(t+v)} \boldsymbol{a}(u+v)^\top d(u) du dv = \left\{\alpha_k^2 \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T d(t), \tag{2.31}$$

таких, що задовольняють умову

$$\|d_k\|^2 = \int_0^\infty \sum_{n=1}^m |d_{kn}(t)|^2 \, dt = p_k, k = \overline{1,T}, \tag{2.32}$$

виконується рівність (2.26).

Для всіх розв'язків $\{d(t), t \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \overline{\boldsymbol{a}(t+v)} \boldsymbol{a}(u+v)^\top d(u) du dv = \alpha^2 B^\top d(t), \tag{2.33}$$

таких, що задовольняють умову

$$\left\langle B, \int_0^\infty d(t)(d(t))^* dt \right\rangle = p, \tag{2.34}$$

виконується рівність (2.27).

Для всіх розв'язків $\{d(t), t \geq 0\}$ системи рівнянь

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \overline{\boldsymbol{a}(t+v)} \boldsymbol{a}(u+v)^\top d(u) du dv = \overline{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\alpha}^\top d(t), \tag{2.35}$$

таких, що задовольняють умову

$$\int_0^{\infty} d(t)(d(t))^* dt = P, \tag{2.36}$$

виконується рівність (2.28).

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.6. *Якщо існує така матрична функція* $\left\{d^0(t), t \geq 0\right\}$, *що задовольняє рівняння* (2.29) *та умову* (2.30), *то щільність*

$$F^0(\lambda) = \left(\int_0^{\infty} d^0(t) e^{-it\lambda} dt\right) \left(\int_0^{\infty} d^0(t) e^{-it\lambda} dt\right)^* \tag{2.37}$$

найменш сприятлива в класі D_0^1 *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$. *Якщо існує матрична функція* $\left\{d^0(t), t \geq 0\right\}$, *що задовольняє рівняння* (2.31) *та умову* (2.32), *то щільність* (2.37) *найменш сприятлива в класі* D_0^2 *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$. *Якщо матрична функція* $\left\{d^0(t), t \geq 0\right\}$ *задовольняє рівняння* (2.33) *та умову* (2.34), *то щільність* (2.37) *найменш сприятлива в класі* D_0^3 *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$. *Якщо матрична функція* $\left\{d^0(t), t \geq 0\right\}$ *задовольняє рівняння* (2.35) *та умову* (2.36), *то щільність* (2.37) *найменш сприятлива в класі* D_0^4 *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$. *Стаціонарний процес* $\boldsymbol{\xi}(t)$ *допускає розклад рухомого середнього* (2.13). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.16).

Для функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ співвідношення (2.25) – (2.28) мають вигляд

$$\left(\int_0^{L} (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right) \left(\int_0^{L} (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right)^* = \alpha^2 \varphi^0(\lambda)^\top \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{2.38}$$

$$\left(\int_0^{L} (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right) \left(\int_0^{L} (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_k^2 \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T} \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{2.39}$$

$$\left(\int_0^{L} (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right) \left(\int_0^{L} (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right)^* = \alpha^2 \varphi^0(\lambda)^\top B \overline{\varphi^0(\lambda)}, \tag{2.40}$$

$$\left(\int_0^L (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right) \left(\int_0^L (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right)^* = \varphi^0(\lambda)^\top \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* \overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (2.41)$$

Для всіх розв'язків $\{d(t), 0 \le t \le L\}$ системи рівнянь

$$\int_0^{L-t} \int_0^{L-v} \overline{\boldsymbol{a}(t+v)} \boldsymbol{a}(u+v)^\top d(u) du dv = \alpha^2 d(t), \quad (2.42)$$

таких, що задовольняють умову

$$\|d\|_L^2 = \int_0^L \sum_{k=1}^T \sum_{n=1}^m |d_{kn}(t)|^2 dt = p, \quad (2.43)$$

виконується рівність (2.38).

Для всіх розв'язків $\{d(t), 0 \le t \le L\}$ системи рівнянь

$$\int_0^{L-t} \int_0^{L-v} \overline{\boldsymbol{a}(t+v)} \boldsymbol{a}(u+v)^\top d(u) du dv = \left\{\alpha_k^2 \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T d(t), \quad (2.44)$$

таких, що задовольняють умову

$$\|d_k\|_L^2 = \int_0^L \sum_{n=1}^m |d_{kn}(t)|^2 dt = p_k, k = \overline{1,T}, \quad (2.45)$$

виконується рівність (2.39).

Для всіх розв'язків $\{d(t), 0 \le t \le L\}$ системи рівнянь

$$\int_0^{L-t} \int_0^{L-v} \overline{\boldsymbol{a}(t+v)} \boldsymbol{a}(u+v)^\top d(u) du dv = \alpha^2 B^\top d(t), \quad (2.46)$$

таких, що задовольняють умову

$$\left\langle B, \int_0^L d(t)(d(t))^* dt \right\rangle = p, \quad (2.47)$$

виконується рівність (2.40).

Для всіх розв'язків $\{d(t), 0 \le t \le L\}$ системи рівнянь

$$\int_0^{L-t} \int_0^{L-v} \overline{\boldsymbol{a}(t+v)} \boldsymbol{a}(u+v)^\top d(u) du dv = \overline{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\alpha}^\top d(t), \quad (2.48)$$

таких, що задовольняють умову

$$\int_0^L d(t)(d(t))^* dt = P, \qquad (2.49)$$

виконується рівність (2.41).

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.7. *Якщо існує матрична функція* $\left\{d^0(t), 0 \le t \le L\right\}$*, що задовольняє рівняння* (2.42) *та умову* (2.43)*, то щільність*

$$F^0(\lambda) = \left(\int_0^L d^0(t) e^{-it\lambda} dt\right) \left(\int_0^L d^0(t) e^{-it\lambda} dt\right)^* \qquad (2.50)$$

найменш сприятлива в класі D_0^1 *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$*. Якщо існує матрична функція* $\left\{d^0(t), 0 \le t \le L\right\}$*, що задовольняє рівняння* (2.44) *та умову* (2.45)*, то щільність* (2.50) *найменш сприятлива в класі* D_0^2 *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$*. Якщо існує матрична функція* $\left\{d^0(t), 0 \le t \le L\right\}$*, що задовольняє рівняння* (2.46) *та умову* (2.47)*, то щільність* (2.50) *найменш сприятлива в класі* D_0^3 *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$*. Якщо існує матрична функція* $\left\{d^0(t), 0 \le t \le L\right\}$*, що задовольняє рівняння* (2.48) *та умову* (2.49)*, то щільність* (2.50) *найменш сприятлива в класі* D_0^4 *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$*. Стаціонарний процес* $\boldsymbol{\xi}(t)$ *допускає розклад рухомого середнього* (2.22)*. Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$ *обчислюється за формулою* (2.18)*.*

Приклад 2.6. Розглянемо задачу оцінювання функціонала

$$A_1\boldsymbol{\xi} = \int_0^1 \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(t) dt$$

від невідомих значень векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за результатами спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ при $t < 0$. Найменш сприятливою в класі D_0^1 для оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A_1\boldsymbol{\xi}$ є щільність

$$F(\lambda) = \left(\int_0^1 d(t) e^{-it\lambda} dt\right) \cdot \left(\int_0^1 d(t) e^{-it\lambda} dt\right)^*,$$

де функція $d = d(t)$, $0 \le t \le 1$ є розв'язком задачі на умовний екстремум:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\min(x,y)} \boldsymbol{a}(y)^\top d(y-u)(d(x-u))^* \overline{\boldsymbol{a}(x)} dy dx \to \max,$$

$$\|d\|_1^2 = \int_0^1 \sum_{k=1}^T \sum_{n=1}^m |d_{kn}(t)|^2 \, dt = p.$$

Нехай $\boldsymbol{a}(t) = (1\ ,\ 1)$, p=1. Тоді, використовуючи систему рівнянь (2.42), у випадку мінімального рангу $m = 1$, отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$\alpha^2 d_1(y) = \alpha^2 d_2(y) = \int_0^1 \min(1-x, 1-y)(d_1(x) + d_2(x)) dx.$$

Отже,

$$\alpha^2 d_1(y) = \alpha^2 d_2(y) = (1-y) \int_0^y (d_1(x)+d_2(x)) dx + \int_y^1 (1-x)(d_1(x)+d_2(x)) dx.$$

Продиференціювавши дане інтегральне рівняння двічі, отримаємо звичайне диференціальне рівняння із заданими початковими умовами:

$$(\alpha^2/2) d_1''(y) + d_1(y) = 0,\ d_1(1) = d_1'(0) = 0,\ d_2(y) = d_1(y),$$

розв'язок якого має вигляд

$$d_1(y) = d_2(y) = Ae^{i\mu y} + Be^{-i\mu y},$$

де $\mu = (\alpha^2/2)^{-1/2}$. Використовуючи початкові умови, отримаємо

$$Ae^{i\mu} + Be^{-i\mu},\ A - B = 0.$$

Звідси $\cos\mu = 0$ або $\alpha^2 = 8/\pi^2$ і

$$d(t) = \cos(\pi/2)t \cdot (1,\ 1)^\top.$$

Аналогічно, у випадку максимального рангу $m = 2$, отримаємо

$$d(t) = 2^{-1/2} \cos(\pi/2)t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, найменш сприятливий стаціонарний процес має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int\limits_{t-1}^{t} \cos((\pi/2)(t-u))d\varepsilon(u) \cdot (1,\ 1)^{\top}$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\boldsymbol{\xi}(t) = 2^{-1/2} \int\limits_{t-1}^{t} \cos((\pi/2)(t-u)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon}(u)$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = 2\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{t-1}^{0} \cos((\pi/2)(t-u))d\varepsilon(u)dt$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = 2^{1/2}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{t-1}^{0} \cos((\pi/2)(t-u)d(\varepsilon_1(u)+\varepsilon_2(u))dt$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Похибка при виборі оптимальної оцінки $A_1\boldsymbol{\xi}$ не перевищує $\alpha^2 = 8/\pi^2$. $\diamondsuit$

Приклад 2.7. Нехай у попередньому прикладі $D = D_0^2$, $p_1 = p_2 = 1$. Використовуючи систему рівнянь (2.44) та умову (2.45), знаходимо, що

$$d(t) = 2^{1/2}\cos(\pi/2)t \cdot (1,\ 1)^{\top}$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$d(t) = \cos(\pi/2)t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Отже, найменш сприятливий стаціонарний процес має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(t) = 2^{1/2} \int\limits_{t-1}^{t} \cos((\pi/2)(t-u))d\varepsilon(u) \cdot (1,\ 1)^{\top}$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int\limits_{t-1}^{t} \cos((\pi/2)(t-u)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon}(u)$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = 2^{3/2} \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{t-1}^{0} \cos((\pi/2)(t-u)) d\varepsilon(u) dt$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = 2 \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{t-1}^{0} \cos((\pi/2)(t-u)) d(\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u)) dt$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Похибка при виборі оптимальної оцінки $A_1\boldsymbol{\xi}$ не перевищує $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 16/\pi^2$. $\diamondsuit$

Приклад 2.8. Нехай $D = D_0^3$, $p = 1$, $b_{11} = b_{22} = 2$, $b_{12} = b_{21} = 1$. Використовуючи систему рівнянь (2.46) та умову (2.47), знаходимо, що

$$d(t) = 3^{-1/2} \cos(\pi/2)t \cdot (1,\ 1)^\top$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$d(t) = 6^{-1/2} \cos(\pi/2)t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Отже, найменш сприятливий стаціонарний процес має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(t) = 3^{-1/2} \int\limits_{t-1}^{t} \cos((\pi/2)(t-u)) d\varepsilon(u) \cdot (1,\ 1)^\top$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\boldsymbol{\xi}(t) = 6^{-1/2} \int\limits_{t-1}^{t} \cos((\pi/2)(t-u)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon}(u)$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = (4/3)^{1/2}\int\limits_0^1\int\limits_{t-1}^0 \cos((\pi/2)(t-u))d\varepsilon(u)dt$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = (2/3)^{1/2}\int\limits_0^1\int\limits_{t-1}^0 \cos((\pi/2)(t-u))d(\varepsilon_1(u)+\varepsilon_2(u))dt$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Похибка при виборі оптимальної оцінки $A\boldsymbol{\xi}$ не перевищує $\alpha^2 = 8/(3\pi^2)$. $\diamondsuit$

Приклад 2.9. Нехай $D = D_0^4$, $p_{ij} = 1,\ i, j = \overline{1, 2}$. Використовуючи систему рівнянь (2.48) та умову (2.49), знаходимо, що

$$d(t) = 2^{1/2}\cos(\pi/2)t\cdot(1,\ 1)^\top$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$d(t) = \cos(\pi/2)t\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Отже, найменш сприятливий стаціонарний процес має вигляд

$$\boldsymbol{\xi}(t) = 2^{1/2}\int\limits_{t-1}^{t} \cos((\pi/2)(t-u))d\varepsilon(u)\cdot(1,\ 1)^\top$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int\limits_{t-1}^{t} \cos((\pi/2)(t-u))\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon}(u)$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = 2^{3/2}\int\limits_0^1\int\limits_{t-1}^0 \cos((\pi/2)(t-u))d\varepsilon(u)dt$$

у випадку мінімального рангу $m = 1$, або

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\xi} = 2\int\limits_0^1 \int\limits_{t-1}^0 \cos((\pi/2)(t-u))d(\varepsilon_1(u)+\varepsilon_2(u))dt$$

у випадку максимального рангу $m = 2$. Похибка при виборі оптимальної оцінки $A_1\boldsymbol{\xi}$ не перевищує

$$\sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i \overline{\alpha_j} p_{ij} = 16/\pi^2.$$

$\diamondsuit$

2.2.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах D_V^U

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\boldsymbol{\xi}$, $A_L\boldsymbol{\xi}$ від векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ для наступних множин спектральних щільностей, що описують смугову модель стохастичних процесів:

$$D_V^{U^1} = \left\{ F(\lambda) | \operatorname{Tr} V(\lambda) \le \operatorname{Tr} F(\lambda) \le \operatorname{Tr} U(\lambda), \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} F(\lambda) d\lambda = p \right\},$$

$$D_V^{U^2} = \left\{ F(\lambda) | v_{kk}(\lambda) \le f_{kk}(\lambda) \le u_{kk}(\lambda), \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_V^{U^3} = \left\{ F(\lambda) | \left\langle B, V(\lambda)\right\rangle \le \left\langle B, F(\lambda)\right\rangle \le \left\langle B, U(\lambda)\right\rangle, \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle B, F(\lambda)\right\rangle d\lambda = p \right\},$$

$$D_V^{U^4} = \left\{ F(\lambda) | V(\lambda) \le F(\lambda) \le U(\lambda), \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d\lambda = P \right\},$$

де $V(\lambda), U(\lambda)$ – задані матриці спектральних щільностей.

З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0)$ знайдемо для функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, що найменш сприятливі спектральні щільності заданих множин визначаються насту-

пними співвідношеннями відповідно

$$\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= (\alpha^2+\gamma_1(\lambda)+\gamma_2(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.51)$$

$$\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top\left\{(\alpha_k^2+\gamma_{1k}(\lambda)+\gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.52)$$

$$\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= (\alpha^2+\gamma_1'(\lambda)+\gamma_2'(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.53)$$

$$\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*+\Gamma_1(\lambda)+\Gamma_2(\lambda))\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.54)$$

де м.н.

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\lambda)&\leq 0, \gamma_1(\lambda)=0 : \operatorname{Tr} F^0(\lambda) > \operatorname{Tr} V(\lambda);\\
\gamma_2(\lambda)&\geq 0, \gamma_2(\lambda)=0 : \operatorname{Tr} F^0(\lambda) < \operatorname{Tr} U(\lambda);\\
\gamma_{1k}(\lambda)&\leq 0, \gamma_{1k}(\lambda)=0 : f_{kk}^0(\lambda) > v_{kk}(\lambda);\\
\gamma_{2k}(\lambda)&\geq 0, \gamma_{2k}(\lambda)=0 : f_{kk}^0(\lambda) < u_{kk}(\lambda);\\
\gamma_1'(\lambda)&\leq 0, \gamma_{13}(\lambda)=0 : \left\langle B, F^0(\lambda)\right\rangle > \left\langle B, V(\lambda)\right\rangle;\\
\gamma_2'(\lambda)&\geq 0, \gamma_{23}(\lambda)=0 : \left\langle B, F^0(\lambda)\right\rangle < \left\langle B, U(\lambda)\right\rangle;\\
\Gamma_1(\lambda)&\leq 0, \Gamma_1(\lambda)=0 : F^0(\lambda) > V(\lambda);\\
\Gamma_2(\lambda)&\geq 0, \Gamma_2(\lambda)=0 : F^0(\lambda) < U(\lambda).
\end{aligned}$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.8. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (2.51) – (2.54) *і допускають канонічну факторизацію* (2.14), *є найменш спри-*

ятливими спектральними щільностями в класах D_V^U для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \boldsymbol{\alpha}$ та функція $\{d(t), t \geq 0\}$, що задає канонічну факторизацію, визначаються умовою (2.20) *та обмеженнями, що накладаються на щільності даних множин. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.16).

Для функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ рівняння (2.51) – (2.54) мають вигляд

$$\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= (\alpha^2 + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.55)$$

$$\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{(\alpha_k^2 + \gamma_{1k}(\lambda) + \gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.56)$$

$$\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= (\alpha^2 + \gamma_1'(\lambda) + \gamma_2'(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.57)$$

$$\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda))\overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (2.58)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.9. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (2.55) – (2.58) *і допускають канонічну факторизацію* (2.14), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах D_V^U для оптимальної екстраполяції функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$. Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \boldsymbol{\alpha}$ та функція $\{d(t), 0 \leq t \leq L\}$, що задає канонічну факторизацію, визначаються умовою* (2.21) *та обмеженнями, що накладаються на щільності даних множин. Мінімаксна спектральна характеристика обчислює-*

ться за формулою (2.18).

2.2.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах D_ε

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\boldsymbol{\xi}$, $A_L\boldsymbol{\xi}$ для множин спектральних щільностей, які описують модель "ε-забруднення" стохастичних процесів:

$$D_\varepsilon^1 = \{F(\lambda)|F(\lambda) = (1-\varepsilon)\mathrm{Tr}W(\lambda) + \varepsilon \mathrm{Tr}\, U(\lambda),$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\, F(\lambda) d\lambda = p \right\},$$

$$D_\varepsilon^2 = \left\{ F(\lambda) | f_{kk}(\lambda) = (1-\varepsilon) w_{kk}(\lambda) + \varepsilon u_{kk}(\lambda), \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_\varepsilon^3 = \left\{ F(\lambda) | \left\langle B, F(\lambda) \right\rangle = (1-\varepsilon) \left\langle B, W(\lambda) \right\rangle + \varepsilon \left\langle B, U(\lambda) \right\rangle, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle B, F(\lambda) \right\rangle d\lambda = p \right\},$$

$$D_\varepsilon^4 = \left\{ F(\lambda) | F(\lambda) = (1-\varepsilon) W(\lambda) + \varepsilon U(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d\lambda = P \right\},$$

де $W(\lambda)$ – відома, а $U(\lambda)$ – невідома матриця спектральних щільностей.

З умови $0 \in \partial \Delta_D(F^0)$ для функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ знайдемо, що найменш сприятливі спектральні щільності заданих множин визначаються наступними співвідношеннями відповідно

$$\left(\int\limits_0^{\infty} (Ad)(t) e^{it\lambda} dt \right) \left(\int\limits_0^{\infty} (Ad)(t) e^{it\lambda} dt \right)^* =$$

$$= (\alpha^2 + \gamma(\lambda)) \varphi^0(\lambda)^\top \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.59)$$

$$\left(\int_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$

$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{(\alpha_k^2 + \gamma_k(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.60)$$

$$\left(\int_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$

$$= (\alpha^2 + \gamma'(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.61)$$

$$\left(\int_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$

$$= \varphi^0(\lambda)^\top(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma(\lambda))\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.62)$$

де $\gamma(\lambda) \leq 0; \gamma'(\lambda) \leq 0; \gamma_k(\lambda) \leq 0, k = \overline{1,T}; \Gamma(\lambda) \leq 0$ м.н. і
$\gamma(\lambda) = 0$ при $\mathrm{Tr}\, F^0(\lambda) > (1-\varepsilon)\mathrm{Tr}\, W(\lambda)$,
$\gamma_k(\lambda) = 0$ при $f_{kk}^0(\lambda) > (1-\varepsilon)w_{kk}(\lambda)$,
$\gamma'(\lambda) = 0$ при $\left\langle B, F^0(\lambda)\right\rangle > (1-\varepsilon)\left\langle B, W(\lambda)\right\rangle$,
$\Gamma(\lambda) = 0$ при $F^0(\lambda) > (1-\varepsilon)W(\lambda)$.

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.10. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (2.59) – (2.62) *і допускають канонічну факторизацію* (2.14), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах D_ε для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \boldsymbol{\alpha}$ та функція $\{d(t), t \geq 0\}$, що задає канонічну факторизацію, визначаються умовою* (2.20) *та обмеженнями, що накладаються на щільності даних множин. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.16).

Для функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ рівняння (2.59) – (2.62) мають вигляд

$$\left(\int_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$

$$= (\alpha^2 + \gamma(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.63)$$

$$\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{(\alpha_k^2+\gamma_k(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.64)$$

$$\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= (\alpha^2+\gamma'(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.65)$$

$$\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^L (A_L d)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*+\Gamma(\lambda))\overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (2.66)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.11. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (2.63) – (2.66) *і допускають канонічну факторизацію* (2.14), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах D_ε для оптимальної екстраполяції функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$. Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \boldsymbol{\alpha}$ та функція $\{d(t), 0 \le t \le L\}$, що задає канонічну факторизацію, визначаються умовою* (2.21) *та обмеженнями, що накладаються на щільності даних множин. Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.18).

2.2.6. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{1\varepsilon}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\boldsymbol{\xi}, A_L\boldsymbol{\xi}$ для множин спектральних щільностей, що описують модель "ε – околу" в просторі L_1 стохастичних процесів:

$$D_{1\varepsilon}^1 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - V(\lambda))| \, d\lambda \leq \varepsilon \right\},$$

$$D_{1\varepsilon}^2 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_{kk}(\lambda) - v_{kk}(\lambda)| \, d\lambda \leq \varepsilon_k, k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_{1\varepsilon}^3 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\langle B, F(\lambda) - V(\lambda)\rangle| \, d\lambda \leq \varepsilon \right\},$$

$$D_{1\varepsilon}^4 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_{ij}(\lambda) - v_{ij}(\lambda)| \, d\lambda \leq \varepsilon_{ij}, i,j = \overline{1,T} \right\},$$

де $V(\lambda)$ – задана матриця спектральних щільностей, $E = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^T$ – задана симетрична матриця, $\varepsilon, \varepsilon_k$ – задані числа.

З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0)$ для функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ знайдемо, що найменш сприятливі спектральні щільності заданих множин визначаються наступними співвідношеннями відповідно

$$\left(\int\limits_0^{\infty} (Ad)(t) e^{it\lambda} dt\right) \left(\int\limits_0^{\infty} (Ad)(t) e^{it\lambda} dt\right)^* = \\ = \alpha^2 \gamma(\lambda) \varphi^0(\lambda)^\top \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.67)$$

$$\left(\int\limits_0^{\infty} (Ad)(t) e^{it\lambda} dt\right) \left(\int\limits_0^{\infty} (Ad)(t) e^{it\lambda} dt\right)^* = \\ = \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_k^2 \gamma_k(\lambda) \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.68)$$

$$\left(\int\limits_0^{\infty} (Ad)(t) e^{it\lambda} dt\right) \left(\int\limits_0^{\infty} (Ad)(t) e^{it\lambda} dt\right)^* = \\ = \alpha^2 \gamma'(\lambda) \varphi^0(\lambda)^\top B \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.69)$$

$$\left(\int_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_{ij}\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.70)$$

де

$$|\gamma(\lambda)| \leq 1; |\gamma'(\lambda)| \leq 1; |\gamma_k(\lambda)| \leq 1, k = 1, \dots, T;$$
$$|\gamma_{ij}(\lambda)| \leq 1, i, j = 1, \dots, T$$

$$\gamma(\lambda) = \text{sign Tr } (F^0(\lambda) - V(\lambda)) : \text{Tr}(F^0(\lambda) - V(\lambda)) \neq 0,$$
$$\gamma_k(\lambda) = \text{sign } (f^0_{kk}(\lambda) - v_{kk}(\lambda)) : f^0_{kk}(\lambda) - v_{kk}(\lambda) \neq 0,$$
$$\gamma'(\lambda) = \text{sign } \left\langle B,\ F^0(\lambda) - V(\lambda)\right\rangle : \left\langle B, F^0(\lambda) - V(\lambda) \neq 0\right\rangle,$$
$$\gamma_{ij}(\lambda) = \frac{f^0_{ji}(\lambda) - v_{ji}(\lambda)}{\left|f^0_{ij}(\lambda) - v_{ij}(\lambda)\right|} : f^0_{ij}(\lambda) - v_{ij}(\lambda) \neq 0.$$

Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \alpha_{ij}$ та коефіцієнти канонічної факторизації визначаються з рівняння факторизації (2.14) щільності $F^0(\lambda)$ умови (2.20) та умов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\text{Tr}\,(F(\lambda) - V(\lambda))|\, d\lambda = \varepsilon, \quad (2.71)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f_{kk}(\lambda) - v_{kk}(\lambda)|\, d\lambda = \varepsilon_k, k = \overline{1, T}, \quad (2.72)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\langle B, F(\lambda) - V(\lambda)\rangle|\, d\lambda = \varepsilon, \quad (2.73)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f_{ij}(\lambda) - v_{ij}(\lambda)|\, d\lambda = \varepsilon_{ij}, i, j = \overline{1, T}. \quad (2.74)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.12. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (2.67) – (2.70) *і допускають канонічну факторизацію* (2.14), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах $D_{1\varepsilon}$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A\boldsymbol{\xi}$. Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \alpha_{ij}$ та функція $\{d(t), t \geq 0\}$, що задає канонічну факторизацію, визначаються умовами* (2.20), (2.71) – (2.74). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.16).

Для функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ співвідношення (2.67) – (2.70) мають вигляд

$$\left(\int\limits_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \alpha^2\gamma(\lambda)\varphi^0(\lambda)^\top\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.75)$$

$$\left(\int\limits_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top\left\{\alpha_k^2\gamma_k(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.76)$$

$$\left(\int\limits_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \alpha^2\gamma'(\lambda)\varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.77)$$

$$\left(\int\limits_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top\left\{\alpha_{ij}\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^T\overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (2.78)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.13. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (2.75) – (2.78) *і допускають канонічну факторизацію* (2.14), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах $D_{1\varepsilon}$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$. Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \alpha_{ij}$ та функція $\{d(t), 0 \leq t \leq L\}$, що задає канонічну факторизацію, визначаються умовами* (2.21), (2.71) – (2.74). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.18).

2.2.7. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{2\varepsilon}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A\boldsymbol{\xi}, A_L\boldsymbol{\xi}$ для множин спектральних щільностей, що описують модель „ε – околу" в просторі L_2 стохастичних процесів:

$$D_{2\varepsilon}^1=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{Tr}\,(F(\lambda)-W(\lambda))|^2\,d\lambda\leq\varepsilon\right\},$$

$$D_{2\varepsilon}^2=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_{kk}(\lambda)-w_{kk}(\lambda)|^2\,d\lambda\leq\varepsilon_k,\;k=\overline{1,T}\right\},$$

$$D_{2\varepsilon}^3=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\langle B,F(\lambda)-W(\lambda)\rangle|^2\,d\lambda\leq\varepsilon\right\},$$

$$D_{2\varepsilon}^4=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_{ij}(\lambda)-w_{ij}(\lambda)|^2\,d\lambda\leq\varepsilon_{ij},i,j=\overline{1,T}\right\},$$

де $\varepsilon,\varepsilon_k$ – задані числа, $E=\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^{T}$ – задана симетрична матриця, $W(\lambda)$ – задана матриця спектральних щільностей. Для функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ з умови $0\in\partial\Delta_D(F^0)$ знайдемо, що найменш сприятливі спектральні щільності заданих множин визначаються наступними співвідношеннями відповідно:

$$\left(\int\limits_0^{\infty}(Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^{\infty}(Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^*=$$
$$=\alpha^2\mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda)-W(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top\overline{\varphi^0(\lambda)},\quad(2.79)$$

$$\left(\int\limits_0^{\infty}(Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^{\infty}(Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^*=$$
$$=\varphi^0(\lambda)^\top\left\{\alpha_k^2(f_{kk}^0(\lambda)-w_{kk}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}\overline{\varphi^0(\lambda)},\quad(2.80)$$

$$\left(\int\limits_0^{\infty}(Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^{\infty}(Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^*=$$
$$=\alpha^2\left\langle B,F^0(\lambda)-W(\lambda)\right\rangle\varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)},\quad(2.81)$$

$$\left(\int_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (Ad)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$

$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_{ij}(f^0_{ji}(\lambda) - w_{ji}(\lambda))\right\}_{i,j=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (2.82)$$

Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \alpha_{ij}$ та функція $\{d(t), t \geq 0\}$, що задає канонічну факторизацію, визначаються з рівняння факторизації (2.14), умови (2.20) та умов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - W(\lambda))\right|^2 d\lambda = \varepsilon, \quad (2.83)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|f_{kk}(\lambda) - w_{kk}(\lambda)\right|^2 d\lambda = \varepsilon_k, k = \overline{1,T}, \quad (2.84)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\langle B, F(\lambda) - W(\lambda)\rangle\right|^2 d\lambda = \varepsilon, \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|f_{ij}(\lambda) - w_{ij}(\lambda)\right|^2 d\lambda = \varepsilon_{ij}, i,j = \overline{1,T}. \quad (2.86)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.14. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (2.79) – (2.82) *і допускають канонічну факторизацію* (2.14), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах* $D_{2\varepsilon}$ *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$. *Невідомі множники* $\alpha^2, \alpha_k^2, \alpha_{ij}$ *та функція* $\{d(t), t \geq 0\}$ *, що задає канонічну факторизацію, визначаються умовами* (2.20), (2.83) – (2.86). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.16).

Для функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ співвідношення (2.79) – (2.82) мають вигляд

$$\left(\int_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$

$$= \alpha^2 \mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda) - W(\lambda))\varphi^0(\lambda)^\top\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.87)$$

$$\left(\int_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)\left(\int_0^L (A_Ld)(t)e^{it\lambda}dt\right)^* =$$

$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_k^2(f^0_{kk}(\lambda) - w_{kk}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.88)$$

$$\left(\int\limits_0^L (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right)\left(\int\limits_0^L (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right)^* =$$
$$= \alpha^2 \left\langle B, F^0(\lambda) - W(\lambda)\right\rangle \varphi^0(\lambda)^\top B\overline{\varphi^0(\lambda)}, \quad (2.89)$$

$$\left(\int\limits_0^L (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right)\left(\int\limits_0^L (A_L d)(t) e^{it\lambda} dt\right)^* =$$
$$= \varphi^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_{ij}(f^0_{ji}(\lambda) - w_{ji}(\lambda))\right\}_{i,j=1}^T \overline{\varphi^0(\lambda)}. \quad (2.90)$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.15. *Щільності, що визначаються співвідношеннями* (2.87) – (2.90) *і допускають канонічну факторизацію* (2.14), *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класах $D_{2\varepsilon}$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A_L\xi$. Невідомі множники $\alpha^2, \alpha_k^2, \alpha_{ij}$ та функція $\{d(t), 0 \leq t \leq L\}$, що задає канонічну факторизацію, визначаються умовами* (2.21), (2.83) – (2.86). *Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулою* (2.18).

2.3. Фільтрація функціоналів від стаціонарних процесів

У цьому підрозділі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\boldsymbol{\xi} = \int\limits_0^\infty \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(-t) dt$$

від невідомих значень стаціонарного векторного процесу $\boldsymbol{\xi}(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1}^T$ за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)+\boldsymbol{\eta}(t)$ при $t \leq 0$, де $\boldsymbol{\eta}(t) = \{\eta_k(t)\}_{k=1}^T$ – некорельований із $\boldsymbol{\xi}(t)$ стаціонарний векторний процес.

Якщо матриці спектральних щільностей $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$, $G(\lambda) = \{g_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$ стаціонарних процесів $\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)$ відомі точно, то до задачі оцінювання лінійного функціоналу доцільно застосовувати класичний метод А.М. Колмогорова, який базується на геометрії гільбертових просторів. У тому ж випадку, якщо відома лише множина можливих значень щільностей $D = D_F \times D_G$ застосовується мінімаксний підхід до задачі оцінювання, тобто шукаються такі оцінки, які мінімізують максимальне значення величини похибки.

2.3.1. Класичний метод лінійної фільтрації

Припустимо, що векторна функція $\boldsymbol{a}(t)$, яка визначає функціонал $A\boldsymbol{\xi}$ задовольняє умови (2.12). Тоді функціонал $A\boldsymbol{\xi}$ має скінченний другий момент. Стаціонарний процес $\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$ допускає канонічний розклад рухомого середнього

$$\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) = \int_{-\infty}^{t} d(t-u) d\boldsymbol{\varepsilon}(u), \tag{2.91}$$

якщо матриця спектральних щільностей $F(\lambda)+G(\lambda)$ стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$ допускає канонічну факторизацію [3]

$$F(\lambda) + G(\lambda) = d(\lambda)(d(\lambda))^{*},\ d(\lambda) = \int_{0}^{\infty} d(u) e^{-iu\lambda} du, \tag{2.92}$$

де $d(u) = \{d_{ij}(u)\}_{i=\overline{1,T}}^{j=\overline{1,m}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(u) = \{\varepsilon_k(u)\}_{k=1}^{m}$ – векторний процес білого шуму. Для факторизації спектральної щільності $F(\lambda) + G(\lambda)$ достатньо регулярності однієї із щільностей $F(\lambda), G(\lambda)$. Регулярні спектральні щільності $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ допускають канонічні факторизації

$$F(\lambda) = \varphi(\lambda)(\varphi(\lambda))^{*},\ \varphi(\lambda) = \int_{0}^{\infty} \varphi(u) e^{-iu\lambda} du, \tag{2.93}$$

$$G(\lambda) = \psi(\lambda)(\psi(\lambda))^{*},\ \psi(\lambda) = \int_{0}^{\infty} \psi(u) e^{-iu\lambda} du, \tag{2.94}$$

де $\varphi(u) = \{\varphi_{ij}(u)\}_{i=\overline{1,T}}^{j=\overline{1,m}}$, $\psi(u) = \{\psi_{ij}(u)\}_{i=\overline{1,T}}^{j=\overline{1,m}}$. Тоді середньоквадратичну похибку лінійної оцінки $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$, що має спектральну характеристику

$$h(\lambda) = \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{h}(t) e^{-it\lambda} dt$$

можна обчислити за формулою

$$\Delta(h;F,G) = E\left|A\boldsymbol{\xi} - \hat{A}\boldsymbol{\xi}\right|^{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{(A(\lambda) - h(\lambda))^{\top}(F(\lambda)+G(\lambda))\times$$

$$\times\overline{(A(\lambda)-h(\lambda))} - (A(\lambda)-h(\lambda))^{\top}G(\lambda)\overline{A(\lambda)} - A(\lambda)^{\top}G(\lambda)\overline{(A(\lambda)-h(\lambda))}+$$
$$+A(\lambda)^{\top}G(\lambda)\overline{A(\lambda)}\}d\lambda =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\min(t,u)} \{(\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{h}(t))^{\top} d(t-x)(d(u-x))^{*}\overline{(\boldsymbol{a}(u)-\boldsymbol{h}(u))}-$$

$$-(\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{h}(t))^{\top}\psi(t-x)(\psi(u-x))^{*}\overline{\boldsymbol{a}(u)}-\boldsymbol{a}(t)^{\top}\psi(t-x)(\psi(u-x))^{*}\times$$

$$\times\overline{(\boldsymbol{a}(u)-\boldsymbol{h}(u))}+\boldsymbol{a}(t)^{\top}\psi(t-x)(\psi(u-x))^{*}\overline{\boldsymbol{a}(u)}\}dxdudt,$$

де

$$A(\lambda)=\int_0^{\infty}\boldsymbol{a}(t)e^{-it\lambda}dt.$$

Спектральна характеристика $h(F,G)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ при заданих щільностях $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ визначається умовою

$$\Delta(F,G)=\Delta(h(F,G);F,G)=\min_{h\in L_2^{-}(F+G)}\Delta(h;F,G). \tag{2.95}$$

В тому випадку, коли щільності допускають канонічні факторизації (2.92), (2.94) можна показати, що величина середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\boldsymbol{\xi}$ дорівнює

$$\Delta(F,G)=\langle c_G,a\rangle-\left\|C_G b^{*}\right\|^2. \tag{2.96}$$

Тут

$$c_G(t)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\min(s,t)}\overline{\psi(s-u)}\psi(t-u)^{\top}\boldsymbol{a}(s)duds,$$

$$\langle c_G,a\rangle=\int_0^{\infty}\langle c_G(t),\boldsymbol{a}(t)\rangle\,dt,$$

$$(C_G b^{*})(t)=\int_0^{\infty}\overline{b(u)}c_G(t+u)du,$$

$$\left\|C_G b^{*}\right\|^2=\int_0^{\infty}\left\|(C_G b^{*})(t)\right\|^2dt,$$

$b(\lambda)=\{b_{ij}(\lambda)\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,T}}$ – матрична функція, така що

$$b(\lambda)=\int_0^{\infty}b(t)e^{-it\lambda}dt,\quad b(\lambda)d(\lambda)=E_m.$$

Спектральну характеристику $h(F,G)$ оптимальної оцінки можна обчислити за формулою

$$h(F,G) = A(\lambda) - b(\lambda)^{\top} r_G(\lambda), \quad r_G(\lambda) = \int_0^{\infty} (C_G b^*)(t) e^{-it\lambda} dt. \tag{2.97}$$

Якщо ж щільності допускають канонічні факторизації (2.92), (2.93), то величину середньоквадратичної похибки і спектральну характеристику оптимальної оцінки можна обчислити за формулами

$$\Delta(F,G) = \langle c_F, a \rangle - \|C_F b^*\|^2, \tag{2.98}$$

$$h(F,G) = b(\lambda)^{\top} r_F(\lambda), \quad r_F(\lambda) = \int_0^{\infty} (C_F b^*)(t) e^{-it\lambda} dt, \tag{2.99}$$

де

$$c_F(t) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\min(s,t)} \overline{\varphi(s-u)} \varphi(t-u)^{\top} \boldsymbol{a}(s) du ds,$$

$$(C_F b^*)(t) = \int_0^{\infty} \overline{b(u)} c_F(t+u) du.$$

Отже справджується така теорема.

Теорема 2.16. *Величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(F,G)$ *оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$ *від невідомих значень векторного стаціонарного процесу* $\boldsymbol{\xi}(t)$ *за даними спостережень процесу* $\boldsymbol{\xi}(t)+\boldsymbol{\eta}(t)$ *при* $t \leq 0$, *де* $\boldsymbol{\xi}(t)$, $\boldsymbol{\eta}(t)$ *– некорельовані векторні стаціонарні процеси, що мають щільності* $F(\lambda)$, $G(\lambda)$, *які допускають канонічні факторизації* (2.92), (2.93) *чи* (2.92), (2.94), *можна обчислити за формулами* (2.96), (2.98). *Спектральну характеристику* $h(F,G)$ *оптимальної фільтрації можна обчислити за формулами* (2.97), (2.99).

Приклад 2.10. Розглянемо задачу оцінювання функціонала

$$\boldsymbol{a}(0)^{\top} \boldsymbol{\xi}(0) = c\xi_1(0) + d\xi_2(0)$$

від невідомих значень векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)+\boldsymbol{\eta}(t)$ при $t \leq 0$. Нехай

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f(\lambda) \\ f(\lambda) & f(\lambda)+f_1(\lambda) \end{pmatrix}, f(\lambda) = \frac{P_1^2}{|\alpha_1 + i\lambda|^2}, f_1(\lambda) = \frac{P_2^2}{|\alpha_2 + i\lambda|^2},$$

$$G(\lambda)=\begin{pmatrix} g(\lambda) & g(\lambda) \\ g(\lambda) & g(\lambda)+g_1(\lambda) \end{pmatrix}, g(\lambda)=0, g_1(\lambda)=\frac{P_3^2}{|\alpha_3+i\lambda|^2}.$$

Тоді

$$F(\lambda)+G(\lambda)=d(\lambda)(d(\lambda))^*, \quad F(\lambda)=\varphi(\lambda)(\varphi(\lambda))^*,$$

де

$$d(\lambda)=\begin{pmatrix} \frac{P_1}{\alpha_1+i\lambda} & 0 \\ \frac{P_1}{\alpha_1+i\lambda} & A\frac{\beta+i\lambda}{(\alpha_2+i\lambda)(\alpha_3+i\lambda)} \end{pmatrix},$$

$$A^2=P_2^2+P_3^2, \quad \beta=\frac{P_2^2\alpha_3^2+P_3^2\alpha_2^2}{A^2};$$

$$\varphi(\lambda)=\int\limits_0^\infty \varphi(u)e^{-iu\lambda}du,\ \varphi(u)=\begin{pmatrix} P_1e^{-\alpha_1 u} & 0 \\ P_1e^{-\alpha_1 u} & P_2e^{-\alpha_2 u} \end{pmatrix}.$$

Порахуємо обернену матрицю:

$$b(\lambda)=(d(\lambda))^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1+i\lambda}{P_1} & 0 \\ -\frac{1}{A}\frac{(\alpha_2+i\lambda)(\alpha_3+i\lambda)}{\beta+i\lambda} & \frac{1}{A}\frac{(\alpha_2+i\lambda)(\alpha_3+i\lambda)}{\beta+i\lambda} \end{pmatrix}.$$

Порахуємо спектральну характеристику оптимальної оцінки:

$$h(\lambda)=(h_1(\lambda)\ ,\ h_2(\lambda))^\top=b(\lambda)^\top r_F(\lambda),$$

де

$$r_F(\lambda)=\int\limits_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt,\ (C_F b^*)(t)=\int\limits_0^\infty \overline{b(u)}c_F(t+u)\,du.$$

Оскільки

$$c_F(t)=\int\limits_0^\infty \overline{\varphi(u)}\varphi(t+u)^\top\,du\cdot\boldsymbol{a}(0)=(c_1(t)\ ,\ c_2(t))^\top,$$

де

$$c_1(t)=\left[\frac{(c+d)P_1^2}{|\alpha_1+i\lambda|^2}\right]_t, c_2(t)=c_1(t)+\left[\frac{dP_2^2}{|\alpha_2+i\lambda|^2}\right]_t,$$

$[f(\lambda)]_t$ – ‘коефіцієнти’ Фур’є функції f при $e^{-it\lambda}$, маємо

$$h_1(\lambda)=(c+d)-\frac{dP_2^2}{A^2}\frac{(\alpha_2+i\lambda)(\alpha_3+i\lambda)}{\beta+i\lambda}\left[\frac{\alpha_3-i\lambda}{(\beta-i\lambda)(\alpha_2+i\lambda)}\right]_-,$$

де $[f(\lambda)]_-$ – позначає зображення функції у вигляді інтегралу Фур’є за від'ємним степеням $e^{-it\lambda}$, $t \geq 0$. Враховуючи, що

$$\left[\frac{\alpha_3 - i\lambda}{(\beta - i\lambda)(\alpha_2 + i\lambda)}\right]_- = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{(\alpha_2 + \beta)(\alpha_2 + i\lambda)},$$

отримаємо

$$h_1(\lambda) = (c + d) - \frac{dP_2^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{A^2(\alpha_2 + \beta)} \frac{\alpha_3 + i\lambda}{\beta + i\lambda}.$$

Аналогічно

$$h_2(\lambda) = \frac{dP_2^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{A^2(\alpha_2 + \beta)} \frac{\alpha_3 + i\lambda}{\beta + i\lambda}.$$

Порахуємо середньоквадратичну похибку оптимальної оцінки:

$$\Delta(F, G) = \langle c_F, a\rangle - \|C_F b^*\|^2 = \langle \boldsymbol{c}_F(0), \boldsymbol{a}(0)\rangle - \|C_F b^*\|^2 .$$

Оскільки

$$\boldsymbol{c}_F(0) = \int_0^\infty \overline{\varphi(u)}\varphi(u)^\top \, du \cdot \boldsymbol{a}(0),$$

отримаємо

$$\langle \boldsymbol{c}_F(0), \boldsymbol{a}(0)\rangle = \frac{(c + d)^2 P_1^2}{2\alpha_1} + \frac{d^2 P_2^2}{2\alpha_2}.$$

Порахуємо другий доданок:

$$\|C_F b^*\|^2 = \int_0^\infty \|(C_F b^*)(t)\|^2 \, dt,$$

$$(C_F b^*)(t) = \left(\left[\frac{(c + d)P_1}{\alpha_1 + i\lambda}\right]_t , \ \left[\frac{dP_2^2(\alpha_3 - i\lambda)}{A(\alpha_2 + i\lambda)(\beta - i\lambda)}\right]_t\right)^\top =$$

$$= \left((c + d)P_1 e^{-\alpha_1 t} , \ \frac{dP_2^2}{A}\left(e^{-\alpha_1 t} + \frac{\alpha_3 - \beta}{\alpha_2 + \beta} e^{-\alpha_2 t}\right)\right)^\top .$$

Звідси

$$\Delta(F, G) = \frac{d^2 P_2^2}{2\alpha_2} - \frac{d^2 P_2^4}{2\alpha_2 A^2}\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2 + \beta}\right)^2 .$$

$\diamondsuit$

Приклад 2.11. Розглянемо задачу оцінювання функціонала

$$\boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(-t) = c\xi_1(-t) + d\xi_2(-t)$$

від невідомих значень векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)+\boldsymbol{\eta}(t)$ при $t\leq 0$. Тоді

$$c_F(u)=(c_1(u),c_2(u))^\top,$$

$$c_1(u)=\left[\frac{(c+d)P_1^2e^{-i\lambda t}}{|\alpha_1+i\lambda|^2}\right]_u,\quad c_2(u)=c_1(u)+\left[\frac{dP_2^2e^{-i\lambda t}}{|\alpha_2+i\lambda|^2}\right]_u.$$

Звідси маємо

$$h(\lambda)=((c+d)e^{-i\lambda t}-q(\lambda)\ ,\ q(\lambda))^\top,$$

$$q(\lambda)=\frac{dP_2^2}{A^2}\frac{(\alpha_2+i\lambda)(\alpha_3+i\lambda)}{\beta+i\lambda}\left[\frac{\alpha_3-i\lambda}{(\alpha_2+i\lambda)(\beta-i\lambda)}e^{-i\lambda t}\right]_-=$$

$$=\frac{dP_2^2}{A^2}\frac{\alpha_3+i\lambda}{\beta+i\lambda}\left(e^{-i\lambda t}+e^{\alpha_2 t}\frac{\alpha_3-\beta}{\alpha_2+\beta}\right).$$

Порахуємо середньоквадратичну похибку оцінки:

$$\Delta(F,G)=\langle \boldsymbol{c}_F(t),\boldsymbol{a}(t)\rangle-\|(C_Fb^*)(u)\|^2=\frac{d^2P_2^2}{2\alpha_2}-\int\limits_0^\infty\|(C_Fb^*)_2(u)\|^2\,du,$$

$$(C_Fb^*)_2(u)=\frac{dP_2^2}{A}\left[\frac{1}{\alpha_2+i\lambda}\left(e^{-i\lambda t}+e^{\alpha_2 t}\frac{\alpha_3-\beta}{\alpha_2+\beta}\right)\right]_u=$$

$$=\begin{cases}\frac{dP_2^2(\alpha_3-\beta)}{A(\alpha_2+\beta)}e^{\alpha_2(t-u)},\ 0\leq u<t\,;\\ \frac{dP_2^2(\alpha_2+\alpha_3)}{A(\alpha_2+\beta)}e^{\alpha_2(t-u)},\ u\geq t\,.\end{cases}$$

Отже, середньоквадратична похибка оцінки дорівнює

$$\Delta(F,G)=\frac{d^2P_2^2}{2\alpha_2}-\frac{d^2P_2^4}{2\alpha_2A^2(\alpha_2+\beta)^2}((\alpha_3-\beta)^2(e^{2\alpha_2 t}-1)+(\alpha_2+\alpha_3)^2).$$

$\diamondsuit$

Приклад 2.12. Розглянемо задачу оцінювання функціонала

$$A_1\boldsymbol{\xi}=\int\limits_0^1\boldsymbol{a}(t)^\top\boldsymbol{\xi}(-t)\,dt$$

від невідомих значень векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)+\boldsymbol{\eta}(t)$ при $t\leq 0$. Використовуючи результати попередніх прикладів, отримаємо таку спектральну характеристику оптимального прогнозу:

$$h(\lambda) = (\int\limits_0^1 (a_1(t) + a_2(t) e^{-i\lambda t} dt - q(\lambda) \ , \ q(\lambda))^\top,$$

$$q(\lambda) = \frac{P_2^2(\alpha_3 + i\lambda)}{A^2(\beta + i\lambda)} \left(\int\limits_0^1 a_2(t) e^{-i\lambda t} dt + \frac{\alpha_3 - \beta}{\alpha_2 + \beta} \int\limits_0^1 a_2(t) e^{\alpha_2 t} dt \right).$$

Середньоквадратична похибка прогнозу обчислюється за формулою:

$$\Delta(F, G) = \frac{P_2^2}{2\alpha_2} \int\limits_0^1 a_2^2(t) dt - \frac{P_2^4}{2\alpha_2 A^2 (\alpha_2 + \beta)^2} \times$$

$$\times \left((\alpha_3 - \beta)^2 \int\limits_0^1 a_2^2(t)(e^{2\alpha_2 t} - 1) dt + (\alpha_2 + \alpha_3)^2 \int\limits_0^1 a_2^2(t) dt \right).$$

Нехай $\boldsymbol{a}(t) = (1 - t \ , \ e^{-at})^\top$. Тоді спектральна характеристика має вигляд:

$$h(\lambda) = \left(\frac{1}{i\lambda} + \frac{1 - e^{-i\lambda}}{\lambda^2} + \frac{1 - e^{-(a + i\lambda)}}{a + i\lambda} - q(\lambda) \ , \ q(\lambda) \right)^\top,$$

де

$$q(\lambda) = \frac{P_2^2(\alpha_3 + i\lambda)}{A^2(\beta + i\lambda)} \left(\frac{1 - e^{-(a + i\lambda)}}{a + i\lambda} + \frac{\alpha_3 - \beta}{\alpha_2 + \beta} \frac{e^{\alpha_2 - a} - 1}{\alpha_2 - a} \right).$$

Середньоквадратична похибка прогнозу обчислюється за формулою:

$$\Delta(F, G) = \frac{P_2^2}{2\alpha_2} \frac{1 - e^{-2a}}{2a} - \frac{P_2^4}{2\alpha_2 A^2 (\alpha_2 + \beta)^2} \left(\frac{1 - e^{-2a}}{2a} (\alpha_2 + \beta) \times \right.$$

$$\left. \times \ (2\alpha_3 + \alpha_2 - \beta) + (\alpha_3 - \beta)^2 \frac{e^{2(\alpha_2 - a)} - 1}{2(\alpha_2 - a)} \right).$$

$\diamondsuit$

Приклад 2.13. Нехай $\boldsymbol{a}(t) = (e^{-at}, e^{-bt})^\top, \ b > \alpha_2$ і розглядається задача оцінювання функціонала

$$A\boldsymbol{\xi} = \int\limits_0^\infty \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(-t) \, dt$$

від невідомих значень векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$ при $t \leq 0$. Спектральна характеристика оптимальної оцінки обчислюється за формулою:

$$h(\lambda) = \left(\frac{1}{i\lambda + a + b} - q(\lambda)\ ,\ q(\lambda) \right)^{\top},$$

де

$$q(\lambda) = \frac{P_2^2(\alpha_3 + i\lambda)}{A^2(\beta + i\lambda)} \left(\frac{1}{i\lambda + b} + \frac{\alpha_3 - \beta}{(\alpha_2 + \beta)(b - \alpha_2)} \right).$$

Середньоквадратична похибка оптимальної оцінки дорівнює

$$\Delta(F, G) = \frac{P_2^2}{4b\alpha_2} - \frac{P_2^4}{2\alpha_2 A^2(\alpha_2 + \beta)^2} \left(\frac{(\alpha_2 + \alpha_3)^2}{2b} + \right.$$

$$\left. + (\alpha_3 - \beta)^2 \left(\frac{1}{2(b - \alpha_2)} - \frac{1}{2b} \right) \right).$$

$\diamondsuit$

2.3.2. Мінімаксний метод лінійної фільтрації

Формулами (2.91) – (2.99) можна користуватись лише тоді, коли відомі матриці спектральних щільностей $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ векторних стаціонарних процесів. Якщо задається лише множина $D = D_F \times D_G$ можливих щільностей, то застосовують мінімаксний підхід до задач оцінювання функціоналів від векторних стаціонарних процесів. Замість того, щоб шукати оцінку, яка була б оптимальною для деяких спектральних щільностей, шукають оцінку, що мінімізує величину середньоквадратичної похибки одночасно для всіх пар спектральних щільностей із заданого класу.

Означення 2.3. *Спектральні щільності $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ називаються найменш сприятливими в класі D для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо виконуються співвідношення:*

$$\Delta(h(F^0, G^0); F^0, G^0) = \max_{(F,G) \in D} \Delta(h(F, G); F, G).$$

Враховуючи співвідношення (2.91) – (2.99), можна переконатись, що вірні такі твердження.

Теорема 2.17. *Спектральні щільності $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$, що допускають канонічні факторизації* (2.92) – (2.94), *найменш сприятливі в класі D для оптимальної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо коефіцієнти факторизації* (2.92) – (2.94) *є розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\Delta(F, G) = \langle c_G, a \rangle - \left\| C_G b^* \right\|^2 \to \sup, \tag{2.100}$$

$$G(\lambda) = \left(\int_0^\infty \psi(u)e^{-iu\lambda}du\right) \cdot \left(\int_0^\infty \psi(u)e^{-iu\lambda}du\right)^* \in D_G,$$

$$F(\lambda) = \left(\int_0^\infty d(u)e^{-iu\lambda}du\right) \cdot \left(\int_0^\infty d(u)e^{-iu\lambda}du\right)^* - G(\lambda) \in D_F,$$

або задачі на умовний екстремум

$$\Delta(F, G) = \langle c_F, a\rangle - \|C_F b^*\|^2 \to \sup, \tag{2.101}$$

$$F(\lambda) = \left(\int_0^\infty \varphi(u)e^{-iu\lambda}du\right) \cdot \left(\int_0^\infty \varphi(u)e^{-iu\lambda}du\right)^* \in D_F,$$

$$G(\lambda) = \left(\int_0^\infty d(u)e^{-iu\lambda}du\right) \cdot \left(\int_0^\infty d(u)e^{-iu\lambda}du\right)^* - F(\lambda) \in D_G.$$

В тому випадку, коли одна із щільностей задана, (2.100) – (2.101) – це задачі на екстремум лише по змінній $b = \{b(u), u \geq 0\}$.

Теорема 2.18. *Спектральна щільність $F^0(\lambda)$, що допускає канонічну факторизацію (2.92), (2.93) при заданій регулярній щільності $G(\lambda)$, найменш сприятлива в класі D_F для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо*

$$F^0(\lambda) + G(\lambda) = \left(\int_0^\infty d^0(u)e^{-iu\lambda}du\right) \cdot \left(\int_0^\infty d^0(u)e^{-iu\lambda}du\right)^*,$$

де $d^0 = \left\{d^0(u), u \geq 0\right\}$ визначаються коефіцієнтами розкладу матричної функції $b^0(\lambda)$:

$$b^0(\lambda)d^0(\lambda) = E_m,\ b^0(\lambda) = \int_0^\infty b^0(u)e^{-iu\lambda}du,$$

а $b^0 = \left\{b^0(u), u \geq 0\right\}$ – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\|C_G b^*\|^2 \to \inf, \tag{2.102}$$

$$F(\lambda) = \left(\int_0^\infty d(u)e^{-iu\lambda}du\right) \cdot \left(\int_0^\infty d(u)e^{-iu\lambda}du\right)^* - G(\lambda) \in D_F.$$

Теорема 2.19. *Спектральна щільність $G^0(\lambda)$, що допускає канонічну факторизацію (2.92), (2.94) при заданій регулярній щільності $F(\lambda)$,* *найменш сприятлива в класі D_G для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$, якщо*

$$F(\lambda) + G^0(\lambda) = \left(\int\limits_0^{\infty} d^0(u) e^{-iu\lambda} du\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\infty} d^0(u) e^{-iu\lambda} du\right)^*,$$

де $d^0 = \left\{d^0(u), u \geq 0\right\}$ *визначаються коефіцієнтами* $b^0 = \left\{b^0(u), u \geq 0\right\}$, *що є розв'язками задачі на умовний екстремум*

$$\|C_F b^*\|^2 \to \inf, \tag{2.103}$$

$$G(\lambda) = \left(\int\limits_0^{\infty} d(u) e^{-iu\lambda} du\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\infty} d(u) e^{-iu\lambda} du\right)^* - F(\lambda) \in D_G.$$

Означення 2.4. *Спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ називається мінімаксною (робастною), якщо виконуються умови*

$$h^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{(F,G) \in D} L_2^-(F+G),$$

$$\min_{h \in H_D} \sup_{(F,G) \in D} \Delta(h; F, G) = \sup_{(F,G) \in D} \Delta(h^0; F, G).$$

Найменш сприятливі спектральні щільності $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ та мінімаксна (робастна) спектральна характеристика $h^0(\lambda) \in H_D$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; F, G)$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; F^0, G^0) \geq \Delta(h^0; F^0, G^0) \geq \Delta(h^0; F, G), \forall (F, G) \in D, \forall h \in H_D$$

виконуються, коли $h^0 = h(F^0, G^0) \in H_D$, де (F^0, G^0)– розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\Delta(h(F^0, G^0); F^0, G^0) = \sup_{(F,G) \in D} \Delta(h(F^0, G^0); F, G), \tag{2.104}$$

де

$$\Delta(h(F^0, G^0); F, G) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r_G(\lambda)^\top b^0(\lambda) F(\lambda) (b^0(\lambda))^* \overline{r_G(\lambda)} d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r_F(\lambda)^\top b^0(\lambda) G(\lambda) (b^0(\lambda))^* \overline{r_F(\lambda)} d\lambda,$$

а функції $r_F(\lambda)$, $r_G(\lambda)$ обчислені за формулами (2.97), (2.99) за умови, що $F(\lambda) = F^0(\lambda)$, $G(\lambda) = G^0(\lambda)$.

Задача на умовний екстремум (2.104) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [47]

$$\Delta_D(F,G) = -\Delta(h(F^0,G^0); F,G) + \delta((F,G)|D) \to \inf, \tag{2.105}$$

де $\delta((F,G)|D)$ – індикаторна функція множини $D = D_F \times D_G$. Розв'язок цієї задачі визначається умовою $0 \in \partial\Delta_D(F^0,G^0)$, де $\partial\Delta_D(F^0,G^0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D(F,G)$ в точці (F^0,G^0).

2.3.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{0,0}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналу $A\boldsymbol{\xi}$ від векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ для множин спектральних щільностей, що характеризують обмеження на перший момент процесу:

$$D_{0,0}^1 = \left\{ (F(\lambda), G(\lambda)) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} F(\lambda) d\lambda = p, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} G(\lambda) d\lambda = q \right\},$$

$$D_{0,0}^2 = \left\{ (F(\lambda), G(\lambda)) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_{kk}(\lambda) d\lambda = q_k, k = 1, \dots, T \right\},$$

$$D_{0,0}^3 = \left\{ (F(\lambda), G(\lambda)) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle B_1, F(\lambda) \rangle \, d\lambda = p, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle B_2, G(\lambda) \rangle \, d\lambda = q \right\},$$

$$D_{0,0}^4 = \left\{ (F(\lambda), G(\lambda)) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d\lambda = P, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) d\lambda = Q \right\}.$$

З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0,G^0)$ знайдемо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ заданих множин відповідно:

$$
\begin{aligned}
b^0(\lambda)^\top r_G(\lambda)(r_G(\lambda))^*\overline{b^0(\lambda)} &= \alpha^2 E,\\
b^0(\lambda)^\top r_F(\lambda)(r_F(\lambda))^*\overline{b^0(\lambda)} &= \beta^2 E;\\
b^0(\lambda)^\top r_G(\lambda)(r_G(\lambda))^*\overline{b^0(\lambda)} &= \left\{\alpha_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T,\\
b^0(\lambda)^\top r_F(\lambda)(r_F(\lambda))^*\overline{b^0(\lambda)} &= \left\{\beta_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T;\\
b^0(\lambda)^\top r_G(\lambda)(r_G(\lambda))^*\overline{b^0(\lambda)} &= \alpha^2 B_1,\\
b^0(\lambda)^\top r_F(\lambda)(r_F(\lambda))^*\overline{b^0(\lambda)} &= \beta^2 B_2;\\
b^0(\lambda)^\top r_G(\lambda)(r_G(\lambda))^*\overline{b^0(\lambda)} &= \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*,\\
b^0(\lambda)^\top r_F(\lambda)(r_F(\lambda))^*\overline{b^0(\lambda)} &= \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^*,
\end{aligned}
$$

де $\alpha^2, \beta^2, \alpha_k^2, \beta_k^2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ – невизначені множники Лагранжа. Дані співвідношення можна переписати наступним чином:

$$
\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* = \alpha^2 d^0(\lambda)^\top\overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.106)
$$

$$
\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* = \beta^2 d^0(\lambda)^\top\overline{d^0(\lambda)}; \quad (2.107)
$$

$$
\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =
$$
$$
= d^0(\lambda)^\top\left\{\alpha_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T\overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.108)
$$

$$
\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =
$$
$$
= d^0(\lambda)^\top\left\{\beta_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T\overline{d^0(\lambda)}; \quad (2.109)
$$

$$
\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =
$$
$$
= \alpha^2 d^0(\lambda)^\top B_1\overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.110)
$$

$$\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right) \left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)^* =$$
$$= \beta^2 d^0(\lambda)^\top B_2 \overline{d^0(\lambda)}; \quad (2.111)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right) \left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* \overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.112)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right) \left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^* \overline{d^0(\lambda)}. \quad (2.113)$$

Невідомі $\alpha^2, \beta^2, \alpha_k^2, \beta_k^2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ та $b = \{b(u), u \geq 0\}$, $d = \{d(u), u \geq 0\}$ обчислюємо, користуючись рівняннями канонічної факторизації (2.92) – (2.94) щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$, $F^0(\lambda) + G^0(\lambda)$ та обмеженнями, що накладаються на щільності відповідних множин. В тому випадку, коли одна із щільностей відома, для визначення найменш сприятливої спектральної щільності $F^0(\lambda)$ або $G^0(\lambda)$ можна використати лише одне з двох співвідношень.

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.20. *Найменш сприятливі матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ в класах $D_{0,0}$ для оптимальної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ визначаються співвідношеннями* (2.106) – (2.113), (2.92) – (2.94), (2.100), (2.101). *Якщо відома матриця спектральних щільностей $G(\lambda)$ ($F(\lambda)$), що допускає канонічну факторизацію* (2.94) (*(4.93)*), *то найменш сприятливі матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda) \in D_0$ ($G^0(\lambda) \in D_0$) визначаються співвідношеннями* (2.106), (2.108), (2.110), (2.112), (2.92) – (2.94), (2.102) (*або* (2.107), (2.109), (2.111), (2.113), (2.92) – (2.94), (2.103)). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки $A\boldsymbol{\xi}$ обчислюється за формулами* (2.97), (2.99).

2.3.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{F_1}^{F_2} \times D_\varepsilon$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналу $A\boldsymbol{\xi}$ від векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ для наступних множин спектральних щільностей, що описують смугову модель та модель "ε – забруднення" стохастичних процесів:

$$D_{F_1}^{F_2\,1} = \left\{ F(\lambda) \middle| \operatorname{Tr} F_1(\lambda) \le \operatorname{Tr} F(\lambda) \le \operatorname{Tr} F_2(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} F(\lambda) d\lambda = p \right\},$$

$$D_{\varepsilon}^{1} = \left\{ G(\lambda) \middle| \operatorname{Tr} G(\lambda) = (1-\varepsilon) \operatorname{Tr} V_1(\lambda) + \varepsilon V(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} G(\lambda) d\lambda = q \right\};$$

$$D_{F_1}^{F_2\,2} = \left\{ F(\lambda) \middle| f_{kk}^1(\lambda) \le f_{kk}(\lambda) \le f_{kk}^2(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_{\varepsilon}^{2} = \left\{ G(\lambda) \middle| g_{kk}(\lambda) = (1-\varepsilon) v_{kk}^1(\lambda) + \varepsilon v_{kk}(\lambda), \right.$$
$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_{kk}(\lambda) d\lambda = q_k, k = \overline{1,T} \right\};$$

$$D_{F_1}^{F_2\,3} = \left\{ F(\lambda) \middle| \left\langle B_1, F_1(\lambda) \right\rangle \le \left\langle B_1, F(\lambda) \right\rangle \le \left\langle B_1, F_2(\lambda) \right\rangle, \right.$$
$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle B_1, F(\lambda) \right\rangle d\lambda = p \right\},$$

$$D_{\varepsilon}^{3} = \left\{ G(\lambda) \middle| \left\langle B_2, G(\lambda) \right\rangle = (1-\varepsilon) \left\langle B_2, V_1(\lambda) \right\rangle + \varepsilon \left\langle B_2, V(\lambda) \right\rangle, \right.$$
$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle B_2, G(\lambda) \right\rangle d\lambda = q \right\};$$

$$D_{F_1}^{F_2\,4} = \left\{ F(\lambda) \middle| F_1(\lambda) \le F(\lambda) \le F_2(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d\lambda = P \right\},$$

$$D_{\varepsilon}^{4} = \left\{ G(\lambda) \middle| G(\lambda) = (1-\varepsilon) V_1(\lambda) + V(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) d\lambda = Q \right\},$$

де $F_1(\lambda), F_2(\lambda), V_1(\lambda)$ – задані матриці спектральних щільностей, а $V(\lambda)$

– невідома матриця спектральних щільностей.

З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0, G^0)$ одержимо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей $F^0(\lambda), G^0(\lambda)$ заданих множин відповідно:

$$\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= (\alpha^2 + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda))d^0(\lambda)^\top \overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.114)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= (\beta^2 + \gamma_3(\lambda))d^0(\lambda)^\top \overline{d^0(\lambda)}; \quad (2.115)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top \left\{(\alpha_k^2 + \gamma_{1k}(\lambda) + \gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T \overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.116)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top \left\{(\beta_k^2 + \gamma_{3k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T \overline{d^0(\lambda)}; \quad (2.117)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= (\alpha^2 + \gamma_1'(\lambda) + \gamma_2'(\lambda))d^0(\lambda)^\top B_1\overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.118)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= (\beta^2 + \gamma_3'(\lambda))d^0(\lambda)^\top B_2\overline{d^0(\lambda)}; \quad (2.119)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda))\overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.120)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^* + \Gamma_3(\lambda))\overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.121)$$

де м.н.

$$\gamma_1(\lambda) \le 0;\ \gamma_1(\lambda) = 0 : \operatorname{Tr} F^0(\lambda) > \operatorname{Tr} F_1(\lambda),$$
$$\gamma_2(\lambda) \ge 0;\ \gamma_2(\lambda) = 0 : \operatorname{Tr} F^0(\lambda) < \operatorname{Tr} F_2(\lambda),$$
$$\gamma_3(\lambda) \le 0;\ \gamma_3(\lambda) = 0 : \operatorname{Tr} G^0(\lambda) > (1-\varepsilon)\operatorname{Tr} V_1(\lambda);$$

$$\gamma_{1k}(\lambda) \le 0;\ \gamma_{1k}(\lambda) = 0 : f^0_{kk}(\lambda) > f^1_{kk}(\lambda),$$
$$\gamma_{2k}(\lambda) \ge 0;\ \gamma_{2k}(\lambda) = 0 : f^0_{kk}(\lambda) < f^2_{kk}(\lambda),$$
$$\gamma_{3k}(\lambda) \le 0;\ \gamma_{3k}(\lambda) = 0 : g^0_{kk}(\lambda) > (1-\varepsilon)v^1_{kk}(\lambda);$$

$$\gamma_1'(\lambda) \le 0;\ \gamma_{13}(\lambda) = 0 : \left\langle B_1, F^0(\lambda)\right\rangle > \left\langle B_1, F_1(\lambda)\right\rangle,$$
$$\gamma_2'(\lambda) \ge 0;\ \gamma_{23}(\lambda) = 0 : \left\langle B_1, F^0(\lambda)\right\rangle < \left\langle B_1, F_2(\lambda)\right\rangle,$$
$$\gamma_3'(\lambda) \le 0;\ \gamma_{33}(\lambda) = 0 : \left\langle B_2, G^0(\lambda)\right\rangle > (1-\varepsilon)\left\langle B_2, V_1(\lambda)\right\rangle;$$

$$\Gamma_1(\lambda) \le 0;\ \Gamma_1(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) > F_1(\lambda),$$
$$\Gamma_2(\lambda) \ge 0;\ \Gamma_2(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) < F_2(\lambda),$$
$$\Gamma_3(\lambda) \le 0;\ \Gamma_3(\lambda) = 0 : G^0(\lambda) > (1-\varepsilon)G_1(\lambda).$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.21. *Найменш сприятливі матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ в класах $D_{F_1}^{F_2} \times D_\varepsilon$ для оптимальної фільтрації функціонала $A\boldsymbol{\xi}$ визначаються співвідношеннями* (2.114) – (2.121), (2.92)

– (2.94), (2.100), (2.101). *Якщо відома матриця спектральних щільностей* $G(\lambda)$ *(*$F(\lambda)$*), що допускає канонічну факторизацію* (2.94) *((4.93)), то найменш сприятливі матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda) \in D_{F_1}^{F_2}$ *(*$G^0(\lambda) \in D_\varepsilon$*) визначаються співвідношеннями* (2.114), (2.116), (2.118), (2.120), (2.92) – (2.94), (2.102) *(* (2.115), (2.117), (2.119), (2.121), (2.92) – (2.94), (2.103)*). Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки* $A\boldsymbol{\xi}$ *обчислюється за формулами* (2.97), (2.99).

2.3.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{1\varepsilon_1} \times D_{2\varepsilon_2}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналу $A\boldsymbol{\xi}$ для множин спектральних щільностей, які описують моделі „ε – околу” в просторах L_1, L_2 стохастичних процесів:

$$D_{1\varepsilon_1}^1 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - F_1(\lambda)) \right| d\lambda \leq \varepsilon_1 \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}^1 = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \mathrm{Tr}\,(G(\lambda) - G_1(\lambda)) \right|^2 d\lambda \leq \varepsilon_2 \right\};$$

$$D_{1\varepsilon_1}^2 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| f_{kk}(\lambda) - f_{kk}^1(\lambda) \right| d\lambda \leq \varepsilon_k^1,\ k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}^2 = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| g_{kk}(\lambda) - g_{kk}^1(\lambda) \right|^2 d\lambda \leq \varepsilon_k^2,\ k = \overline{1,T} \right\};$$

$$D_{1\varepsilon_1}^3 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \langle B_1, F(\lambda) - F_1(\lambda) \rangle \right| d\lambda \leq \varepsilon_1 \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}^3 = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \langle B_2, G(\lambda) - G_1(\lambda) \rangle \right|^2 d\lambda \leq \varepsilon_2 \right\};$$

$$D_{1\varepsilon_1}^4=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f_{ij}(\lambda)-f_{ij}^1(\lambda)\right|d\lambda\leq\varepsilon_{ij}^1,\ i,j=\overline{1,T}\right\},$$

$$D_{1\varepsilon_2}^4=\left\{G(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|g_{ij}(\lambda)-g_{ij}^1(\lambda)\right|^2d\lambda\leq\varepsilon_{ij}^2,\ i,j=\overline{1,T}\right\},$$

де $F_1(\lambda),G_1(\lambda)$ – задані матриці спектральних щільностей; $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_k^1,\varepsilon_k^2$, $k=\overline{1,T}$ – задані числа; $E_1=\left\{\varepsilon_{ij}^1\right\}_{i,j=1}^T$,$E_2=\left\{\varepsilon_{ij}^2\right\}_{i,j=1}^T$ – задані симетричні матриці.

З умови $0\in\partial\Delta_D(F^0,G^0)$ одержимо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей заданих множин відповідно:

$$\left(\int\limits_0^{\infty}(C_Gb^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^{\infty}(C_Gb^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^*=$$
$$=\alpha^2\gamma(\lambda)d^0(\lambda)^{\top}\overline{d^0(\lambda)},\quad(2.122)$$

$$\left(\int\limits_0^{\infty}(C_Fb^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^{\infty}(C_Fb^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^*=$$
$$=\beta^2\mathrm{Tr}\,(G^0(\lambda)-G_1(\lambda))d^0(\lambda)^{\top}\overline{d^0(\lambda)};\quad(2.123)$$

$$\left(\int\limits_0^{\infty}(C_Gb^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^{\infty}(C_Gb^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^*=$$
$$=d^0(\lambda)^{\top}\left\{\alpha_k^2\gamma_k(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T\overline{d^0(\lambda)},\quad(2.124)$$

$$\left(\int\limits_0^{\infty}(C_Fb^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)\left(\int\limits_0^{\infty}(C_Fb^*)(t)e^{-it\lambda}dt\right)^*=$$
$$=d^0(\lambda)^{\top}\left\{\beta_k^2(g_{kk}^0(\lambda)-g_{kk}^1(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T\overline{d^0(\lambda)};\quad(2.125)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)^* =$$
$$= \alpha^2 \gamma'(\lambda) d^0(\lambda)^\top B_1 \overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.126)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)^* =$$
$$= \beta^2 \left\langle B_2, G^0(\lambda) - G_1(\lambda)\right\rangle d^0(\lambda)^\top B_2 \overline{d^0(\lambda)}; \quad (2.127)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)\left(\int_0^\infty (C_G b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top \left\{\alpha_{ij}\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^T \overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.128)$$

$$\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)\left(\int_0^\infty (C_F b^*)(t) e^{-it\lambda} dt\right)^* =$$
$$= d^0(\lambda)^\top \left\{\beta_{ij}(g^0_{ji}(\lambda) - g^1_{ji}(\lambda))\right\}_{i,j=1}^T \overline{d^0(\lambda)}, \quad (2.129)$$

де

$$|\gamma(\lambda)| \leq 1; |\gamma'(\lambda)| \leq 1; |\gamma_k(\lambda)| \leq 1, k = \overline{1,T}; \left|\gamma^1_{ij}(\lambda)\right| \leq 1, i,j = \overline{1,T},$$

$$\begin{aligned}
\gamma(\lambda) &= \text{sign Tr}\,(F^0(\lambda) - F_1(\lambda)) : \text{Tr}\,(F^0(\lambda) - F_1(\lambda)) \neq 0,\\
\gamma_k(\lambda) &= \text{sign}\,(f^0_{kk}(\lambda) - f^1_{kk}(\lambda)) : f^0_{kk}(\lambda) - f^1_{kk}(\lambda) \neq 0, k = \overline{1,T},\\
\gamma'(\lambda) &= \text{sign}\,\left\langle B_1, F^0(\lambda) - F_1(\lambda)\right\rangle : \left\langle B_1, F^0(\lambda) - F_1(\lambda)\right\rangle \neq 0,\\
\gamma_{ij}(\lambda) &= \frac{f^0_{ji}(\lambda) - f^1_{ji}(\lambda)}{\left|f^0_{ij}(\lambda) - f^1_{ij}(\lambda)\right|} : f^0_{ij}(\lambda) - f^1_{ij}(\lambda) \neq 0, i,j = \overline{1,T}.
\end{aligned}$$

Невідомі множники $\alpha^2, \beta^2, \alpha^2_k, \beta^2_k, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ та функція, що задає канонічну факторизацію, визначаються з рівнянь факторизації (2.92) – (2.94), умов (2.100), (2.101) та умов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\text{Tr}\,(F(\lambda) - F_1(\lambda))|\, d\lambda = \varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{Tr}\,(G(\lambda)-G_1(\lambda))\right|^2 d\lambda=\varepsilon_2; \tag{2.130}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{kk}(\lambda)-f_{kk}^1(\lambda)\right| d\lambda=\varepsilon_k^1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_{kk}(\lambda)-g_{kk}^1(\lambda)\right|^2 d\lambda=\varepsilon_k^2, k=\overline{1,T}; \tag{2.131}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\langle B_1, F(\lambda)-F_1(\lambda)\rangle\right| d\lambda=\varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\langle B_2, G(\lambda)-G_1(\lambda)\rangle\right|^2 d\lambda=\varepsilon_2; \tag{2.132}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{ij}(\lambda)-f_{ij}^1(\lambda)\right| d\lambda=\varepsilon_{ij}^1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_{ij}(\lambda)-g_{ij}^1(\lambda)\right|^2 d\lambda=\varepsilon_{ij}^2, i,j=\overline{1,T}. \tag{2.133}$$

Отже справедлива така теорема.

Теорема 2.22. *Найменш сприятливі матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda), G^0(\lambda)$ *в класах* $D=D_{1\varepsilon_1}\times D_{2\varepsilon_2}$ *для оптимальної лінійної фільтрації функціонала* $A\boldsymbol{\xi}$ *визначаються співвідношеннями* (2.122) – (2.129), (2.130) – (2.133), (2.92) – (2.94), (2.100), (2.101). *Якщо ж відома матриця спектральних щільностей* $G(\lambda)$ *(*$F(\lambda)$*), що допускає канонічну факторизацію* (2.94) *((4.93)), то найменш сприятливі матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda)\in D_{1\varepsilon_1}$ *(*$G^0(\lambda)\in D_{2\varepsilon_2}$*) визначаються співвідношеннями* (2.122), (2.124), (2.126), (2.128), (2.130) – (2.133), (2.92) – (2.94), (2.102) *(*(2.123), (2.125), (2.127), (2.129), (2.130) – (2.133), (2.92) – (2.94), (2.103)*). Мінімаксна спектральна характеристика обчислюється за формулами* (2.97), (2.99).

2.4. Інтерполяція функціоналів від стаціонарних процесів

У цьому підрозділі досліджується задача лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання функціонала

$$A_L\boldsymbol{\xi} = \int_0^L \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(t)dt$$

від невідомих значень векторного стаціонарного стохастичного процесу $\boldsymbol{\xi}(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1}^T$ за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, L]$, де $\boldsymbol{\eta}(t) = \{\eta_k(t)\}_{k=1}^T$ – некорельований із $\boldsymbol{\xi}(t)$ векторний стаціонарний стохастичний процес.

Якщо матриці спектральних щільностей $F(\lambda), G(\lambda)$ стаціонарних процесів $\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)$ відомі точно, то до задачі оцінювання лінійного функціоналу доцільно застосовувати класичний метод А.М. Колмогорова, який базується на геометрії гільбертових просторів. У тому ж випадку, якщо відома лише множина можливих значень щільностей $D = D_F \times D_G$ застосовується мінімаксний підхід до задачі оцінювання, тобто шукаються такі оцінки, які мінімізують максимальне значення величини похибки.

2.4.1. Класичний метод лінійної інтерполяції

Нехай $\boldsymbol{\xi}(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1}^T$, $\boldsymbol{\eta}(t) = \{\eta_k(t)\}_{k=1}^T$ – некорельовані між собою векторні стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$, $G(\lambda) = \{g_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$, що задовольняють умову мінімальності [54]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda)^\top (F(\lambda) + G(\lambda))^{-1} \overline{b(\lambda)} d\lambda < \infty \tag{2.134}$$

для деякої ненульової векторної функції експоненціального типу:

$$b(\lambda) = \int_0^L \boldsymbol{\alpha}(t) e^{it\lambda} dt,$$

де $\boldsymbol{\alpha}(t) = \{\alpha_k(t)\}_{k=1}^T$. Така умова необхідна і достатня для того щоб була неможлива безпомилкова інтерполяція невідомих значень процесу. Позначимо через $L_2^{L-}(F)$ підпростір, породжений у просторі $L_2(F)$ функціями вигляду

$$e^{it\lambda}\delta_k, \delta_k = \{\delta_{kl}\}_{l=1}^T, k = \overline{1,T}, t \in \mathbb{R}\backslash[0, L].$$

Кожна лінійна оцінка $\hat{A}_L\boldsymbol{\xi}$ функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)+\boldsymbol{\eta}(t)$ при $t\in\mathbb{R}\backslash[0,L]$ має вигляд:

$$\hat{A}_L\boldsymbol{\xi}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)^{\top}(Z^{\xi}(d\lambda)+Z^{\eta}(d\lambda))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{T}h_k(\lambda)(Z_k^{\xi}(d\lambda)+Z_k^{\eta}(d\lambda)),$$

де $Z^{\xi}(\Delta)=\left\{Z_k^{\xi}(\Delta)\right\}_{k=1}^{T}$, $Z^{\eta}(\Delta)=\{Z_k^{\eta}(\Delta)\}_{k=1}^{T}$ – ортогональні випадкові міри процесів $\boldsymbol{\xi}(t)$ та $\boldsymbol{\eta}(t)$ відповідно, $h(\lambda)=\{h_k(\lambda)\}_{k=1}^{T}$ – спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_L\boldsymbol{\xi}$. Функція $h(\lambda)\in L_2^{L-}(F+G)$. Середньоквадратичну похибку $\Delta(h;F,G)$оцінки $\hat{A}_L\boldsymbol{\xi}$ можна обчислити за формулою

$$\begin{aligned}\Delta(h;F,G)&=E\left|A_L\boldsymbol{\xi}-\hat{A}_L\boldsymbol{\xi}\right|^2=\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(A_L(\lambda)-h(\lambda))^{\top}F(\lambda)\overline{(A_L(\lambda)-h(\lambda))}d\lambda+\\&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)^{\top}G(\lambda)\overline{h(\lambda)}d\lambda,\end{aligned}$$

де

$$A_L(\lambda)=\int\limits_{0}^{L}\boldsymbol{a}(t)e^{it\lambda}dt.$$

Спектральна характеристика $h(F,G)$ оптимальної лінійної оцінки $A_L\boldsymbol{\xi}$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(F,G)=\Delta(h(F,G);F,G)=\min_{h\in L_2^{L-}(F+G)}\Delta(h;F,G)=$$

$$=\min_{\hat{A}_L\boldsymbol{\xi}}E\left|A_L\boldsymbol{\xi}-\hat{A}_L\boldsymbol{\xi}\right|^2. \qquad (2.135)$$

Найкраща лінійна оцінка $\hat{A}_L\boldsymbol{\xi}$ є розв'язком оптимізаційної задачі (2.135). Вона характеризується двома умовами [21, 22]:

$$\hat{A}_L\boldsymbol{\xi}\in H\left[\xi_k(t)+\eta_k(t),k=\overline{1,T},t\in\mathbb{R}\backslash[0,L]\right],$$

$$A_L\boldsymbol{\xi}-\hat{A}_L\boldsymbol{\xi}\perp H\left[\xi_k(t)+\eta_k(t),k=\overline{1,T},t\in\mathbb{R}\backslash[0,L]\right], \qquad (2.136)$$

де $H\left[\xi_k(t)+\eta_k(t),k=\overline{1,T},t\in\mathbb{R}\backslash[0,L]\right]$ – підпростір, породжений випадковими величинами $\left[\xi_k(t)+\eta_k(t),k=\overline{1,T},t\in\mathbb{R}\backslash[0,L]\right]$ у гільбертовому просторі випадкових величин зі скінченим другим моментом та нульовим математичним сподіванням. Ці умови дозволяють знайти спектральну характеристику $h(F,G)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(F,G)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ у тому випадку коли відомі щільності $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ та виконується умова (2.134). Тоді

$$\begin{aligned}h(F,G)^\top &= (A_L(\lambda)^T F(\lambda) - C_L(\lambda)^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1} = \\ &= A_L(\lambda)^\top - (A_L(\lambda)^\top G(\lambda) + C_L(\lambda)^\top)\,(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1},\end{aligned} \tag{2.137}$$

$$\begin{aligned}\Delta(F,G) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} &(A_L(\lambda)^\top G(\lambda) + C_L(\lambda)^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}F(\lambda)\times \\ &\times(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}(A_L(\lambda)^\top G(\lambda)+C_L(\lambda)^\top)^* d\lambda+ \\ +\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} &(A_L(\lambda)^\top F(\lambda) - C_L(\lambda)^\top)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}G(\lambda)\times \\ &\times(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}(A_L(\lambda)^\top G(\lambda)+C_L(\lambda)^\top)^* d\lambda = \\ &= \langle B_L c, c\rangle + \langle R_L a, a\rangle,\end{aligned} \tag{2.138}$$

де

$$C_L(\lambda) = \int\limits_0^L \boldsymbol{c}(t)e^{it\lambda}dt,\ \boldsymbol{c}(t) = (B_L^{-1}D_L a)(t),\ 0\le t\le L,$$

$$(B_L a)(t)^\top = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^L\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{a}(u)^\top (F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}e^{i(u-t)\lambda}d\lambda du,$$

$$(D_L a)(t)^\top = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^L\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{a}(u)^\top F(\lambda)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}e^{i(u-t)\lambda}d\lambda du,$$

$$(R_L a)(t)^\top = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^L\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{a}(u)^\top F(\lambda)(F(\lambda)+G(\lambda))^{-1}G(\lambda)e^{i(u-t)\lambda}d\lambda du,$$

$$0\le t\le L,$$

$$\langle B_L c, c\rangle = \sum_{k=1}^{T}\langle (B_L c)_k(t), c_k(t)\rangle, \langle R_L a, a\rangle = \sum_{k=1}^{T}\langle (R_L a)_k(t), a_k(t)\rangle,$$

де $\langle a(t), b(t)\rangle$ – позначення скалярного добутку у просторі $L_2([0,L])$.

Теорема 2.23. *Нехай* $\boldsymbol{\xi}(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1}^T$, $\boldsymbol{\eta}(t) = \{\eta_k(t)\}_{k=1}^T$ *– некорельовані між собою стаціонарні стохастичні векторні процеси, які мають спектральні щільності* $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$, $G(\lambda) = \{g_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$, *що задовольняють умову* (2.134)*. Спектральна характеристика* $h(F,G)$ *та величина середньоквадратичної похибки* $\Delta(F,G)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$ *від невідомих значень процесу* $\boldsymbol{\xi}(t)$ *за даними спо-*

стережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)+\boldsymbol{\eta}(t)$, $t \in \mathbb{R}\backslash[0,L]$ обчислюється за формулами (2.137), (2.138).

Наслідок 2.1. *Нехай $\boldsymbol{\xi}(t) = \{\xi_k(t)\}_{k=1}^{T}$ – векторнозначний стаціонарний стохастичний процес, який має спектральну щільність $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$, що задовольняє умову мінімальності*

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda)^{\top} F(\lambda)^{-1}\overline{b(\lambda)}d\lambda < \infty$$

для деякої ненульової векторної функції експоненціального типу:

$$b(\lambda) = \int_{0}^{L} \boldsymbol{\alpha}(t)e^{it\lambda}dt.$$

Спектральна характеристика $h(F)$ та величина середньоквадратичної похибки $\Delta(F)$ оптимальної оцінки функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ від невідомих значень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за даними спостережень $\boldsymbol{\xi}(t)$, $t \in \mathbb{R}\backslash[0,L]$ обчислюється за формулами:

$$h(F)^{\top} = A_L(\lambda)^{\top} - C_L(\lambda)^{\top}(F(\lambda))^{-1}, \tag{2.139}$$

$$\Delta(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_L(\lambda)^{\top}(F(\lambda))^{-1}\overline{C_L(\lambda)}d\lambda = \langle B_L a, a\rangle = \langle c, a\rangle\,, \tag{2.140}$$

де

$$C_L(\lambda) = \int_{0}^{L} \boldsymbol{c}(t)e^{it\lambda}dt,\ \boldsymbol{c}(t) = (B_L^{-1}a)(t),\ 0 \le t \le L,$$

$$(B_L a)(t)^{\top} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{L}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{a}(u)^{\top}(F(\lambda))^{-1}e^{i(u-t)\lambda}d\lambda du, 0 \le t \le L,$$

$$\langle c, a\rangle = \sum_{k=1}^{T} \langle c_k(t), a_k(t)\rangle\,.$$

Приклад 2.14. Розглянемо випадковий процес $\boldsymbol{\zeta}(t) = (\zeta_1(t),\ \zeta_2(t))$, де $\zeta_1(t) = \xi(t)$ – стаціонарний випадковий процес зі спектральною щільністю $f(\lambda)$, а $\zeta_2(t) = \xi(t) + \eta(t)$, де $\eta(t)$ – некорельований із $\xi(t)$ стаціонарний випадковий процес зі спектральною щільністю $g(\lambda)$. Маємо матрицю спектральних щільностей:

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f(\lambda) \\ f(\lambda) & f(\lambda) + g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Її визначник $D = |F(\lambda)| = f(\lambda)\, g(\lambda)$, а обернена матриця

$$(F(\lambda))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{f(\lambda)+g(\lambda)}{f(\lambda)\, g(\lambda)} & \frac{-1}{g(\lambda)} \\ \frac{-1}{g(\lambda)} & \frac{1}{g(\lambda)} \end{pmatrix}.$$

Необхідно оцінити таку випадкову величину

$$A_1\boldsymbol{\zeta} = \int\limits_0^1 \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\zeta}(t)dt$$

за даними спостережень $\boldsymbol{\zeta}(t)$ при $t \in \mathbb{R} \backslash [0, 1]$. Нехай $\boldsymbol{a}(t) = (1,\ 1)$ і нехай

$$f(\lambda) = \frac{P_1}{\lambda^2 + \alpha_1^2}, \quad g(\lambda) = \frac{P_2}{\lambda^2 + \alpha_2^2}.$$

Тоді

$$A_1(\lambda) = \frac{e^{i\lambda} - 1}{i\lambda}\boldsymbol{a}(t),$$

і функції $\boldsymbol{c}(t) = (c_1(t),\ c_2(t))^\top$ знаходяться з рівняння

$$(B_1 c)(t) = \boldsymbol{a}(t),$$

де

$$(B_1 c)(t)^\top = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c}(u)^\top (F(\lambda))^{-1} e^{i(u-t)\lambda} d\lambda du.$$

Звідси маємо таку систему інтегральних рівнянь відносно $c_1(t)$ та $c_2(t)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} c_1(u) \frac{\alpha_1^2 + \lambda^2}{P_1}\, e^{i(u-t)\lambda} d\lambda du = 2,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} (c_2(u) - c_1(u)) \frac{\alpha_2^2 + \lambda^2}{P_1}\, e^{i(u-t)\lambda} d\lambda du = 1.$$

Від інтегральних рівнянь можемо перейти до наступних диференціальних рівнянь

$$c_1(t) = P_1 x(t), x''(t) - \alpha_1 x(t) + 2 = 0, x(0) = x(1) = 0,$$

$$c_2(t) = c_1(t) + P_2 y(t), y''(t) - \alpha_2 y(t) + 1 = 0, y(0) = y(1) = 0.$$

Звідки

$$c_1(t) = \frac{2P_1}{\alpha_1^2}\left(\frac{e^{\alpha_1}-1}{e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1}}e^{-\alpha_1 t} - \frac{e^{-\alpha_1}-1}{e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1}}e^{\alpha_1 t} + 1\right),$$

$$c_2(t) = c_1(t) + \frac{P_2}{\alpha_2^2}\left(\frac{e^{\alpha_2}-1}{e^{-\alpha_2}-e^{\alpha_2}}e^{-\alpha_2 t} - \frac{e^{-\alpha_2}-1}{e^{-\alpha_2}-e^{\alpha_2}} + 1\right).$$

Порахуємо спектральну характеристику оптимальної оцінки випадкової величини $A_1\boldsymbol{\zeta}$:

$$h(F)^\top = A_1(\lambda)^\top - C_1(\lambda)^\top (F(\lambda))^{-1} = (h_1(\lambda),\ h_2(\lambda)),$$

де

$$h_1(\lambda) = (h_1 - h_2) + (h_1 - h_2)e^{i\lambda},\ h_2(\lambda) = h_2 + h_2 e^{i\lambda},$$
$$h_1 = \frac{2}{\alpha_1(e^{-\alpha_1} - e^{\alpha_1})}(2 - e^{\alpha_1} - e^{-\alpha_1}),$$
$$h_2 = \frac{1}{\alpha_2(e^{-\alpha_2} - e^{\alpha_2})}(2 - e^{\alpha_2} - e^{-\alpha_2}).$$

Отже найкраща оцінка випадкової величини $A_1\boldsymbol{\zeta}$ має вигляд

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\zeta} = (h_1 - h_2)\zeta_1(0) + h_2\zeta_2(0) + (h_1 - h_2)\zeta_1(1) + h_2\zeta_2(1).$$

Похибка найкращої оцінки дорівнює

$$\Delta(F) = \langle c\,,\, a\rangle = \frac{4P_1}{\alpha_1^2}\left(1 + \frac{2(1 - e^{-\alpha_1})(e^{\alpha_1} - 1)}{\alpha_1(e^{-\alpha_1} - e^{\alpha_1})}\right) +$$
$$+\frac{P_2}{\alpha_2^2}\left(1 + \frac{2(1 - e^{-\alpha_2})(e^{\alpha_2} - 1)}{\alpha_2(e^{-\alpha_2} - e^{\alpha_2})}\right).$$

$\diamondsuit$

Приклад 2.15. Нехай у попередньому прикладі $\boldsymbol{a}(t) = (1,\ 1 - t)$. Тоді

$$c_1(t) = P_1\left(Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{\alpha_1 t} - \frac{1}{\alpha_1^2}t + \frac{2}{\alpha_1^2}\right),$$

$$A = \frac{1}{\alpha_1^2}\frac{2e^{\alpha_1} - 1}{e^{-\alpha_1} - e^{\alpha_1}},\ B = -\frac{1}{\alpha_1^2}\frac{2e^{-\alpha_1} - 1}{e^{-\alpha_1} - e^{\alpha_1}},$$

$$c_2(t) = c_1(t) + P_2\left(Ce^{-\alpha_2 t} + De^{\alpha_2 t} - \frac{1}{\alpha_2^2}t + \frac{1}{\alpha_2^2}\right),$$

$$C = \frac{1}{\alpha_2^2}\frac{e^{\alpha_2}}{e^{-\alpha_2} - e^{\alpha_2}},\ D = -\frac{1}{\alpha_2^2}\frac{e^{-\alpha_2}}{e^{-\alpha_2} - e^{\alpha_2}};$$

$$A_1(\lambda)^\top = \left(\begin{array}{cc} \frac{e^{i\lambda}-1}{i\lambda}, & \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{i\lambda} - \frac{e^{i\lambda}}{\lambda^2} \end{array}\right).$$

Спектральна характеристика оптимальної оцінки має вигляд:

$$h(F)^\top = (h_1(\lambda),\ h_2(\lambda)),\ h_1(\lambda) = (h_1 - h_2) + (h_3 - h_4)e^{i\lambda},$$

$$h_2(\lambda) = h_2 + h_4 e^{i\lambda},$$

де

$$h_1 = \frac{2 - 2(e^{-\alpha_1} + e^{\alpha_1})}{\alpha_1(e^{-\alpha_1} - e^{\alpha_1})} - \frac{1}{\alpha_1^2},\ h_2 = -\frac{1}{\alpha_2}\frac{e^{-\alpha_2} + e^{\alpha_2}}{e^{-\alpha_2} - e^{\alpha_2}} - \frac{1}{\alpha_2^2},$$

$$h_3 = \frac{4 - (e^{-\alpha_1} + e^{\alpha_1})}{\alpha_1(e^{-\alpha_1} - e^{\alpha_1})} + \frac{1}{\alpha_1^2},\ h_4 = \frac{2}{\alpha_2(e^{-\alpha_2} - e^{\alpha_2})} + \frac{1}{\alpha_2^2}.$$

Отже найкраща оцінка випадкової величини $A_1\boldsymbol{\zeta}$ буде такою:

$$\hat{A}_1\boldsymbol{\zeta} = (h_1 - h_2)\zeta_1(0) + (h_3 - h_4)\zeta_1(1) + h_2\zeta_2(0) + h_4\zeta_2(1).$$

Середньоквадратична похибка оптимальної оцінки обчислюється за формулою:

$$\Delta(F) = 2P_1\left(\frac{1}{3\alpha_1^2} + A\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{e^{-\alpha_1}}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_1^2}\right) + B\left(-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{e^{\alpha_1}}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_1^2}\right)\right) +$$

$$+P_2\left(-\frac{1}{6\alpha_2^2} + C\left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{e^{-\alpha_2}}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_2^2}\right) + D\left(-\frac{1}{\alpha_2} + \frac{e^{\alpha_2}}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_2^2}\right)\right). \quad \diamondsuit$$

Приклад 2.16. Нехай $\boldsymbol{a}(t) = (1\ ,\ e^{\beta t})$. Тоді

$$A_1(\lambda) = \left(\begin{array}{cc} \frac{e^{i\lambda}-1}{i\lambda}, & \frac{e^{i\lambda+\beta}-1}{i\lambda+\beta} \end{array}\right)^\top,$$

$$c_1(t) = P_1\left(Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{\alpha_1 t} + \frac{e^{\beta t}}{\alpha_1^2 - \beta^2} + \frac{1}{\alpha_1^2}\right),$$

$$c_2(t) = c_1(t) + P_2\left(Ce^{-\alpha_2 t} + De^{\alpha_2 t} + \frac{e^{\beta t}}{\alpha_2^2 - \beta^2}\right),$$

$$A = \frac{1}{e^{-\alpha_1} - e^{\alpha_1}}\left(\frac{e^{\alpha_1} - e^{\beta}}{\alpha_1^2 - \beta^2} + \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1^2}\right),$$

$$B=-\frac{1}{e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1}}\left(\frac{e^{-\alpha_1}-e^{\beta}}{\alpha_1^2-\beta^2}+\frac{e^{-\alpha_1}-1}{\alpha_1^2}\right),$$

$$C=\frac{1}{e^{-\alpha_2}-e^{\alpha_2}}\frac{e^{\alpha_2}-e^{\beta}}{\alpha_2^2-\beta^2},\ D=-\frac{1}{e^{-\alpha_2}-e^{\alpha_2}}\frac{e^{-\alpha_2}-e^{\beta}}{\alpha_2^2-\beta^2}.$$

Спектральна характеристика оптимальної оцінки має вигляд:

$$h(F)^{\top}=(h_1(\lambda)\ ,\ h_2(\lambda)),\ h_1(\lambda)=(h_1-h_2)+(h_3-h_4)e^{i\lambda},$$

$$h_2(\lambda)=h_2+h_4e^{i\lambda},$$

де

$$h_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2-\beta^2}\frac{2e^{\beta}-e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1}}{e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1}}+\frac{2-e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1}}{\alpha_1(e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1})}+\frac{\beta}{\alpha_1^2-\beta^2},$$

$$h_3=\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2-\beta^2}\frac{2-e^{\beta}(e^{-\alpha_1}+e^{\alpha_1})}{e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1}}+\frac{2-e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1}}{\alpha_1(e^{-\alpha_1}-e^{\alpha_1})}-\frac{\beta e^{\beta}}{\alpha_1^2-\beta^2},$$

$$h_2=\frac{\alpha_2(2e^{\beta}-e^{-\alpha_2}-e^{\alpha_2})}{(e^{-\alpha_2}-e^{\alpha_2})(\alpha_2^2-\beta^2)}+\frac{\beta}{\alpha_2^2-\beta^2},$$

$$h_4=\frac{\alpha_2(2-e^{\beta}e^{-\alpha_2}-e^{\alpha_2})}{(e^{-\alpha_2}-e^{\alpha_2})(\alpha_2^2-\beta^2)}-\frac{\beta}{\alpha_2^2-\beta^2}e^{\beta}.$$

Середньоквадратична похибка оптимальної оцінки обчислюється за формулою:

$$\Delta(F)=2P_1\left(\frac{1}{\alpha_1^2}-A\frac{e^{-\alpha_1}-1}{\alpha_1}+B\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+\frac{e^{\beta}-1}{\beta(\alpha_1^2-\beta^2)}\right)+$$

$$+P_2\left(C\frac{e^{\beta-\alpha_2}-1}{\beta-\alpha_2}+D\frac{e^{\beta+\alpha_2}-1}{\beta+\alpha_2}+\frac{e^{2\beta}-1}{2\beta(\alpha_2^2-\beta^2)}\right). \qquad \diamondsuit$$

2.4.2. Мінімаксний метод лінійної інтерполяції

Щоб користуватись формулами (2.134) – (2.140) і обчислювати спектральну характеристику та середньоквадратичну похибку оптимальної оцінки функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ потрібно знати спектральні щільності $F(\lambda)$ та $G(\lambda)$ стаціонарних процесів. Мінімаксний підхід до задач оцінювання доцільно застосовувати в тому випадку, коли точні значення щільностей невідомі, а відомо лише що вони є елементами деякого класу спектральних щільностей $D=D_F\times D_G$. Замість того, щоб шукати оцінку, яка була б оптимальною для деяких спектральних щільностей, ми шукаємо оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх спектральних щільностей з даного класу D

Означення 2.5. *Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_F \times D_G$ щільності $F^0(\lambda) \in D_F, G^0(\lambda) \in D_G$ називаються найменш сприятливими, якщо виконується співвідношення:*

$$\Delta\left(F^0, G^0\right) = \Delta\left(h\left(F^0, G^0\right); F^0, G^0\right) = \max_{(F,G)\in D} \Delta\left(h\left(F, G\right); F, G\right).$$

Означення 2.6. *Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_F \times D_G$ спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ називається мінімаксною (робастною), якщо*

$$h^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{(F,G)\in D} L_2^{L-}(F+G),$$

$$\min_{h\in H_D} \max_{(F,G)\in D} \Delta(h; F, G) = \max_{(F,G)\in D} \Delta\left(h^0; F, G\right).$$

Теорема 2.24. *Спектральні щільності $F^0(\lambda), G^0(\lambda)$ найменш сприятливі в $D = D_F \times D_G$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$, якщо матричні функції*

$$(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^{-1}, F^0(\lambda)(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^{-1}, F^0(\lambda)(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^{-1}G^0(\lambda)$$

задають B_L^0, D_L^0, R_L^0, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\begin{aligned} &\max_{(F,G)\in D}(\left\langle D_L a, B_L^{-1} D_L a\right\rangle + \langle R_L a, a\rangle) = \\ &= \left\langle D_L^0 a, (B_L^0)^{-1} D_L^0 a\right\rangle + \left\langle R_L^0 a, a\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.141}$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(F^0, G^0)$ можна обчислити за формулою (2.137) *за умови, що $h(F^0, G^0) \in H_D$.*

Теорема 2.25. *Спектральна щільність $F^0(\lambda) \in D_F$ така, що задовольняє умову мінімальності, є найменш сприятливою в D_F для оптимальної інтерполяції функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень $\boldsymbol{\xi}(t)$, $t \in \mathbb{R}\backslash[0, L]$, якщо матрична функція $(F^0(\lambda))^{-1}$ задає B_L^0, що визначає розв'язок задачі*

$$\max_{F\in D_F} \left\langle (B_L^{-1} a, a\right\rangle = \left\langle (B_L^0)^{-1} a, a\right\rangle. \tag{2.142}$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(F^0)$ можна обчислити за формулою (2.139) *за умови, що $h(F^0) \in H_D$.*

Найменш сприятливі щільності $F^0(\lambda), G^0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h\left(F^0, G^0\right)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; F, G)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta\left(h^0; F, G\right) \leq \Delta\left(h^0; F^0, G^0\right) \leq \Delta\left(h; F^0, G^0\right) \forall h \in H_D, \forall F \in D_F, \forall G \in D_G$$

виконуються, коли $h^0 = h(F^0, G^0)$, $h\left(F^0, G^0\right) \in H_D$ і $\left(F^0, G^0\right)$ є розв'язком задачі на умовний екстремум:

$$\sup_{(F,G)\in D} \Delta\left(h\left(F^0, G^0\right); F, G\right) = \Delta\left(h\left(F^0, G^0\right); F^0, G^0\right), \tag{2.143}$$

де

$$\begin{gathered}\Delta\left(h\left(F^0, G^0\right); F, G\right) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) + C_L^0(\lambda)^\top)(F^0(\lambda) + G^0(\lambda))^{-1} F(\lambda) \times \\ \times (F^0(\lambda) + G^0(\lambda))^{-1} (A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) + C_L^0(\lambda)^\top)^* d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top)(F^0(\lambda) + G^0(\lambda))^{-1} G(\lambda) \times \\ \times (F^0(\lambda) + G^0(\lambda))^{-1} (A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top)^* d\lambda.\end{gathered}$$

Задача на умовний екстремум (2.143) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [47]

$$\Delta_D(F, G) = -\Delta(h(F^0, G^0); F, G) + \delta((F, G)|D) \to \inf, \tag{2.144}$$

де $\delta((F, G)|D)$ – індикаторна функція множини $D = D_F \times D_G$. Розв'язок цієї задачі визначається умовою: $0 \in \partial\Delta_D(F^0, G^0)$, де $\partial\Delta_D(F^0, G^0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D(F, G)$ в точці (F^0, G^0).

Теорема 2.26. *Нехай $\left(F^0, G^0\right)$ – це розв'язок екстремальної задачі (2.144). Спектральні щільності $F^0(\lambda), G^0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D = D_F \times D_G$, а спектральна характеристика $h^0 = h(F^0, G^0)$ мінімаксною для оптимального оцінювання $A_L\boldsymbol{\xi}$, якщо справджується те, що $h(F^0, G^0) \in H_D$.*

Теорема 2.27. *Спектральна щільність $F^0(\lambda) \in D_F$ така, що задовольняє умову мінімальності, є найменш сприятливою в D_F для оптимальної інтерполяції функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень $\boldsymbol{\xi}(t)$, $t \in \mathbb{R}\backslash[0, L]$, якщо $F^0(\lambda)$ є розв'язком екстремальної задачі*

$$\sup_{F\in D_F} \Delta\left(h\left(F^0\right); F\right) = \Delta\left(h\left(F^0\right); F^0\right), \tag{2.145}$$

де

$$\Delta\left(h\left(F^0\right);F\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}C_L^0(\lambda)^\top F^0(\lambda)^{-1}F(\lambda)^{-1}F^0(\lambda)^{-1}\overline{C_L^0(\lambda)}d\lambda.$$

Спектральна характеристика $h^0=h(F^0)$є мінімаксною для оптимального оцінювання $A_L\boldsymbol{\xi}$, якщо $h(F^0)\in H_D$.

2.4.3. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{0,0}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень $\boldsymbol{\xi}(t)+\boldsymbol{\eta}(t)$ при $t\in\mathbb{R}\backslash[0,L]$ за умови, що матриці спектральних щільностей $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ векторних стаціонарних процесів $\boldsymbol{\xi}(t)$, $\boldsymbol{\eta}(t)$ належать класам $D_{0,0}=D_F^0\times D_G^0$:

$$D_{0,0}^1=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Tr}F(\lambda)d\lambda=p,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Tr}G(\lambda)d\lambda=q\right.\right\},$$

$$D_{0,0}^2=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{kk}(\lambda)d\lambda=p_k\right.,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_{kk}(\lambda)d\lambda=q_k,k=\overline{1,T}\right\},$$

$$D_{0,0}^3=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\langle B_1,F(\lambda)\right\rangle d\lambda=p,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\langle B_2,G(\lambda)\right\rangle d\lambda=q\right\},$$

$$D_{0,0}^4=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)d\lambda=P,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\lambda)d\lambda=Q\right\}.$$

Використовуючи умову $0\in\partial\Delta_D(F^0,G^0)$ знайдемо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ заданих множин відповідно:

$$(A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda)+C_L^0(\lambda)^\top)^*(A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda)+C_L^0(\lambda)^\top)=$$
$$=\alpha^2(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^2,\quad(2.146)$$

$$(A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top)^*(A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top) =$$
$$= \beta^2(F^0(\lambda) + G^0(\lambda))^2; \quad (2.147)$$

$$(A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) + C_L^0(\lambda)^\top)^*(A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) + C_L^0(\lambda)^\top) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) \left\{\alpha_k^2 \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T} (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \quad (2.148)$$

$$(A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top)^*(A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) \left\{\beta_k^2 \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T} (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)); \quad (2.149)$$

$$(A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) + C_L^0(\lambda)^\top)^*(A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) + C_L^0(\lambda)^\top) =$$
$$= \alpha^2(F^0(\lambda) + G^0(\lambda))B_1^\top(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \quad (2.150)$$

$$(A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top)^*(A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top) =$$
$$= \beta^2(F^0(\lambda) + G^0(\lambda))B_2^\top(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)); \quad (2.151)$$

$$(A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) + C_L^0(\lambda)^\top)^*(A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) + C_L^0(\lambda)^\top) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda))\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^*(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \quad (2.152)$$

$$(A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top)^*(A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda))\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^*(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \quad (2.153)$$

де $\alpha^2, \beta^2, \alpha_k^2, \beta_k^2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ – невизначені множники Лагранжа.

Отже справедливі такі твердження.

Теорема 2.28. *Нехай матриці спектральних щільностей $F(\lambda) \in D_F^0$, $G(\lambda) \in D_G^0$ задовольняють умову (2.134). Матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ найменш сприятливі в класах $D_{0,0} = D_F^0 \times D_G^0$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$, якщо $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ задовольняють співвідношення (2.146) – (2.153) і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.141). Функція $h(F^0, G^0)$, що обчислена за формулою (2.137), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$.*

Теорема 2.29. *Нехай матриці спектральних щільностей $F(\lambda) \in D_F^0$*

задовольняють умову мінімальності. Матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$ найменш сприятливі в класах D_F^0 для оптимальної інтерполяції функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, L]$, якщо вони задовольняють наступні співвідношення відповідно:

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = \alpha^2 (F^0(\lambda))^2, \tag{2.154}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = F^0(\lambda) \left\{\alpha_k^2 \delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T F^0(\lambda), \tag{2.155}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = F^0(\lambda) B_1^\top F^0(\lambda), \tag{2.156}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = F^0(\lambda) \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* F^0(\lambda) \tag{2.157}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.142)*. Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(F^0)$ оптимальної оцінки $A_L\boldsymbol{\xi}$ обчислюється за формулою* (2.139)*.*

2.4.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_V^U \times D_\varepsilon$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання для множин матриць спектральних щільностей вигляду:

$$D_V^{U\,1} = \left\{ F(\lambda) \middle| \operatorname{Tr} V(\lambda) \leq \operatorname{Tr} F(\lambda) \leq \operatorname{Tr} U(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} F(\lambda) d\lambda = p \right\},$$

$$D_\varepsilon^1 = \left\{ G(\lambda) \middle| \operatorname{Tr} G(\lambda) = (1-\varepsilon) \operatorname{Tr} G_1(\lambda) + \varepsilon \operatorname{Tr} W(\lambda), \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} G(\lambda) d\lambda = q \right\};$$

$$D_V^{U^2} = \left\{ F(\lambda) \middle| v_{kk}(\lambda) \leq f_{kk}(\lambda) \leq u_{kk}(\lambda), \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, k = 1, \ldots, T \right\},$$

$$D_\varepsilon^2 = \left\{ G(\lambda) \middle| g_{kk}(\lambda) = (1-\varepsilon) g_{kk}^1(\lambda) + \varepsilon w_{kk}(\lambda), \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_{kk}(\lambda) d\lambda = q_k, k = 1, \ldots, T \right\};$$

$$D_V^{U^3} = \left\{ F(\lambda) \middle| \langle B_1, V(\lambda) \rangle \leq \langle B_1, F(\lambda) \rangle \leq \langle B_1, U(\lambda) \rangle, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle B_1, F(\lambda) \rangle d\lambda = p \right\},$$

$$D_\varepsilon^3 = \left\{ G(\lambda) \middle| \langle B_2, G(\lambda) \rangle = (1-\varepsilon) \langle B_2, G_1(\lambda) \rangle + \varepsilon \langle B_2, W(\lambda) \rangle, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle B_2, G(\lambda) \rangle d\lambda = q \right\};$$

$$D_V^{U^4} = \left\{ F(\lambda) \middle| V(\lambda) \leq F(\lambda) \leq U(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) d\lambda = P \right\},$$

$$D_\varepsilon^4 = \left\{ G(\lambda) \middle| G(\lambda) = (1-\varepsilon) G_1(\lambda) + \varepsilon W(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) d\lambda = Q \right\},$$

де $V(\lambda), U(\lambda), G_1(\lambda)$ – фіксовані матриці спектральних щільностей, $W(\lambda)$ – невідома матриця спектральних щільностей. Множини D_V^U описують "смугову" модель стохастичних процесів, а множини D_ε – модель "ε-забруднення" стохастичних процесів.

З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0, G^0)$ отримаємо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей заданих множин відповідно:

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) = (\alpha^2 + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda))^2, \tag{2.158}$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) = (\beta^2 + \gamma_3(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda))^2; \tag{2.159}$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) \left\{(\alpha_k^2 + \gamma_{1k}(\lambda) + \gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T} (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \tag{2.160}$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) \left\{(\beta_k^2 + \gamma_{3k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T} (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)); \tag{2.161}$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) =$$
$$= (\alpha^2 + \gamma_1'(\lambda) + \gamma_2'(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) B_1^\top (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \tag{2.162}$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) = (\beta^2 + \gamma_3'(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)) B_2^\top (F^0(\lambda) + G^0(\lambda)); \tag{2.163}$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) =$$
$$= (F^0(\lambda) + G^0(\lambda))(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \tag{2.164}$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) = (F^0(\lambda) + G^0(\lambda))(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^* + \Gamma_3(\lambda))(F^0(\lambda) + G^0(\lambda)), \tag{2.165}$$

де

$$a^0(\lambda) = A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) + C_L^0(\lambda)^\top, \; b^0(\lambda) = A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top,$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(\lambda) \le 0; \;\; \gamma_1(\lambda) = 0: \;\; \mathrm{Tr}\, F^0(\lambda) > \mathrm{Tr}\, V(\lambda),\\
&\gamma_2(\lambda) \ge 0; \;\; \gamma_2(\lambda) = 0: \;\; \mathrm{Tr}\, F^0(\lambda) < \mathrm{Tr}\, U(\lambda),\\
&\gamma_3(\lambda) \le 0; \;\; \gamma_3(\lambda) = 0: \;\; \mathrm{Tr}\, F^0(\lambda) > (1-\varepsilon)\mathrm{Tr}\, G_1(\lambda);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_{1k}(\lambda) \le 0; \;\; \gamma_{1k}(\lambda) = 0: \;\; f_{kk}^0(\lambda) > v_{kk}(\lambda),\\
&\gamma_{2k}(\lambda) \ge 0; \;\; \gamma_{2k}(\lambda) = 0: \;\; f_{kk}^0(\lambda) < u_{kk}(\lambda),\\
&\gamma_{3k}(\lambda) \le 0; \;\; \gamma_{3k}(\lambda) = 0: \;\; g_{kk}^0(\lambda) > (1-\varepsilon) g_{kk}^1(\lambda);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_1'(\lambda) \le 0, \gamma_1'(\lambda) = 0: \langle B_1, F^0(\lambda\rangle > \langle B_1, V(\lambda)\rangle;\\
&\gamma_2'(\lambda) \ge 0, \gamma_2'(\lambda) = 0: \langle B_1, F^0(\lambda\rangle < \langle B_1, U(\lambda)\rangle;\\
&\gamma_3'(\lambda) \le 0, \gamma_3'(\lambda) = 0: \langle B_2, G^0(\lambda)\rangle > (1-\varepsilon)\langle B_2, G_1(\lambda)\rangle;
\end{aligned}$$

$$\Gamma_1(\lambda) \leq 0;\;\; \Gamma_1(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) > V(\lambda),$$
$$\Gamma_2(\lambda) \geq 0;\;\; \Gamma_2(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) < U(\lambda),$$
$$\Gamma_3(\lambda) \leq 0;\;\; \Gamma_3(\lambda) = 0 : G^0(\lambda) > (1-\varepsilon)G_1(\lambda).$$

Отже справедливі такі твердження.

Теорема 2.30. *Нехай матриці спектральних щільностей* $F(\lambda) \in D_V^U$, $G(\lambda) \in D_\varepsilon$ *задовольняють умову* (2.134). *Матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ *найменш сприятливі в класах* $D_V^U \times D_\varepsilon$ *для оптимальної інтерполяції функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$, *якщо* $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ *задовольняють співвідношення* (2.158) – (2.165) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (2.141). *Функція* $h(F^0, G^0)$, *що обчислена за формулою* (2.137), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$.

Теорема 2.31. *Нехай матриці спектральних щільностей* $F(\lambda) \in D_V^U$ *задовольняють умову мінімальності. Матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda)$ *найменш сприятливі в класах* D_V^U *для оптимальної інтерполяції функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$ *за даними спостережень процесу* $\boldsymbol{\xi}(t)$ *при* $t \in \mathbb{R}\backslash[0, L]$, *якщо вони задовольняють наступні співвідношення відповідно:*

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = (\alpha^2 + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda))(F^0(\lambda))^2, \tag{2.166}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = F^0(\lambda) \left\{(\alpha_k^2 + \gamma_{1k}(\lambda) + \gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T F^0(\lambda), \tag{2.167}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = (\alpha^2 + \gamma_1'(\lambda) + \gamma_2'(\lambda))F^0(\lambda)B_1^\top F^0(\lambda), \tag{2.168}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = F^0(\lambda)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda))F^0(\lambda) \tag{2.169}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.142). *Мінімаксна спектральна характеристика* $h(F^0)$ *оптимальної оцінки* $A_L\boldsymbol{\xi}$ *обчислюється за формулою* (2.139).

Теорема 2.32. *Нехай матриці спектральних щільностей* $F(\lambda) \in D_\varepsilon$ *задовольняють умову мінімальності. Матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda)$ *найменш сприятливі в класах* D_ε *для оптимальної інтерполяції функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$ *за даними спостережень процесу* $\boldsymbol{\xi}(t)$ *при* $t \in \mathbb{R}\backslash[0, L]$, *якщо вони задовольняють наступні співвідношення відповідно:*

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = (\beta^2 + \gamma_3(\lambda))(F^0(\lambda))^2, \tag{2.170}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = F^0(\lambda) \left\{(\beta_k^2 + \gamma_{3k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T F^0(\lambda), \tag{2.171}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = (\beta^2 + \gamma_3'(\lambda))F^0(\lambda)B_2^\top F^0(\lambda), \qquad (2.172)$$
$$\overline{C_L^0(\lambda)} \cdot C_L^0(\lambda)^\top = F^0(\lambda)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_3(\lambda))F^0(\lambda) \qquad (2.173)$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.142). *Мінімаксна спектральна характеристика* $h(F^0)$ *оптимальної оцінки* $A_L\boldsymbol{\xi}$ *обчислюється за формулою* (2.139).

2.4.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класах $D_{1\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання для множин матриць спектральних щільностей вигляду:

$$D_{1\varepsilon_1}^1 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{Tr}\,(F(\lambda) - F_1(\lambda)|\, d\lambda \le \varepsilon_1 \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}^1 = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{Tr}\,(G(\lambda) - G_1(\lambda)|^2\, d\lambda \le \varepsilon_2 \right\};$$

$$D_{1\varepsilon_1}^2 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f_{kk}(\lambda) - f_{kk}^1(\lambda) \right| d\lambda \le \varepsilon_k^1,\ k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}^2 = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g_{kk}(\lambda) - g_{kk}^1(\lambda) \right|^2 d\lambda \le \varepsilon_k^2,\ k = \overline{1,T} \right\};$$

$$D_{1\varepsilon_1}^3 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle B_1, F(\lambda) - F_1(\lambda) \rangle|\, d\lambda \le \varepsilon_1 \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}^3 = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle B_2, G(\lambda) - G_1(\lambda) \rangle|^2\, d\lambda \le \varepsilon_2 \right\};$$

$$D_{1\varepsilon_1}^4 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f_{ij}(\lambda) - f_{ij}^1(\lambda) \right| d\lambda \le \varepsilon_{ij}^1,\ i,j = \overline{1,T} \right\},$$

$$D_{2\varepsilon_2}^4 = \left\{ G(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g_{ij}(\lambda) - g_{ij}^1(\lambda) \right|^2 d\lambda \le \varepsilon_{ij}^2,\ i,j = \overline{1,T} \right\},$$

де $F_1(\lambda), G_1(\lambda)$ – задані матриці спектральних щільностей; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_k^1, \varepsilon_k^2$ – задані числа; $E_1 = \left\{\varepsilon_{ij}^1\right\}_{i,j=1}^T, E_2 = \left\{\varepsilon_{ij}^2\right\}_{i,j=1}^T$ – задані симетричні матриці.

З умови $0 \in \partial\Delta_D(F^0, G^0)$ отримаємо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей заданих множин відповідно:

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) = \alpha^2\gamma(\lambda)(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^2, \tag{2.174}$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) = \beta^2 \mathrm{Tr}\,(G^0(\lambda)-G_1(\lambda))(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))^2; \tag{2.175}$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) = \\ = (F^0(\lambda)+G^0(\lambda))\left\{\alpha_k^2\gamma_k(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T (F^0(\lambda)+G^0(\lambda)), \tag{2.176}$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) = \\ = (F^0(\lambda)+G^0(\lambda))\left\{\beta_k^2(g_{kk}^0(\lambda)-g_{kk}^1(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T (F^0(\lambda)+G^0(\lambda)); \tag{2.177}$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) = \alpha^2\gamma'(\lambda)(F^0(\lambda)+G^0(\lambda))B_1^\top(F^0(\lambda)+G^0(\lambda)), \tag{2.178}$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) = \\ = \beta^2\left\langle B_2, G^0(\lambda)-G_1(\lambda)\right\rangle (F^0(\lambda)+G^0(\lambda))B_2^\top(F^0(\lambda)+G^0(\lambda)); \tag{2.179}$$

$$(a^0(\lambda))^* a^0(\lambda) = (F^0(\lambda)+G^0(\lambda))\left\{\alpha_{ij}\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^T (F^0(\lambda)+G^0(\lambda)), \tag{2.180}$$

$$(b^0(\lambda))^* b^0(\lambda) = (F^0(\lambda)+G^0(\lambda))\left\{\beta_{ij}(g_{ij}^0(\lambda)-g_{ij}^1(\lambda))\right\}_{i,j=1}^T (F^0(\lambda)+G^0(\lambda)), \tag{2.181}$$

де

$$a^0(\lambda) = A_L(\lambda)^\top G^0(\lambda) + C_L^0(\lambda)^\top, b^0(\lambda) = A_L(\lambda)^\top F^0(\lambda) - C_L^0(\lambda)^\top,$$

$$|\gamma(\lambda)| \le 1,\ |\gamma'(\lambda)| \le 1,\ |\gamma_k(\lambda)| \le 1,\ |\gamma_{ij}(\lambda)| \le 1,\ k=\overline{1,T},\ i,j=\overline{1,T},$$

$$\gamma(\lambda) = \mathrm{sign}\,(\mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda)-F_1(\lambda))):\ \mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda)-F_1(\lambda)) \ne 0,$$
$$\gamma_k(\lambda) = \mathrm{sign}\, f_{kk}^0(\lambda) - f_{kk}^1(\lambda)):\ f_{kk}^0(\lambda) - f_{kk}^1(\lambda) \ne 0,\ k=\overline{1,T},$$
$$\gamma'(\lambda) = \mathrm{sign}\,\left\langle B_1, F^0(\lambda)-F_1(\lambda)\right\rangle:\ \left\langle B_1, F^0(\lambda)-F_1(\lambda)\right\rangle \ne 0,$$
$$\gamma_{ij}(\lambda) = \frac{f_{ij}^0(\lambda)-f_{ij}^1(\lambda)}{\left|f_{ij}^0(\lambda)-f_{ij}^1(\lambda)\right|}:\ f_{ij}^0(\lambda)-f_{ij}^1(\lambda) \ne 0,\ i,j=\overline{1,T}.$$

Невідомі множники $\alpha^2, \beta^2, \alpha_k^2, \beta_k^2, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, k=\overline{1,T}, i,j=\overline{1,T}$ визначаються з умов:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{Tr}\,(F(\lambda)-F_1(\lambda))|\,d\lambda=\varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{Tr}\,(G(\lambda)-G_1(\lambda))|^2\,d\lambda=\varepsilon_2, \tag{2.182}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|f_{kk}(\lambda)-f^1_{kk}(\lambda)\right|d\lambda=\varepsilon^1_k,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|g_{kk}(\lambda)-g^1_{kk}(\lambda)\right|^2 d\lambda=\varepsilon^2_k,\ k=\overline{1,T}, \tag{2.183}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\langle B_1, F(\lambda)-F_1(\lambda)\rangle|\,d\lambda=\varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\langle B_2, G(\lambda)-G_1(\lambda)\rangle|\,d\lambda=\varepsilon_2, \tag{2.184}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|f_{ij}(\lambda)-f^1_{ij}(\lambda)\right|d\lambda=\varepsilon^1_{ij},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|g_{ij}(\lambda)-g^1_{ij}(\lambda)\right|^2 d\lambda=\varepsilon^2_{ij},\ i,j=\overline{1,T}. \tag{2.185}$$

Отже справедливі такі твердження.

Теорема 2.33. *Нехай матриці спектральних щільностей* $F(\lambda)\in D_{1\varepsilon_1}$, $G(\lambda)\in D_{2\varepsilon_2}$ *задовольняють умову* (2.134). *Матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda), G^0(\lambda)$ *найменш сприятливі в класах* $D=D_{1\varepsilon_1}\times D_{2\varepsilon_2}$ *для оптимальної інтерполяції функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$, *якщо* $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$ *задовольняють співвідношення* (2.174) – (2.185) *і визначають розв'язок екстремальної задачі* (2.141). *Функція* $h(F^0,G^0)$, *що обчислена за формулою* (2.137), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$.

Теорема 2.34. *Нехай матриці спектральних щільностей* $F(\lambda)\in D_{1\varepsilon_1}$ *задовольняють умову мінімальності. Матриці спектральних щільностей* $F^0(\lambda)$ *найменш сприятливі в класах* $D_{1\varepsilon_1}$ *для оптимальної інтерполяції функціонала* $A_L\boldsymbol{\xi}$ *за даними спостережень процесу* $\boldsymbol{\xi}(t)$ *при* $t\in\mathbb{R}\backslash[0,L]$, *якщо вони задовольняють наступні співвідношення відпо-*

відно:

$$\overline{C_L^0(\lambda)}\cdot C_L^0(\lambda)^\top=\alpha^2\gamma(\lambda)(F^0(\lambda))^2, \tag{2.186}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)}\cdot C_L^0(\lambda)^\top=F^0(\lambda)\left\{\alpha_k^2\gamma_k(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T F^0(\lambda), \tag{2.187}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)}\cdot C_L^0(\lambda)^\top=\alpha^2\gamma(\lambda)F^0(\lambda)B_1^\top F^0(\lambda), \tag{2.188}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)}\cdot C_L^0(\lambda)^\top=F^0(\lambda)\left\{\alpha_{ij}(\lambda)\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^T F^0(\lambda) \tag{2.189}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.142). *Мінімаксна спектральна характеристика $h(F^0)$ оптимальної оцінки $A_L\boldsymbol{\xi}$ обчислюється за формулою* (2.139).

Теорема 2.35. *Нехай матриці спектральних щільностей $F(\lambda)\in D_{2\varepsilon_2}$ задовольняють умову мінімальності. Матриці спектральних щільностей $F^0(\lambda)$ найменш сприятливі в класах $D_{2\varepsilon_2}$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_L\boldsymbol{\xi}$ за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ при $t\in\mathbb{R}\backslash[0,L]$ якщо вони задовольняють наступні співвідношення відповідно:*

$$\overline{C_L^0(\lambda)}\cdot C_L^0(\lambda)^\top=\beta^2\mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda)-G_1(\lambda))(F^0(\lambda))^2, \tag{2.190}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)}\cdot C_L^0(\lambda)^\top=F^0(\lambda)\left\{\beta_k^2(f_{kk}^0(\lambda)-g_{kk}^1(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T F^0(\lambda), \tag{2.191}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)}\cdot C_L^0(\lambda)^\top=\beta^2\left\langle B_2,F^0(\lambda)-G_1(\lambda)\right\rangle F^0(\lambda)B_2^\top F^0(\lambda), \tag{2.192}$$

$$\overline{C_L^0(\lambda)}\cdot C_L^0(\lambda)^\top=F^0(\lambda)\left\{\beta_{ij}(f_{ij}^0(\lambda)-g_{ij}^1(\lambda))\right\}_{i,j=1}^T F^0(\lambda) \tag{2.193}$$

і визначають розв'язок екстремальної задачі (2.142). *Мінімаксна спектральна характеристика $h(F^0)$ оптимальної оцінки $A_L\boldsymbol{\xi}$ обчислюється за формулою* (2.139).

2.5. Висновки

У даному розділі розглядалися задачі екстраполяції, фільтрації та інтерполяції функціоналів від векторних стаціонарних процесів. Окремо розглядався випадок спектральної визначеності, коли матриці спектральних щільностей процесів відомі точно, та випадок спектральної невизначеності, коли матриці спектральних щільностей процесів точно невідомі, а задані лише певні обмеження у вигляді опуклих множин, яким вони мають задовольняти.

При дослідженні задач екстраполяції знайдені спектральні характеристики та середньоквадратичні похибки оптимальних лінійних оцінок функціоналів

$$A\boldsymbol{\xi} = \int\limits_0^\infty \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(t)dt, \quad A_L\boldsymbol{\xi} = \int\limits_0^L \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(t)dt$$

від невідомих значень векторного стаціонарного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ для заданої матриці спектральних щільностей $F(\lambda)$, а також розглянуто задачу оцінювання функціоналів за умови спектральної невизначеності, досліджено вигляд найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик для різних заданих множин можливих значень спектральної щільності D, усі отримані результати проілюстровано на конкретних прикладах.

При дослідженні задач фільтрації знайдено спектральну характеристику та середньоквадратичну похибку оптимальної лінійної оцінки функціонала

$$A\boldsymbol{\xi} = \int\limits_0^\infty \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(-t)dt$$

від невідомих значень стаціонарного векторного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за даними спостережень процесу $\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$, де $\boldsymbol{\eta}(t)$ – некорельований із $\boldsymbol{\xi}(t)$ стаціонарний векторний процес (шум), для заданих матриць спектральних щільностей процесів $F(\lambda)$, $G(\lambda)$, та знайдено найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальних лінійних оцінок функціоналу для заданих множин можливих значень матриць спектральних щільностей, для ілюстрації отриманих результатів розглянуто конкретні приклади.

При дослідженні задач інтерполяції отримані формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної лінійної оцінки функціоналу

$$A_L\boldsymbol{\xi} = \int\limits_0^\infty \boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{\xi}(t)dt$$

від невідомих значень векторного стаціонарного стохастичного процесу $\boldsymbol{\xi}(t)$ за даними спостережень процесу за наявності некорельованого шуму $\boldsymbol{\eta}(j)$ та заданих матриць спектральних щільностей процесів, та знайдено найменш сприятливі спектральні щільності і мінімаксні спектральні характеристики оптимальних оцінок функціоналу для заданих множин D, що характеризують певні обмеження, які накладаються на матриці спектральних щільностей процесів, розглянуто конкретні приклади для ілюстрації.

Розділ 3

ДЕЯКІ ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ І РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо задачу на умовний екстремум вигляду

$$\Delta(F) \to \inf, F \in D. \tag{3.1}$$

Тут Δ – опуклий функціонал, що діє з деякого банахового простору X на розширену дійсну вісь $(-\infty,\ +\infty]$, D – деяка опукла підмножина простору X.

Введемо деякі позначення. Будемо позначати через $\delta(F|D)$ індикаторну функцію опуклої множини D, тобто

$$\delta(F|D) = \begin{cases} 0, \ F \in D, \\ +\infty, \ F \notin D. \end{cases}$$

Через $\partial\Delta(F^0)$ позначатимемо субдиференціал функціонала Δ у точці F^0, тобто множину неперервних лінійних функціоналів Φ на X таких, що

$$\Phi(F - F^0) \leq \Delta(F) - \Delta(F^0),\ \forall F \in X.$$

Для $F^0 \in D$ субдиференціал $\partial\delta(F^0)$ співпадає з множиною опорних функціоналів опуклої множини D в точці F^0, тобто множиною лінійних неперервних функціоналів Φ на X таких, що

$$\Phi(F - F^0) \leq 0,\ \forall F \in D.$$

Тоді задача на умовний екстремум (3.1) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(F) = \Delta(F) + \delta(F|D) \to \inf. \tag{3.2}$$

Розв'язок F^0 задачі (3.2) характеризується умовою $0 \in \partial\Delta_D(F^0)$, де $\partial\Delta_D(F^0)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(F)$ в точці F^0. Використовуючи дану умову можна виписати співвідношення, яким мають задовольняти розв'язки задачі (3.2), а значить і задачі (3.1). Надалі розглядаються банахові простори $L_1^{T\times T}[-\pi,\ \pi]$ та $L_1^{T\times T}(-\infty,\ \infty)$ матричних функцій $F(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$, компоненти $f_{ij}(\lambda)$ яких належать банаховому простору L_1 на відповідних проміжках. Також, надалі розглядаються множини D спеціального вигляду, для яких виконуються наступні леми про вигляд субдиференціалів відповідних індикаторних функцій.

Лема 3.1. *Нехай у просторі* $L_1^{T\times T}[-\pi,\pi]$ *задані класи множин ма-*

тричних функцій $F(\lambda)$ з обмеженнями на перший момент

$$D_0^1 = \left\{ F(\lambda) | \ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} F(\lambda) d\lambda = p \right\},$$

$$D_0^2 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, \ k = \overline{1, T} \right\},$$

$$D_0^3 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle B, \ F(\lambda) \rangle \, d\lambda = p \right\},$$

$$D_0^4 = \left\{ F(\lambda) | \ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\lambda) d\lambda = P \right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдиференціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\partial\delta(F^0 | D_0^1) = \left\{ \alpha^2 E, \ \alpha \in R \right\},$$

$$\partial\delta(F^0 | D_0^2) = \left\{ \left\{ \alpha_k^2 \delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^{T}, \ \alpha_k \in R, \ k = \overline{1, T} \right\},$$

$$\partial\delta(F^0 | D_0^3) = \left\{ \alpha^2 B, \ \alpha \in R \right\},$$

$$\partial\delta(F^0 | D_0^4) = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^*, \ \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k\}_{k=1}^{T}, \ \alpha_k \in C, \ k = \overline{1, T} \right\}.$$

Лема 3.2. *Нехай у просторі $L_1^{T \times T}[-\pi, \pi]$ задані класи множин матричних функцій $F(\lambda)$ з обмеженнями на моменти функії*

$$D_M^1 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} F(\lambda) e^{-im\lambda} d\lambda = p(i), \, i = \overline{0, M} \right\},$$

$$D_M^2 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda) e^{-im\lambda} d\lambda = p_k(i), \ i = \overline{0, M}, \ k = \overline{1, T} \right\},$$

$$D_M^3 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle B, \ F(\lambda) \rangle \, e^{-im\lambda} d\lambda = p(i), \, i = \overline{0, M} \right\},$$

$$D_M^4 = \left\{ F(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\lambda) e^{-im\lambda} d\lambda = P(i), \ i = \overline{0, M} \right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдиференціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\partial\delta(F^0|D_M^1) = \left\{ \left|\sum_{l=0}^{M} \alpha(l)e^{-il\lambda}\right|^2 E,\ \alpha(l)\in C,\ l=\overline{0,M} \right\},$$

$$\partial\delta(F^0|D_M^2) = \left\{ \left\{ \left|\sum_{l=0}^{M} \alpha_k(l)e^{-il\lambda}\right|^2 \delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^{T}, \alpha_k(l)\in C,\ l=\overline{0,M} \right\},$$

$$\partial\delta(F^0|D_M^3) = \left\{ \left|\sum_{l=0}^{M} \alpha(l)e^{-il\lambda}\right|^2 B,\ \alpha(l)\in C, l=\overline{0,M} \right\},$$

$$\partial\delta(F^0|D_M^4) = \left\{ \left(\sum_{l=0}^{M} \boldsymbol{\alpha}(l)e^{-il\lambda}\right) \left(\sum_{l=0}^{M} \boldsymbol{\alpha}(l)e^{-il\lambda}\right)^*, \boldsymbol{\alpha}(l)\in C^T, l=\overline{0,M} \right\}.$$

Лема 3.3. *Нехай у просторі $L_1^{T\times T}[-\pi,\pi]$ задані класи множин матричних функцій $F(\lambda)$ з обмеженнями на значення функцій у кожній точці $\lambda\in[-\pi,\pi]$ ("смугові" моделі). Тут $V(\lambda), U(\lambda)$ задані матриці спектральних щільностей, $v(\lambda), v_k(\lambda), u(\lambda), u_k(\lambda), k=1,\dots,T$ задані спектральні щільності, $f_{kk}(\lambda), k=1,\dots,T$ – це невідомі спектральні щільності.*

$$D_V^{U^1} = \left\{ F(\lambda)|v(\lambda)\le \operatorname{Tr} F(\lambda)\le u(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} F(\lambda)d\lambda = p \right\},$$

$$D_V^{U^2} = \left\{ F(\lambda)|v_k(\lambda)\le f_{kk}(\lambda)\le u_k(\lambda), \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda)d\lambda = p_k, k=\overline{1,T} \right\},$$

$$D_V^{U^3} = \left\{ F(\lambda)|v(\lambda)\le \langle B,\ F(\lambda)\rangle \le u(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \langle B,\ F(\lambda)\rangle\, d\lambda = p \right\},$$

$$D_V^{U^4} = \left\{ F(\lambda)|V(\lambda)\le F(\lambda)\le U(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\lambda)d\lambda = P \right\},$$

де запис $A\ge B$ означає, що $A-B\ge 0$, тобто $A-B$ – додатно визначена матриця. Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають *субдиференціали індикаторних функцій відновідних множин*

$$\partial\delta(F^0|D_V^{U^1}) = \left\{(\alpha^2 + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda))E,\ \alpha \in R\right\},$$
$$\partial\delta(F^0|D_V^{U^2}) = \left\{\left\{(\alpha_k^2 + \gamma_{1k}(\lambda) + \gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T}, \alpha_k \in R\right\},$$
$$\partial\delta(F^0|D_V^{U^3}) = \left\{(\alpha^2 + \gamma_1'(\lambda) + \gamma_2'(\lambda))B,\ \alpha \in R\right\},$$
$$\partial\delta(F^0|D_V^{U^4}) = \left\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda), \boldsymbol{\alpha} \in C^T\right\},$$

де $\Gamma_1(\lambda), \Gamma_2(\lambda)$ *– ермітові матриці та м.н.*

$\gamma_1(\lambda) \le 0, \gamma_2(\lambda) \ge 0,\ \gamma_1'(\lambda) \le 0, \gamma_2'(\lambda) \ge 0,$

$\gamma_{1k}(\lambda) \le 0, \gamma_{2k}(\lambda) \ge 0,\ \Gamma_1(\lambda) \le 0, \Gamma_2(\lambda) \ge 0$ *м.н.,*

$\gamma_1(\lambda) = 0$ *при* $\mathrm{Tr}\, F^0(\lambda) > v(\lambda)$, $\gamma_2(\lambda) = 0$ *при* $\mathrm{Tr}\, F^0(\lambda) < u(\lambda)$;

$\gamma_{1k}(\lambda) = 0$ *при* $f_{kk}^0(\lambda) > v_{kk}(\lambda)$, $\gamma_{2k}(\lambda) = 0$ *при* $f_{kk}^0(\lambda) < u_k(\lambda)$;

$\gamma_1'(\lambda) = 0$ *при* $\left\langle B,\ F^0(\lambda)\right\rangle > v(\lambda)$, $\gamma_2'(\lambda) = 0$ *при* $\left\langle B,\ F^0(\lambda)\right\rangle < u(\lambda)$;

$\Gamma_1(\lambda) = 0$ *при* $F^0 > V(\lambda)$, $\Gamma_2(\lambda) = 0$ *при* $F^0 < U(\lambda)$.

Лема 3.4. *Нехай у просторі* $L_1^{T\times T}[-\pi,\pi]$ *задані класи множин матричних функцій* $F(\lambda)$, *що характеризуються обмеженнями на значення функцій у кожній точці* $\lambda \in [-\pi,\pi]$ *(моделі* ε*–забруднення). Тут* $W(\lambda)$ *задана матриця спектральних щільностей,* $U(\lambda)$ *– невідома матриця спектральних щільностей,* $w_k(\lambda), k = 1,\dots,T$*– задані спектральні щільності,* $u_k(\lambda), k = 1,\dots,T$ *– це невідомі спектральні щільності.*

$$D_\varepsilon^1 = \left\{F(\lambda)|\mathrm{Tr}\, F(\lambda) = (1-\varepsilon)\mathrm{Tr}\, W(\lambda) + \varepsilon\mathrm{Tr}\, U(\lambda), \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}F(\lambda)d\lambda = p\right\},$$

$$D_\varepsilon^2 = \left\{F(\lambda)|f_{kk}(\lambda) = (1-\varepsilon)w_k(\lambda) + \varepsilon u_k(\lambda),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda)d\lambda = p_k, k = \overline{1,T}\right\},$$

$$D_\varepsilon^3 = \Big\{ F(\lambda) | \left\langle B, F(\lambda) \right\rangle = (1-\varepsilon) \left\langle B, W(\lambda) \right\rangle + \varepsilon \left\langle B, U(\lambda) \right\rangle,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle B, F(\lambda) \right\rangle d\lambda = p \Big\},$$

$$D_\varepsilon^4 = \left\{ F(\lambda) | F(\lambda) = (1-\varepsilon) W(\lambda) + \varepsilon U(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\lambda) d\lambda = P \right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдиференціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\begin{aligned}
\partial\delta(F^0|D_\varepsilon^1) &= \left\{ (\alpha^2 + \gamma(\lambda))E,\ \alpha \in R \right\}, \\
\partial\delta(F^0|D_\varepsilon^2) &= \left\{ \left\{ (\alpha_k^2 + \gamma_k(\lambda))\delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^{T}, \alpha_k \in R \right\}, \\
\partial\delta(F^0|D_\varepsilon^3) &= \left\{ (\alpha^2 + \gamma'(\lambda))B,\ \alpha \in R \right\}, \\
\partial\delta(F^0|D_\varepsilon^4) &= \left\{ \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma(\lambda), \boldsymbol{\alpha} \in C^T \right\},
\end{aligned}$$

де $\Gamma(\lambda)$ *– ермітова матриця і м.н.*

$$\begin{aligned}
\gamma(\lambda) \le 0,\ \gamma'(\lambda) \le 0,\ \gamma_k(\lambda) \le 0,\ k = \overline{1,T},\ \Gamma(\lambda) \le 0,& \\
\gamma(\lambda) = 0 :\ \mathrm{Tr}\, F^0(\lambda) > (1-\varepsilon)w(\lambda);& \\
\gamma_k(\lambda) = 0 :\ f_{kk}^0(\lambda) > (1-\varepsilon)w_k(\lambda);& \\
\gamma'(\lambda) = 0 :\ \left\langle B, F^0(\lambda) \right\rangle > (1-\varepsilon)w(\lambda);& \\
\Gamma(\lambda) = 0 :\ F^0(\lambda) > (1-\varepsilon)W(\lambda).&
\end{aligned}$$

Лема 3.5. *Нехай у просторі $L_1^{T\times T}[-\pi,\pi]$ задані класи множин матричних функцій $F(\lambda)$, що характеризуються обмеженнями на значення функцій у кожній точці $\lambda \in [-\pi,\pi]$, які описують моделі ε–околу у просторі L_1. Тут $V(\lambda)$ задана матриця спектральних щільностей,*

$v_{kj}(\lambda),\ k,j=1,\dots,T$– *задані спектральні щільності.*

$$D^1_{1\varepsilon}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{Tr}(F(\lambda)-V(\lambda))|\,d\lambda\le\varepsilon\right\},$$
$$D^2_{1\varepsilon}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f_{kk}(\lambda)-v_{kk}(\lambda)|\,d\lambda\le\varepsilon_k,\ k=\overline{1,T}\right\},$$

$$D^3_{1\varepsilon}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\langle B,\ F(\lambda)-V(\lambda)\rangle|\,d\lambda\le\varepsilon\right\},$$
$$D^4_{1\varepsilon}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f_{ij}(\lambda)-v_{ij}(\lambda)|\,d\lambda\le\varepsilon_{ij},\ i,j=\overline{1,T}\right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдиференціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\partial\delta(F^0|D^1_{1\varepsilon})=\left\{\alpha^2\gamma(\lambda)E,\ \alpha\in R\right\},$$
$$\partial\delta(F^0|D^2_{1\varepsilon})=\left\{\left\{\alpha_k^2\gamma_k(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T},\ \alpha_k\in R\right\},$$
$$\partial\delta(F^0|D^3_{1\varepsilon})=\left\{\alpha^2\gamma'(\lambda)B,\ \alpha\in R\right\},$$
$$\partial\delta(F^0|D^4_{1\varepsilon})=\left\{\ \left\{\alpha_{ij}\gamma_{ij}(\lambda)\right\}_{i,j=1}^{T},\ \alpha_{ij}\in C\right\},$$

де $|\gamma(\lambda)|\le 1,\ |\gamma'(\lambda)|\le 1,\ |\gamma_k(\lambda)|\le 1,\ |\gamma_{ij}(\lambda)|\le 1,\ k=\overline{1,T},\ i,j=\overline{1,T}$ *і*

$$\gamma(\lambda)=\mathrm{sign}\,\mathrm{Tr}(F^0(\lambda)-V(\lambda)):\mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda)-V(\lambda))\ne 0;$$
$$\gamma_k(\lambda)=\mathrm{sign}(f^0_{kk}(\lambda)-v_{kk}(\lambda)):f^0_{kk}(\lambda)-v_{kk}(\lambda)\ne 0;$$
$$\gamma'(\lambda)=\mathrm{sign}\left\langle B,\ F^0(\lambda)-V(\lambda)\right\rangle:\langle B,\ F(\lambda)\rangle>\langle B,\ V(\lambda)\rangle;$$
$$\gamma_{ij}(\lambda)=\frac{f^0_{ji}(\lambda)-v_{ji}(\lambda)}{\left|f^0_{ij}(\lambda)-v_{ij}(\lambda)\right|}:f^0_{ij}(\lambda)-v_{ij}(\lambda)\ne 0.$$

Лема 3.6. *Нехай у просторі $L_1^{T\times T}[-\pi,\pi]$ задані класи множин матричних функцій $F(\lambda)$, що характеризуються обмеженнями на значення функцій у кожній точці $\lambda\in[-\pi,\pi]$, які описують моделі ε–околу у просторі L_2. Тут $W(\lambda)$ задана матриця спектральних щільностей,*

$w_{kj}(\lambda)$, $k,j=1,\dots,T$– *задані спектральні щільності.*

$$D^1_{2\varepsilon}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\mathrm{Tr}(F(\lambda)-W(\lambda)\right|^2d\lambda\le\varepsilon\right\},$$

$$D^2_{2\varepsilon}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_{kk}(\lambda)-w_{kk}(\lambda)\right|^2d\lambda\le\varepsilon_k,\ k=\overline{1,T}\right\},$$

$$D^3_{2\varepsilon}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\langle B,F(\lambda)-W(\lambda)\rangle\right|^2d\lambda\le\varepsilon\right\},$$

$$D^4_{2\varepsilon}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_{ij}(\lambda)-w_{ij}(\lambda)\right|^2d\lambda\le\varepsilon_{ij},\ i,j=\overline{1,T}\right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдиференціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\partial\delta(F^0|D^1_{2\varepsilon})=\left\{\alpha^2\mathrm{Tr}\,(F^0(\lambda)-W(\lambda))E,\ \alpha\in R\right\},$$

$$\partial\delta(F^0|D^2_{2\varepsilon})=\left\{\left\{\alpha_k^2(f^0_{kk}(\lambda)-w_{kk}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T,\ \alpha_k\in R\right\},$$

$$\partial\delta(F^0|D^3_{2\varepsilon})=\left\{\alpha^2\left\langle B,F^0(\lambda)-W(\lambda)\right\rangle B,\ \alpha\in R\right\},$$

$$\partial\delta(F^0|D^4_{2\varepsilon})=\left\{\left\{\alpha_{ij}(f^0_{ji}(\lambda)-w_{ji}(\lambda))\right\}_{i,j=1}^T,\ \alpha_k\in C\right\}.$$

Лема 3.7. *Нехай у просторі $L_1^{T\times T}[-\pi,\ \pi]$ розглядаютьcя наступні класи множин $D_{0,0}=D_0\times D_0$:*

$$D^1_{0,0}=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}\,F(\lambda)d\lambda=p,\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}\,G(\lambda)d\lambda=q\right\},$$

$$D^2_{0,0}=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_{kk}(\lambda)d\lambda=p_k,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g_{kk}(\lambda)d\lambda=q_k,k=\overline{1,T}\right\},$$

$$D^3_{0,0}=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\langle B_1,F(\lambda)\rangle\,d\lambda=p,\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\langle B_2,G(\lambda)\rangle\,d\lambda=q\right\},$$

$$D^4_{0,0}=\left\{(F(\lambda),G(\lambda))|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(\lambda)d\lambda=P,\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}G(\lambda)d\lambda=Q\right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдиференціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D^1_{0,0})=\left\{(\alpha^2E,\ \beta^2E),\ \alpha,\ \beta\in R\right\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D^2_{0,0})=\left\{\left(\left\{\alpha_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T},\ \left\{\beta_k^2\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^{T},\ \alpha_k,\ \beta_k\in R\right)\right\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D^3_{0,0})=\left\{(\alpha^2B_1,\ \beta^2B_2),\ \alpha,\ \beta\in R\right\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D^4_{0,0})=\left\{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*,\ \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^*),\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in C^T\right\}.$$

Лема 3.8. *Нехай у просторі $L_1^{T\times T}[-\pi,\pi]$ розглядаються наступні класи множин $D=D_{F_1}^{F_2}\times D_{G_1}^{G_2}$. Тут $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$, $G_1(\lambda)$, $G_2(\lambda)$ задані матриці спектральних щільностей, $f^1_{kk}(\lambda), f^2_{kk}(\lambda), g^1_{kk}(\lambda), g^2_{kk}(\lambda), k=1,\dots,T$– задані спектральні щільності.*

$$D_{F_1}^{F_2\,1}=\left\{F(\lambda)|\mathrm{Tr}F_1(\lambda)\le\mathrm{Tr}\,F(\lambda)\le\mathrm{Tr}\,F_2(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}\,F(\lambda)d\lambda=p\right\},$$

$$D_{G_1}^{G_2\,1}=\left\{G(\lambda)|\mathrm{Tr}G_1(\lambda)\le\mathrm{Tr}\,G(\lambda)\le\mathrm{Tr}\,G_2(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}\,G(\lambda)d\lambda=q\right\},$$

$$D_{F_1}^{F_2\,2}=\left\{F(\lambda)|f^1_{kk}(\lambda)\le f_{kk}(\lambda)\le f^2_{kk}(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{kk}(\lambda)d\lambda=p_k,\ k=\overline{1,T}\right\},$$

$$D_{G_1}^{G_2\,2}=\left\{G(\lambda)|g^1_{kk}(\lambda)\le g_{kk}(\lambda)\le g^2_{kk}(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_{kk}(\lambda)d\lambda=q_k,\ k=\overline{1,T}\right\};$$

$$D_{F_1}^{F_2\,3}=\left\{F(\lambda)|\left\langle B_1,\ F_1(\lambda)\right\rangle\le\left\langle B_1,\ F(\lambda)\right\rangle\le\left\langle B_1,\ F_2(\lambda)\right\rangle,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\langle B_1,\ F(\lambda)\right\rangle d\lambda=p\right\},$$

$$D_{G_1}^{G_2\,3}=\left\{G(\lambda)|\left\langle B_2,\ G_1(\lambda)\right\rangle\le\left\langle B_2,\ G(\lambda)\right\rangle\le\left\langle B_2,\ G_2(\lambda)\right\rangle,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\langle B_2,\ G(\lambda)\right\rangle d\lambda=q\right\};$$

$$D_{F_1}^{F_2}{}^4 = \left\{ F(\lambda) | F_1(\lambda) \leq F(\lambda) \leq F_2(\lambda),\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\lambda) d\lambda = P \right\},$$

$$D_{G_1}^{G_2}{}^4 = \left\{ G(\lambda) | G_1(\lambda) \leq G(\lambda) \leq G_2(\lambda),\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\lambda) d\lambda = Q \right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдиференціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\partial\delta((F^0, G^0)|D_1) = \\ = \left\{ (\alpha^2 + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda))E, (\beta^2 + \gamma_3(\lambda) + \gamma_4(\lambda))E, \alpha, \beta \in R \right\},$$

$$\partial\delta((F^0, G^0)|D_2) = \left\{ \left(\left\{ (\alpha_k^2 + \sum_{i=1}^{2} \gamma_{ik}(\lambda))\delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^{T}, \right.\right. \\ \left.\left. \left\{ (\beta_k^2 + \sum_{i=3}^{4} \gamma_{ik}(\lambda))\delta_{kl} \right\}_{k,l=1}^{T} \right), \alpha_k, \beta_k \in R \right\},$$

$$\partial\delta((F^0, G^0)|D_3) = \\ = \left\{ (\alpha^2 + \gamma_1'(\lambda) + \gamma_2'(\lambda))B, (\beta^2 + \gamma_3'(\lambda) + \gamma_4'(\lambda))B, \alpha, \beta \in R \right\},$$

$$\partial\delta((F^0, G^0)|D_4) = \\ = \left\{ (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda)), (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^* + \Gamma_3(\lambda) + \Gamma_4(\lambda)), \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in C^T \right\},$$

де $\Gamma_j(\lambda), j = \overline{1,4}$ – *ермітові матриці і*

$\gamma_j(\lambda) \leq 0, \gamma_j'(\lambda) \leq 0, \gamma_{jk}(\lambda) \leq 0, \Gamma_j(\lambda) \leq 0, j = 1, 3, k = \overline{1,T}$ *м.н.,*

$\gamma_j(\lambda) \geq 0, \gamma_j'(\lambda) \geq 0, \gamma_{jk}(\lambda) \geq 0, \Gamma_j(\lambda) \leq 0, j = 2, 4, k = \overline{1,T}$ *м.н.,*

$$\gamma_1(\lambda) = 0 : \operatorname{Tr} F^0(\lambda) > \operatorname{Tr} F_1(\lambda), \gamma_3(\lambda) = 0 : \operatorname{Tr} F^0(\lambda) < \operatorname{Tr} F_2(\lambda),$$

$$\gamma_2(\lambda) = 0 : \operatorname{Tr} G^0(\lambda) > \operatorname{Tr} G_1(\lambda), \gamma_4(\lambda) = 0 : \operatorname{Tr} G^0(\lambda) < \operatorname{Tr}\ G_2(\lambda);$$

$$\gamma_{1k}(\lambda) = 0 : f^0_{kk}(\lambda) > f^1_{kk}(\lambda), \gamma_{3k}(\lambda) = 0 : f^0_{kk}(\lambda) < f^2_{kk}(\lambda),$$
$$\gamma_{2k}(\lambda) = 0 : g^0_{kk}(\lambda) > g^1_{kk}(\lambda), \gamma_{4k}(\lambda) = 0 : g^0_{kk}(\lambda) < g^2_{kk}(\lambda);$$

$$\gamma'_1(\lambda) = 0 : \left\langle B_1, F^0(\lambda)\right\rangle > \left\langle B_1, F_1(\lambda)\right\rangle,$$
$$\gamma'_3(\lambda) = 0 : \left\langle B_1, F^0(\lambda)\right\rangle < \left\langle B_1, F_2(\lambda)\right\rangle,$$

$$\gamma'_2(\lambda) = 0 : \left\langle B_2,\ G^0(\lambda)\right\rangle > \left\langle B_2,\ G_1(\lambda)\right\rangle,$$
$$\gamma'_4(\lambda) = 0 : \left\langle B_2,\ G^0(\lambda)\right\rangle < \left\langle B_2,\ G_2(\lambda)\right\rangle;$$
$$\Gamma_1(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) > F_1(\lambda), \Gamma_3(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) < F_2(\lambda),$$
$$\Gamma_2(\lambda) = 0 : G^0(\lambda) > G_1(\lambda), \Gamma_4(\lambda) = 0 : G^0(\lambda) < G_2(\lambda).$$

Лема 3.9. *Нехай у просторі* $L_1^{T\times T}[-\pi,\pi]$ *задані класи множин матричних функцій, що характеризуються обмеженнями типу* $D = D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}$. *Тут* $U_1(\lambda)$, $V_1(\lambda)$, *задані матриці спектральних щільностей,* $u_{kk}(\lambda), v_{kk}(\lambda), k = 1,\ldots,T$*– задані спектральні щільності.*

$$D^1_{\varepsilon_1} = \left\{F(\lambda)|\mathrm{Tr}F(\lambda) = (1-\varepsilon_1)\mathrm{Tr}U_1(\lambda) + \varepsilon_1\mathrm{Tr}U(\lambda),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}F(\lambda)d\lambda = p\right\},$$

$$D^1_{\varepsilon_2} = \left\{G(\lambda)|\mathrm{Tr}G(\lambda) = (1-\varepsilon_2)\mathrm{Tr}V_1(\lambda) + \varepsilon_2\mathrm{Tr}V(\lambda),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}G(\lambda)d\lambda = q\right\};$$

$$D^2_{\varepsilon_1} = \left\{ F(\lambda) | f_{kk}(\lambda) = (1-\varepsilon_1) u^1_{kk}(\lambda) + \varepsilon_1 u_{kk}(\lambda), \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k,\ k = \overline{1,T} \right\},$$

$$D^2_{\varepsilon_2} = \left\{ G(\lambda) | g_{kk}(\lambda) = (1-\varepsilon_2) v^1_{kk}(\lambda) + \varepsilon_2 v_{kk}(\lambda), \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{kk}(\lambda) d\lambda = q_k,\ k = \overline{1,T} \right\};$$

$$D^3_{\varepsilon_1} = \left\{ F(\lambda) | \left\langle B_1,\ F(\lambda) \right\rangle = (1-\varepsilon_1) \langle B_1, U_1(\lambda) \rangle + \varepsilon_1 \left\langle B_1,\ U(\lambda) \right\rangle, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left\langle B_1,\ F(\lambda) \right\rangle d\lambda = p \right\},$$

$$D^3_{\varepsilon_2} = \left\{ G(\lambda) | \left\langle B_2,\ G(\lambda) \right\rangle = (1-\varepsilon_2) \langle B_2, V_1(\lambda) \rangle + \varepsilon_2 \left\langle B_2,\ V(\lambda) \right\rangle, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left\langle B_2,\ G(\lambda) \right\rangle d\lambda = q \right\};$$

$$D^4_{\varepsilon_1} = \left\{ F(\lambda) | F(\lambda) = (1-\varepsilon_1) U_1(\lambda) + \varepsilon_1 U(\lambda),\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\lambda) d\lambda = P \right\},$$

$$D^4_{\varepsilon_2} = \left\{ G(\lambda) | G(\lambda) = (1-\varepsilon_2) V_1(\lambda) + \varepsilon_2 V(\lambda),\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} G(\lambda) d\lambda = Q \right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдифе-

ренціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_1)=\left\{(\alpha^2+\gamma_1(\lambda))E,(\beta^2+\gamma_2(\lambda))E,\alpha,\beta\in R\right\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_2)=\Bigg\{\Bigg(\left\{(\alpha_k^2+\gamma_{1k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T,\ \left\{(\beta_k^2+\gamma_{2k}(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T,\alpha_k,\beta_k\in R\Bigg)\Bigg\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_3)=\left\{(\alpha^2+\gamma_1'(\lambda))B,(\beta^2+\gamma_2'(\lambda))B,\alpha,\beta\in R\right\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_4)=\left\{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*+\Gamma_1(\lambda)),(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^*+\Gamma_2(\lambda)),\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in C^T\right\},$$

де $\Gamma_1(\lambda),\Gamma_2(\lambda)$ *– ермітові матриці і*

$\gamma_1(\lambda)\le 0,\gamma_2(\lambda)\le 0,\ \gamma_1'(\lambda)\le 0,\gamma_2'(\lambda)\le 0,\ \gamma_{1k}(\lambda)\le 0,\gamma_{2k}(\lambda)\le 0,$ $\Gamma_1(\lambda)\le 0,\Gamma_2(\lambda)\ge 0$ *м.н.*,

$$\gamma_1(\lambda)=0:\mathrm{Tr}\,F^0(\lambda)>(1-\varepsilon_1)\mathrm{Tr}\ U_1(\lambda),$$
$$\gamma_2(\lambda)=0:\mathrm{Tr}\,G^0(\lambda)>(1-\varepsilon_2)\mathrm{Tr}\ V_1(\lambda),$$

$$\gamma_{1k}(\lambda)=0:f_{kk}^0(\lambda)>(1-\varepsilon_1)u_{kk}^1(\lambda),$$
$$\gamma_{2k}(\lambda)=0:g_{kk}^0(\lambda)>(1-\varepsilon_2)v_{kk}^1(\lambda),$$
$$\gamma_1'(\lambda)=0:\left\langle B_1,F^0(\lambda)\right\rangle>(1-\varepsilon_1)\left\langle B_1,U_1(\lambda)\right\rangle,$$
$$\gamma_2'(\lambda)=0:\left\langle B_2,G^0(\lambda)\right\rangle>(1-\varepsilon_2)\left\langle B_2,V_1(\lambda)\right\rangle,$$
$$\Gamma_1(\lambda)=0:F^0(\lambda)>(1-\varepsilon_1)U_1(\lambda),$$
$$\Gamma_2(\lambda)=0:G^0(\lambda)>(1-\varepsilon_2)V_1(\lambda).$$

Лема 3.10. *Нехай у просторі* $L_1^{T\times T}[-\pi,\ \pi]$ *розглядаються наступні класи множин* $D=D_{1\varepsilon_1}\times D_{1\varepsilon_2}$. *Тут* $F_1(\lambda)$, $G_1(\lambda)$, *задані матриці спектральних щільностей,* $f_{kj}^1(\lambda),g_{kj}^1(\lambda),k,j=1,\ldots,T$*– задані спе-*

ктральні щільності.

$$D^1_{1\varepsilon_1}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\mathrm{Tr}(F(\lambda)-F_1(\lambda))\right|d\lambda\leq\varepsilon_1\right\},$$

$$D^1_{1\varepsilon_2}=\left\{G(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\mathrm{Tr}(G(\lambda)-G_1(\lambda))\right|d\lambda\leq\varepsilon_2\right\};$$

$$D^2_{1\varepsilon_1}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_{kk}(\lambda)-f^1_{kk}(\lambda)\right|d\lambda\leq\varepsilon^1_k,\ k=\overline{1,T}\right\},$$

$$D^2_{1\varepsilon_2}=\left\{G(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|g_{kk}(\lambda)-g^1_{kk}(\lambda)\right|d\lambda\leq\varepsilon^2_k,\ k=\overline{1,T}\right\};$$

$$D^3_{1\varepsilon_1}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\langle B_1,\ F(\lambda)-F_1(\lambda)\rangle\right|d\lambda\leq\varepsilon_1\right\},$$

$$D^3_{1\varepsilon_2}=\left\{G(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\langle B_2,\ G(\lambda)-G_1(\lambda)\rangle\right|d\lambda\leq\varepsilon_2\right\};$$

$$D^4_{1\varepsilon_1}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_{ij}(\lambda)-f^1_{ij}(\lambda)\right|d\lambda\leq\varepsilon^1_{ij},\ i,j=\overline{1,T}\right\},$$

$$D^4_{1\varepsilon_2}=\left\{G(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|g_{ij}(\lambda)-g^1_{ij}(\lambda)\right|d\lambda\leq\varepsilon^2_{ij},\ i,j=\overline{1,T}\right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдиференціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_1)=\left\{(\alpha^2\gamma_1(\lambda)E,\ \beta^2\gamma_2(\lambda)E),\alpha,\beta\in R\right\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_2)=$$
$$=\left\{\left(\left\{\alpha_k^2\gamma_{1k}(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T,\left\{\beta_k^2\gamma_{2k}(\lambda)\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T\right),\alpha_k,\beta_k\in R\right\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_3)=\left\{(\alpha^2\gamma_1'(\lambda)B_1,\ \beta^2\gamma_2'(\lambda)B_2),\alpha,\beta\in R\right\},$$
$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_4)=\left\{\left(\left\{\alpha_{ij}\gamma_{ij}^1(\lambda)\right\}_{i,j=1}^T,\left\{\beta_{ij}\gamma_{ij}^2(\lambda)\right\}_{i,j=1}^T\right),\alpha_{ij},\beta_{ij}\in C\right\},$$

де

$$|\gamma_1(\lambda)|\leq 1,|\gamma_2(\lambda)|\leq 1;|\gamma_1'(\lambda)|\leq 1,|\gamma_2'(\lambda)|\leq 1;$$
$$|\gamma_{1k}(\lambda)|\leq 1,|\gamma_{2k}(\lambda)|\leq 1,k=1,\ldots,T;$$
$$\left|\gamma_{ij}^1(\lambda)\right|\leq 1,\left|\gamma_{ij}^2(\lambda)\right|\leq 1,i,j=\overline{1,T};$$

$$\gamma_1(\lambda)=\mathrm{sign}\mathrm{Tr}(F^0(\lambda)-F_1(\lambda)):\mathrm{Tr}(F^0(\lambda)-F_1(\lambda))\neq 0,$$
$$\gamma_2(\lambda)=\mathrm{sign}\mathrm{Tr}(G^0(\lambda)-G_1(\lambda)):\mathrm{Tr}(G^0(\lambda)-G_1(\lambda))\neq 0;$$
$$\gamma_{1k}(\lambda)=\mathrm{sign}(f_{kk}^0(\lambda)-f_{kk}^1(\lambda)):f_{kk}^0(\lambda)-f_{kk}^1(\lambda)\neq 0,\ k=\overline{1,T},$$
$$\gamma_{2k}(\lambda)=\mathrm{sign}(g_{kk}^0(\lambda)-g_{kk}^1(\lambda)):g_{kk}^0(\lambda)-g_{kk}^1(\lambda)\neq 0,\ k=\overline{1,T};$$
$$\gamma_1'(\lambda)=\mathrm{sign}\left\langle B_1,\ F^0(\lambda)-F_1(\lambda)\right\rangle:\left\langle B_1,\ F^0(\lambda)-F_1(\lambda)\right\rangle\neq 0,$$
$$\gamma_2'(\lambda)=\mathrm{sign}\left\langle B_2,\ G^0(\lambda)-G_1(\lambda)\right\rangle\left\langle B_2,\ G^0(\lambda)-G_1(\lambda)\right\rangle\neq 0;$$
$$\gamma_{ij}^1(\lambda)=\frac{f_{ji}^0(\lambda)-f_{ji}^1(\lambda)}{\left|f_{ij}^0(\lambda)-f_{ij}^1(\lambda)\right|}:f_{ij}^0(\lambda)-f_{ij}^1(\lambda)\neq 0,\ i,j=\overline{1,T},$$
$$\gamma_{ij}^2(\lambda)=\frac{g_{ji}^0(\lambda)-g_{ji}^1(\lambda)}{\left|g_{ij}^0(\lambda)-g_{ij}^1(\lambda)\right|}:g_{ij}^0(\lambda)-g_{ij}^1(\lambda)\neq 0,\ i,j=\overline{1,T}.$$

Лема 3.11. *Нехай у просторі $L_1^{T\times T}[-\pi,\pi]$ задані класи множин матричних функцій $F(\lambda)$, $G(\lambda)$, що характеризуються обмеженнями типу $D=D_{2\varepsilon_1}\times D_{2\varepsilon_2}$. Тут $F_1(\lambda)$, $G_1(\lambda)$, задані матриці спектральних щільностей, $f_{kj}^1(\lambda),g_{kj}^1(\lambda),k,j=1,\ldots,T$– задані спектральні щільно-*

сті.

$$D^1_{2\varepsilon_1}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F(\lambda)-F_1(\lambda)\right|^2 d\lambda\leq\varepsilon_1\right\},$$
$$D^1_{2\varepsilon_2}=\left\{G(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G(\lambda)-G_1(\lambda)\right|^2 d\lambda\leq\varepsilon_2\right\};$$
$$D^2_{2\varepsilon_1}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_{kk}(\lambda)-f^1_{kk}(\lambda)\right|^2 d\lambda\leq\varepsilon^1_k,\ k=\overline{1,T}\right\},$$
$$D^2_{2\varepsilon_2}=\left\{G(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|g_{kk}(\lambda)-g^1_{kk}(\lambda)\right|^2 d\lambda\leq\varepsilon^2_k,\ k=\overline{1,T}\right\};$$
$$D^3_{2\varepsilon_1}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\langle B_1,\ F(\lambda)-F_1(\lambda)\rangle\right|^2 d\lambda\leq\varepsilon_1\right\},$$
$$D^3_{2\varepsilon_2}=\left\{G(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\langle B_2,\ G(\lambda)-G_1(\lambda)\rangle\right|^2 d\lambda\leq\varepsilon_2\right\};$$

$$D^4_{2\varepsilon_1}=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_{ij}(\lambda)-f^1_{ij}(\lambda)\right|^2 d\lambda\leq\varepsilon^1_{ij},\ i,j=\overline{1,T}\right\},$$
$$D^4_{2\varepsilon_2}=\left\{G(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|g_{ij}(\lambda)-g^1_{ij}(\lambda)\right|^2 d\lambda\leq\varepsilon^2_{ij},i,j=\overline{1,T}\right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, $G^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдифе-

ренціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_1)=\left\{(\alpha^2\mathrm{Tr}\,(F^0-F_1),\ \beta^2\mathrm{Tr}\,(G^0-G_1),\ \alpha,\ \beta\in R\right\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_2)=\Bigg\{\Bigg(\left\{\alpha_k^2(f_{kk}^0(\lambda)-f_{kk}^1(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T,$$

$$\left\{\beta_k^2(g_{kk}^0(\lambda)-g_{kk}^1(\lambda))\delta_{kl}\right\}_{k,l=1}^T\Bigg),\alpha_k,\beta_k\in R\Bigg\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_3)=\left\{(\alpha^2\left\langle B_1,F^0-F_1\right\rangle,\ \beta^2\left\langle B_2,G^0-G_1\right\rangle),\ \alpha,\ \beta\in R\right\},$$

$$\partial\delta((F^0,G^0)|D_4)=$$

$$=\left\{\left(\left\{\alpha_{ij}(f_{ji}^0-f_{ji}^1)\right\}_{i,j=1}^T,\left\{\beta_{ij}(g_{ji}^0-g_{ji}^1)\right\}_{i,j=1}^T\right),\alpha_{ij},\beta_{ij}\in C\right\}.$$

Лема 3.12. *Нехай у просторі $L_1^{T\times T}[-\pi,\ \pi]$ розглядаються наступні класи множин:*

$$D_0^-=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[F(\lambda)\right]^{-1}d\lambda=P\right\},$$

$$D_M^-=\left\{F(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[F(\lambda)\right]^{-1}\cos(m\lambda)d\lambda=P(m),\ m=\overline{0,M}\right\},$$

$$D_V^U=\left\{F(\lambda)|V(\lambda)\leq F(\lambda)\leq U(\lambda),\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[F(\lambda)\right]^{-1}d\lambda=P\right\}.$$

Для матричних функцій $F^0(\lambda)$, що належать таким множинам, мають місце наступні співвідношення, що визначають субдиференціали індикаторних функцій відновідних множин

$$\partial\delta(F^0|D_0^-)=\left\{(F^0(\lambda)^\top)^{-1}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*(F^0(\lambda)^\top)^{-1},\ \boldsymbol{\alpha}\in C^T\right\},$$

$$\partial\delta(F^0|D_M^-)=$$

$$=\left\{(F^0(\lambda)^\top)^{-1}\,(\sum_{k=0}^{M}\boldsymbol{\alpha}(k)e^{ik\lambda})\cdot(\sum_{k=0}^{M}\boldsymbol{\alpha}(k)e^{ik\lambda})^*(F^0(\lambda)^\top)^{-1},\boldsymbol{\alpha}(k)\in C^T\right\},$$

$$\partial\delta(F^0|D_V^U)=$$

$$=\left\{(F^0(\lambda)^\top)^{-1}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^*+\Psi_1(\lambda)+\Psi_2(\lambda))(F^0(\lambda)^\top)^{-1},\boldsymbol{\alpha}\in C^T\right\},$$

де $\Psi_1(\lambda),\ \Psi_2(\lambda)$ *– ермітові матриці,* $\Psi_1(\lambda) \leq 0, \Psi_2(\lambda) \geq 0$ *м.н. і*

$$\Psi_1(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) > V(\lambda), \quad \Psi_2(\lambda) = 0 : F^0(\lambda) < U(\lambda).$$

Аналогічні леми мають місце і у випадку інтегрування на $(-\infty, +\infty)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ахиезер Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – М.: Наука, 1966. – 544 с.

2. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1965. – 656 с.

3. Гихман И.И. Теория случайных процессов. Т. 1 / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1971. – 664 с.

4. Гладышев Е.Г. О многомерных стационарных случайных процессах / Е.Г. Гладышев // Теория вероятностей и ее применения. – 1958. – Т. 4. – С. 458–462.

5. Голубев Г.А. Минимаксные линейные фильтры координат динамических объектов / Г.А. Голубев // Техническая кибернетика. – 1978. – No. 3. – С. 155–162.

6. Голубев Г.А. Минимаксная линейная фильтрация динамических процессов с дискретным временем / Г.А. Голубев // Автоматика и телемеханика. – 1984.– No. 2. – С. 72–81.

7. Голубев Г.А. Минимаксные линейные динамические фильтры минимальной размерности фазовых координат линейных динамических объектов / Г.А. Голубев // Автоматика и телемеханика. – 1986. – No. 5. – С. 50–60.

8. Голубев Г.К. Минимаксная экстраполяция последовательностей / Г.К. Голубев, М.С. Пинскер // Проблемы передачи информации. – 1983. – Т. 19. No. 47. – С. 31–42.

9. Голубев Г.К. Минимаксная экстраполяция функций / Г.К. Голубев, М.С. Пинскер // Радиотехника и электроника. – 1983. – Т. 28. No. 11. – С. 2186–2190.

10. Голубев Г.К. Экстремальные задачи минимаксного оценивания последовательностей / Г.К. Голубев, М.С. Пинскер // Проблемы передачи информации. – 1985. – Т. 21. No. 3. – С. 336 –352.

11. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций / К. Гофман. – М.: ИЛ, 1957. – 312 с.

12. Гренандер У. Теплицевы формы и их применения / У. Гренандер, Г. Сеге. – М.: ИЛ, 1961. – 308 с.

13. Гренандер У. Об одной проблеме предсказания в связи с теорией игр // Бесконечномерные антагонистические игры / [под ред. Н.Н. Воробьева]. – М.: Физматгиз, 1963. – С. 403–413.

14. Гулд С. Вариационные методы в задачах на собственные значения / Гулд С. – М.: Наука, 1970. – 328 с.

15. Данфорд Н. Линейные операторы. Т. 1 / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1962. – 896 с.

16. Дуб Дж. Вероятностные процессы / Дж. Дуб. – М.: ИЛ, 1956. – 606 с.

17. Засухин В.Н. К теории многомерных стационарных процессов/ В.Н. Засухин // ДАН СССР. – 1941. – Т. 33. – С. 435–437.

18. Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

19. Кассам С.А. Робастные методы обработки сигналов: Обзор / С.А. Кассам, Г.В. Пур // Труды института инженеров по электронике и радиоэлектронике. – 1985. – Т. 73, № 3. – С. 54–110.

20. Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем/ П.С. Кнопов. – Киев: Наукова думка, 1981. –152 с.

21. Колмогоров А.Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве / А.Н. Колмогоров // Бюллетень МГУ. – 1941. – Т. 2, № 6. – С. 1–40.

22. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей / А.Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1941. – Т. 5. – С. 3–14.

23. Колмогоров А.Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений / А.Н. Колмогоров // ДАН СССР. – 1940. – Т. 26, № 1. – С. 6–9.

24. Крейн М.Г. Об одной экстраполяционной проблеме А.Н. Колмогорова/ М.Г. Крейн // ДАН СССР. – 1945. – Т. 46, № 8. – С. 339–342.

25. Крейн М.Г. Об основной аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов/ М.Г. Крейн // ДАН СССР. – 1954. – Т. 94, № 1. – С. 13–16.

26. Куркин О.М. Минимаксная обработка информации / Куркин О.М., Коробочкин Ю.Б., Шаталов С.Д. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 214 с.

27. Масютка О. Ю. Про задачу екстраполяції векторної стаціонарної послідовності / О.Ю. Масютка// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 2. – С. 18 – 20.

28. Моклячук М.П. Об одной игре двух лиц с нулевой суммой и экстраполяции случайных последовательностей / М.П. Моклячук // Исследование операций и АСУ. – 1981. – Вып. 17. – С. 122–127.

29. Моклячук М.П. Об одной антагонистической игре и прогнозировании стационарных последовательностей в гильбертовом пространстве / М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1981. – Вып. 25. – С. 99–106.

30. Моклячук М.П. Об оценке функционала от случайной последовательности / М.П. Моклячук // Теория вероятностей и ее применения. – 1982. – № 3. – С. 210–213.

31. Моклячук М.П. О минимаксной фильтрации случайных последовательностей / М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1989. – Вып. 40. – С. 73–80.

32. Моклячук М.П. Минимаксная экстраполяция и процессы авторегресии скользящего среднего / М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1989. – Вып. 41. – С. 66–74.

33. Моклячук М.П. Минимаксная экстраполяция случайных процессов для моделей ε –загрязнения / М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – Вып. 42. – С. 95–103.

34. Моклячук М.П. Минимаксная фильтрация стационарных последовательностей с белым шумом / М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – Вып. 43. – С. 97–111.

35. Моклячук М.П. Минимаксная фильтрация линейных преобразований стационарных процессов / М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1991. – Вып. 44. – С. 96–105.

36. Моклячук М.П. О линейном прогнозе случайных процессов в условиях неопределенности / М.П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1991. – Вып. 45. – С. 89–97.

37. Моклячук М.П. Про задачу мінімаксної екстраполяції векторних послідовностей, збурених білим шумом / М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Вип. 46. – С. 88–104.

38. Моклячук М.П. Про задачу фільтрації векторних послідовностей / М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Вип. 47. – С. 104–118.

39. Моклячук М.П. О минимаксной фильтрации векторных процессов / М.П. Моклячук // Украинский математический журнал. – 1993. – Т. 45, № 3. – С. 389–397.

40. Моклячук М.П. Стохастичні послідовності авторегресії та мінімаксна інтерполяція / М.П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1993. – Вип. 48. – С. 135–146.

41. Моклячук М.П. Інтерполяція векторних стаціонарних послідовностей / М.П. Моклячук, О.Ю. Масютка// Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2005. – Вип. 73. – С. 112 – 119.

42. Моклячук М.П. Екстраполяція векторних стаціонарних послідовностей / М.П. Моклячук, О.Ю. Масютка// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 3. – С. 60 – 70.

43. Моклячук М.П. Про задачу фільтрації векторної стаціонарної послідовності / М.П. Моклячук, О.Ю. Масютка// Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2006. – Вип. 75. – С. 95 – 104.

44. Наконечный А.Г. Минимаксная оценка состояния линейных стохастических систем / А.Г. Наконечный // Теория вероятностей и ее применения. – 1978. – No. 2. – С. 455–456.

45. Наконечный А.Г. Минимаксные фильтры для линейных стохастических систем / А.Г. Наконечный // ДАН УССР. Серія А. – 1978. – No. 10. – С. 923–925.

46. Наконечный А.Г. К оценке состояния линейных стохастических систем / А.Г. Наконечный // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1978. – Вып. 18. – С. 125–130.

47. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума / Пшеничный Б.Н. – М.: Наука, 1982. – 144 с.

48. Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секевальфи–Надь. – М.: Мир, 1979. – 588 с.

49. Розанов Ю.А. Линейная экстраполяция многомерных стационарных процессов ранга 1 с дискретным временем / Ю.А. Розанов // ДАН СССР. – 1959. – Т. 125, № 2. – С. 277–280.

50. Розанов Ю.А, Об интерполировании стационарных процессов с дискретным временем/ Ю.А. Розанов // ДАН СССР. – 1960. – Т. 130, № 4. – С. 730–733.

51. Розанов Ю.А. О линейном интерполировании стационарных процессов с дискретным временем / Ю.А. Розанов // ДАН СССР. – 1957.– Т. 116, № 6.

52. Розанов Ю.А. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем / Ю.А. Розанов // Успехи математических наук. – 1958. – Т. 13, № 2. – С. 93–142.

53. Розанов Ю.А. Спектральные свойства многомерных стационарных процессов и граничные свойства аналитических матриц / Ю.А. Розанов // Теория вероятностей и ее применения. – 1960. – Т. 5, № 4. – С. 399–414.

54. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы / Розанов Ю.А. – М.: Наука, 1990. – 272 с.

55. Хеннан Э. Многомерные временные ряды / Хеннан Э. – М.: Мир, 1974. – 576 с.

56. Яглом А.М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью / А.М. Яглом // Труды Московского математического общества. – 1955. – № 4. – С. 333–374.

57. Яглом А.М. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с дискретным спектром / А.М. Яглом // Теория вероятностей и ее применения. – 1960. – Т. 5, № 3. – С. 265–292.

58. Яглом А.М. Введение в теорию стационарных случайных функций / А.М. Яглом // Успехи математических наук. – 1952. – Т. 7, № 5. – С. 3–168.

59. Яглом А.М. К вопросу о линейном интерполировании стационарных случайных последовательностей и процессов / А.М. Яглом // Успехи математических наук. – 1949. – Т. 4, № 4. – С. 171–178.

60. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций / А.М. Яглом – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1981. – 280 с.

61. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей/ М.И. Ядренко – Киев: Вища школа, 1980. – 208 с.

62. Brieman L. A note on minimax filtering / L. Brieman // Ann. Prob. – 1973. – Vol. 1. – P. 175–179.

63. Chen C.T. Robust Wiener filtering for multiple inputs with channel distribution / C.T. Chen, S.A. Kassam // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1984. – Vol. IT–30. – P. 674–677.

64. Cramer H. On the theory of stationary random processes / H. Cramer // Ann. Math. – 1940. – Vol. 41. – P. 215–230.

65. Cramer H. On linear prediction problem for certain stochastic process / H. Cramer // Arkiv Mat. – 1960. – Vol. 4, № 1. – P. 45–53.

66. Cramer H. On the structure of purely nondeterministic process / H. Cramer // Arkiv Mat. – 1961. – Vol. 4, № 2–3. – P. 246–266.

67. Franke J. On the robust prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise / J. Franke // I. Time Series Analysis. – 1984. – Vol. 5, № 4. – P. 227–244.

68. Franke J. Minimax robust prediction of discrete time series / J. Franke // Z. Wahr. Verw. Geb. – 1985. – Vol. 68. – P. 337–364.

69. Franke J. Minimax-robust filtering and finite-length robust predictors / J. Franke, H.V. Poor // Robust and Nonlinear Time Series Analysis. Lecture Notes in Statistics. – 1984. – Vol. 26. – P. 87–126.

70. Hanner O. Deterministic and non-deterministic stationary random processes / O. Hanner // Ark. Mat. – 1950. – Vol. 1, № 2. – P. 161–177.

71. Helson H. Prediction theory and Fourier series in several variables / H. Helson, D. Lowdenslager // I. Acta Math. – 1959. – Vol. 99. – P. 165–202.

72. Helson H. A problem in prediction theory / H. Helson, G. Szego // Ann. Math. Pure and Appl. – 1960. –Vol. 51. – P. 107–138.

73. Huber P.J. Robust estimation of a location parameter / P.J. Huber // Ann. Math. Stat. – 1964. – Vol. 53. – P. 73–104.

74. Kailath T. A view of three decades of linear filtering theory / T. Kailath // IEEE Trans. on Inform. Theory. – 1974. – Vol. 20, № 2. – P. 146–181.

75. Kassam S.A. Robust Wiener filters / S.A. Kassam, T.L. Lim // Franklin J. Inst. – 1977. – Vol. 304. – P. 171–185.

76. Kassam S.A. Two-dimensional filters for signal processing under modeling uncertainties / S.A. Kassam, T.L. Lim, L.J. Cimini // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. – 1980. – Vol. GE–18. – P. 331–336.

77. Kassam S.A. Robust hypothesis testing for bounded classes of probability densities/ S.A. Kassam // Trans. Inform. Theory. – 1981. – Vol. IT–27. – P. 242–247.

78. Kassam S.A. Robust signal processing for communication systems / S.A. Kassam, V.H. Poor // IEEE Commun. Mag. – 1983. – Vol. 21. – P. 20–28.

79. Kassam S.A. Robust techniques for signal processing: A survey / S.A. Kassam, V.H. Poor // Proceedings IEEE. – 1985. – Vol. 73, № 3. – P. 433–481.

80. Kallianpur G. Multiplicity and representation theory of purely nondeterministic processes / G. Kallianpur, V. Mandrekar // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – Т. 10, Вып. 4. – С. 614–644.

81. Makagon A. Infinite dimensional stationary sequences with multiplicity one / A. Makagon, M. Salehi // Ann. Acad. Sci. Fennice. Ser. A. I. Mathematica. – 1987. – Vol. 12. – P. 135–150.

82. Makagon A. Infinite dimensional stationary sequences / A. Makagon, M. Salehi // Lecture Notes in Math. – 1989. – Vol. 1391. – P. 200–238.

83. Masani P. Recent trends in multivariate prediction theory / P. Masani // J. Multivar. Analysis. – 1966. – Vol. 4. – P. 351–382.

84. Miamee A.G. On an explicit representation of the linear predictor of a weakly stationary stochastic sequence / A.G. Miamee, H. Salehi // Boletin Soc. Mat. Mexicana. – 1983. – Vol. 28. – P. 81–93.

85. Moklyachuk M. Extrapolation of multidimensional stationary processes / M. Moklyachuk, A. Masyutka// Random operators and stochastic equations. – 2006. – Vol. 14. – No 3. – P. 233 – 244.

86. Moklyachuk M. Robust estimation problems for stochastic processes / M. Moklyachuk, A. Masyutka// Theory of stochastic processes. – 2006. – Vol. 12 (28). – No. 3 – 4. – P. 88 – 113.

87. Moklyachuk M. Robust filtering of stochastic processes / M. Moklyachuk, A. Masyutka// Theory of stochastic processes. – 2007. – Vol. 13 (29). – No. 1 – 2. – P. 166 – 181.

88. Moklyachuk M. Minimax prediction problem for multidimensional stationary stochastic sequences / M. Moklyachuk, A. Masyutka// Theory of stochastic processes. – 2008. – Vol. 14 (30). – No. 3 – 4. – P. 89 – 103.

89. Niemi H. On spectral prediction error formulas for stationary random fields on / H. Niemi // Ann. Acad. Sci. Fennice. Ser. A. I. Mathematica. – 1988. – Vol. 13. – P. 243–253.

90. Poor H.V. On robust Wiener filtering / H. V. Poor // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1980. – Vol. AC–15. – P. 531–536.

91. Poor H.V. Minimax linear smoothing for capacities / H. V. Poor // Ann. Prob. – 1982. – Vol. 10. – P. 504–507.

92. Poor H.V. Minimax state estimation for linear stochastic systems with noise uncertainty / H.V. Poor, D.P. Looze // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1981. – Vol. AC–26. – P. 902–906.

93. Pourahmadi M. A matricial extension of the Helson–Szego theorem and its application in multivariate prediction / M. Pourahmadi // J. Multivar. Analysis. – 1985. – Vol. 16. – P. 265–275.

94. Pourahmadi M. Autoregressive representations of multivariate stationary stochastic processes / M. Pourahmadi // Probab. Theory and Related Fields. – 1988. – Vol. 80. – P. 315–322.

95. Robertson L.B. Orthogonal decompositions of multivariate weakly stationary stochastic processes / L.B. Robertson // Canad. J. Math. – l968. – Vol. 20, № 2. – P. 368–375.

96. Robinson E. Extremal properties of the Wold decomposition / E. Robinson // J. Math. Analysis and Applic. – 1963. – Vol. 6, № 1. – P. 75–85.

97. Rosenblatt M. The multidimensional prediction problem / M. Rosenblatt // Arc. Mat. – 1958. – Vol. 3, № 5. – P. 407–424.

98. Salehi H. Algorithms for linear interpolator and interpolation error for minimal stationary stochastic processes / H. Salehi // Ann. Probab. – 1979. – Vol. 7. – P. 840–846.

99. Taniguchi M. Robust regresion and interpolation for time series / M. Taniguchi // J. Time Ser. Analysis. – 1981. – Vol. 2. – P. 53–62.

100. Vastola K.S. On generalized band models in robust detection and filtering / K.S. Vastola, H.V. Poor // Proc. 1980 Conf. on Inform. Sciences and Systems. Princeton Univ. Princeton. – 1980. – P. 1–5.

101. Vastola K.S. An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering / K.S. Vastola, H.V. Poor // Automatica. – 1983. – Vol. 28. – P. 289–293.

102. Vastola K.S. On the p-point uncertainty class / K.S. Vastola, H.V. Poor // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1984. – Vol. IT–30. – P. 374–376.

103. Verdu S. On minimax robustness: A general approach and applications / S. Verdu, H.V. Poor // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1984. – Vol. IT–30. – P. 328–340.

104. Whittle P. The analysis of multiple stationary time series / P. Whittle // J. Roy. Statist. Soc. Ser. A. – 1953. – Vol. 15. – P. 125–139.

105. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series: With engineering application / Wiener N. – N.Y.: 1949.

106. Wiener N. The prediction theory of miltivariate stochastic processes / N. Wiener, P. Masani // I. Acta Math. – 1957. – Vol. 98. – P. 111–150.

107. Wold H. A study in the analysis of stationary time series / H. Wold // Thesis University of Stockholm. – 1938.

108. Wold H. On prediction in stationary time series / H. Wold // Ann. Math. Stat. – 1948. – Vol. 19, № 4. – P. 558–567.

109. Wong E. On the multidimensional prediction and filtering problem and the factorization of spectral matrices / E. Wong E., I.B. Thomas // J. Franklin Inst. – 1961. – Vol. 272, № 2. – P. 87–99.

110. Youla D.C. On the factorization of rational matrices / D.C. Youla // IRE Trans. Inform. Theory. – 1961. – Vol. 7. – P. 172–189.

111. Yovits M.C. Linear filter optimization with game theory considerations / M.C. Yovits, J.L. Jackson // IRE Nat. Conv. Rec. – 1955. – Vol. 4. – P. 193–199.