Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 143–149

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 143–149

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ЗАГАЛЬНИХ СТОХАСТИЧНИХ МІР

УДК 519.21

В. М. РАДЧЕНКО І Н. О. СТЕФАНСЬКА

Анотація. В роботі визначено перетворення Фур'є загальних стохастичних мір в $\mathbb{R}^d$, доведено теореми про обернення цього перетворення та про зв'язок зі збіжністю стохастичних інтегралів. Наведено приклад застосування до збіжності розв'язків стохастичного рівняння теплопровідності.

Abstract. The Fourier transform of general stochastic measures in $\mathbb{R}^d$ is defined. The inversion theorem for this transform is proved, connection with convergence of stochastic integrals is established. Example of applying for convergence of solutions of stochastic heat equation is considered.

Аннотация. В работе определено преобразование Фурье общих стохастических мер в $\mathbb{R}^d$, доказаны теоремы об обращении этого преобразования и про связь со сходимостью стохастических интегралов. Приведен пример применения к сходимости решений стохастического уравнения теплопроводности.

1. Вступ

Нехай μ — довільна стохастична міра на борельовій σ-алгебрі $\mathcal{B}$ в $\mathbb{R}^d$ (див. означення 2.1 нижче). Перетворення Фур'є для μ ми визначимо рівністю

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\, d\mu(x), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Дана рівність є аналогом спектрального представлення стаціонарних випадкових процесів, де μ — стохастична міра з ортогональними значеннями, і таке представлення є важливою частиною дослідження процесу. Теорія інтегрування дійсних функцій за загальними стохастичними мірами (див., наприклад [1], [2]) дає можливість розглядати тут досить широкий клас μ. Вивчення властивостей отриманого перетворення $\hat{\mu}$ є основною метою даної роботи. При цьому виявилося зручним визначення інтеграла від випадкової функції в сенсі роботи [3].

Для невипадкової скінченної μ дане перетворення є аналогом характеристичної функції. Певний аналог класичного твердження про слабку збіжність розподілів отримано в даній роботі для стохастичних мір (теорема 4.1).

Роботу побудовано наступним чином. В пункті 2 наведено потрібні нам теоретичні відомості, в частині 3 отримано теорему про обернення перетворення Фур'є. В пункті 4 доведено теорему про зв'язок збіжності послідовностей μ_n та $\hat{\mu}_n$, застосування цього твердження для дослідження стохастичного рівняння теплопровідності наведено в пункті 5.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G57, 60H15, 60H05.

Ключові слова і фрази. Стохастична міра, перетворення Фур'є випадкових процесів, слабка збіжність, стохастичне рівняння теплопровідності.

2. Попередні відомості

2.1. **Стохастичні міри.** Нехай $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борельових підмножин $\mathbb{R}^d$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — повний ймовірнісний простір. Через $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ позначимо множину всіх випадкових величин (точніше кажучи, їхніх класів P-еквівалентності). Збіжність в L_0 означає збіжність за ймовірністю.

Означення 2.1. Стохастичною мірою (СМ) на $\mathcal{B}$ називається σ-адитивне відображення $\mu : \mathcal{B} \to L_0$.

Ми не накладаємо на μ ніяких вимог невід'ємності чи існування моментів. В [1] таку функцію множин названо загальною стохастичною мірою.

Наведемо деякі приклади. Якщо $X(x)$, $0 \le x \le T$, є квадратично інтегровним мартингалом, то $\mu(A) = \int_0^T \mathbf{1}_A(x)\, dX(x)$ є СМ в $\mathbb{R}$. Аналогічним чином визначає СМ інтеграл за дробовим броунівським рухом $B^H(x)$ при значенні показника Хюрста $H > 1/2$. Ще одним прикладом СМ є α-стійкі міри, визначені на σ-алгебрі (див. [4]). Інші приклади, а також умови того, що різниці значень випадкового процесу з незалежними приростами породжують СМ, є в розділах 7 і 8 [1].

У [2] побудовано і вивчено інтеграл вигляду $\int_A g(x)\, d\mu(x)$, де g — вимірна невипадкова функція, $A \in \mathcal{B}$. Його конструкція проводиться стандартно з використанням наближення простими функціями. (Аналогічна побудова наведена в розділі 7 [1]). Відмітимо, що будь-яка обмежена вимірна g є інтегрованою за будь-якою μ. Для цього інтеграла має місце аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність (див. твердження 7.1.1 [1] або наслідок 1.2 [2]).

Через $\langle t, x \rangle$ ми будемо позначати скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$, $|\cdot|$ — евклідову норму, $\hat{f}$ — перетворення Фур'є функції $f \in L_1(\mathbb{R}^d, dx)$,

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \langle t, x \rangle} f(x)\, dx.$$

Властивості перетворення Фур'є, використані нижче в статті, можна знайти, наприклад, в [5].

Ми будемо вивчати аналогічне перетворення для стохастичних функцій множин.

Означення 2.2. Перетворенням Фур'є СМ μ будемо називати випадкову функцію

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \langle t, x \rangle}\, d\mu(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \cos 2\pi \langle t, x \rangle\, d\mu(x) - i \int_{\mathbb{R}^d} \sin 2\pi \langle t, x \rangle\, d\mu(x), \quad t \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Стохастичні інтеграли, записані в (1), визначені для будь-якої μ, оскільки підінтегральні функції обмежені. Тому перетворення Фур'є існує для будь-якої СМ на $\mathcal{B}$.

2.2. **Інтеграл Рімана.** Інтеграл від випадкової функції за дійсною мірою dx в $\mathbb{R}^d$ будемо розглядати в сенсі Рімана. Докладно такий інтеграл досліджено в [3], ми нагадаємо основні означення і важливе для нас твердження.

Означення 2.3. Нехай $M \subset \mathbb{R}^d$ — вимірна за Жорданом множина, $\xi \colon M \times \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна випадкова функція. Будемо говорити, що ξ інтегровна на M, якщо для будь-якої послідовності розбиттів множини $M = \bigcup_{1 \le k \le k_n} M_{kn}$, $n \ge 1$, $\max_k \operatorname{diam} M_{kn} \to 0$ при $n \to \infty$, $x_{kn} \in M_{kn}$, існує границя за ймовірністю інтегральних сум

$$\mathsf{P} \lim_{n \to \infty} \sum_{1 \le k \le k_n} \xi(x_{kn}) m(M_{kn}) := \int_M \xi(x)\, dx.$$

Тут m позначає міру Жордана, в кожному розбитті множини M_{kn}, $1 \le k \le k_n$, вимірні за Жорданом і перетинаються лише по своїх межах.

Означення 2.4. Нехай $\tilde{M}$ — необмежена множина та існує послідовність вимірних за Жорданом множин $M^{(j)} \uparrow \tilde{M}$ таких, що для кожного c для деякого j маємо $\big(\tilde{M} \cap \{|x| \le c\}\big) \subset M^{(j)}$. Будемо говорити, що ξ інтегровна (у невласному сенсі) на $\tilde{M}$, якщо ξ інтегровна на кожному $M^{(j)}$, а також існує і не залежить від конкретних $M^{(j)}$ границя за ймовірністю

$$\mathsf{P}\lim_{j\to\infty} \int_{M^{(j)}} \xi(x)\,dx := \int_{\tilde{M}} \xi(x)\,dx.$$

Теорема 2.1. *(наслідок 4.1* [3]*) Нехай $h(x,t) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – вимірна невипадкова функція, інтегровна за Ріманом по dx на $\mathbb{R}^d$ у невласному сенсі для кожного фіксованого t, та $|h(x,t)| \le g(t)$, $\int_{\mathbb{R}^d} |h(x,t)|\,dx \le g_1(t)$, де $g, g_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ інтегровні на $\mathbb{R}^d$ за $d\mu(t)$. Тоді випадкова функція $\xi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x,t)\,d\mu(t)$ інтегровна на $\mathbb{R}^d$ у невласному сенсі, та*

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} h(x,t)\,d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(t) \int_{\mathbb{R}^d} h(x,t)\,dx.$$

Очевидним чином, це твердження залишається вірним і для комплекснозначної h, означення очевидним чином переносяться на комплекснозначні ξ.

3. Обернення перетворення Фур'є стохастичної міри

Нехай $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$ — множина всіх нескінченно диференційовних функцій $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ з компактним носієм.

Ми отримаємо обернення μ через $\hat{\mu}$ як слабку границю в наступному сенсі.

Теорема 3.1. *Для кожної функції $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$ маємо, що*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,d\mu(x) = \mathsf{P}\text{-}\lim_{\alpha\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^d} e^{-4\pi^2\alpha|t|^2} e^{2\pi i\langle x,t\rangle} \hat{\mu}(t)\,dt. \tag{2}$$

Доведення. Стандартні обчислення показують, що

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-4\pi^2\alpha|t|^2} e^{2\pi i\langle x,t\rangle} e^{-2\pi i\langle y,t\rangle}\,dt = (4\pi\alpha)^{-d/2} e^{-|x-y|^2/4\alpha} \tag{3}$$

(див. [5, теорема 1.13]). Далі маємо, що

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\text{-}\lim_{\alpha\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^d} e^{-4\pi^2\alpha|t|^2} e^{2\pi i\langle x,t\rangle} \hat{\mu}(t)\,dt = \\
&\quad \mathsf{P}\text{-}\lim_{\alpha\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^d} e^{-4\pi^2\alpha|t|^2} e^{2\pi i\langle x,t\rangle}\,dt \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\langle y,t\rangle}\,d\mu(y) \overset{(*)}{=} \\
&\quad \mathsf{P}\text{-}\lim_{\alpha\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(y) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^d} e^{-4\pi^2\alpha|t|^2} e^{2\pi i\langle x,t\rangle} e^{-2\pi i\langle y,t\rangle}\,dt \overset{(3)}{=} \\
&\qquad \mathsf{P}\text{-}\lim_{\alpha\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(y) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,(4\pi\alpha)^{-d/2}\, e^{-|x-y|^2/4\alpha}\,dx \overset{(**)}{=} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(y) \lim_{\alpha\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,(4\pi\alpha)^{-d/2}\, e^{-|x-y|^2/4\alpha}\,dx \overset{(***)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,d\mu(y)\,.
\end{aligned}$$

В рівності (*) ми двічі використали теорему 2.1. При зміні порядку інтегрування за dt і $d\mu$ ми беремо

$$g(t) = 1, \quad g_1(t) = C_\alpha := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-4\pi^2\alpha|t|^2} dt. \tag{4}$$

Потім, при зміні dx і $d\mu$ можемо взяти

$$g(t) = C_\alpha \sup|\varphi|, \quad g_1(t) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|\,dx.$$

В рівності (**) ми використали аналог теореми про мажоровану збіжність (твердження 7.1.1 [1]), в (***) — збіжність даного фундаментального розв'язку до дельта-функції в $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^d\right)$. □

Зауваження 3.1. Відмітимо, що наявність множника $e^{-4\pi^2\alpha|t|^2}$, $\alpha > 0$, і взяття границі при $\alpha \to 0+$ в (2) для нас є важливими, ми не можемо в (2) покласти $\alpha = 0$. При $\alpha = 0$ не існує мажоранти g_1 в (4), і в (2) ми не могли б гарантувати існування інтеграла $\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\langle x,t\rangle}\hat{\mu}(t)\,dt$.

Зв'язок $\hat{\mu}$ та μ також задано наступним твердженням.

Теорема 3.2. *Для кожної обмеженої* $f \in L_1(\mathbb{R}^d, dx)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{\mu}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\,d\mu(x). \tag{5}$$

Доведення. Оскільки функція $\hat{f}$ обмежена, вона інтегровна за μ, і ми маємо:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)\,d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(t) \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\,dx$$
$$\overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\,d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{\mu}(x)\,dx.$$

Тут в (*) ми використали теорему 2.1 з

$$g(t) = \sup|f|, \quad g_1(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx.$$ □

4. Перетворення Фур'є та слабка збіжність стохастичних мір

Для звичайних випадкових величин добре відомо, що із збіжності характеристичних функцій випливає слабка збіжність відповідних розподілів. Аналог цього твердження для СМ ми отримаємо тепер.

Через $\mathbb{C}_0$ ми позначимо множину неперервних функцій $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ таких, що $f(x) \to 0$, $|x| \to \infty$.

Теорема 4.1. *Нехай* μ_n *та* μ *— СМ на* $\mathcal{B}$, *значення* $\mu_n(A)$, $A \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$, *обмежені за ймовірністю. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

1) для кожної $f \in \mathbb{C}_0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu, \ \ n \to \infty;$$

2) для кожної $f \in \mathbb{C}_0 \cap L_1\left(\mathbb{R}^d, dt\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\hat{\mu}_n(t)\,dt \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\hat{\mu}(t)\,dt, \ \ n \to \infty. \tag{6}$$

Доведення. Ми будемо вважати, що $\mu = 0$ (інакше замість μ_n ми можемо взяти $\mu_n - \mu$).

Нехай виконується 1). Для функції f, що задовольняє умови пункту 2), за відомими властивостями перетворення Фур'є, $\hat{f} \in \mathbb{C}_0$. За умовою 1), $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\,d\mu_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, і з (5) отримуємо 2).

Тепер покажемо, що з 2) випливає 1). Нехай $\mathsf{C} = \prod_{k=1}^d [-c_k, c_k]$, $c_k > 0$, та $\mathsf{U} = \prod_{k=1}^d [u_k, v_k]$, $u_k < v_k$, $g_{\mathsf{C}}(y)$ — щільність рівномірного розподілу на брусі C,

$$\psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U}, x) = \int_{\mathsf{U}} g_{\mathsf{C}}(x-y)\,dy = \lambda(\mathsf{U} \cap (\mathsf{C} + x)) \Big/ \prod_{k=1}^d (2c_k).$$

(Тут λ позначає міру Лебега в $\mathbb{R}^d$.) Тоді $h(x) = \psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U}, x)/\prod_{k=1}^d (v_k - u_k)$ є згорткою щільностей рівномірних розподілів на C та U, $0 \le \psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U}, x) \le 1$. Перетворення Фур'є цієї згортки дорівнює добутку перетворень Фур'є, тобто

$$\hat{h}(t) = \prod_{k=1}^d \frac{e^{-2\pi i t_k u_k} - e^{-2\pi i t_k v_k}}{2\pi i t_k (v_k - u_k)} \frac{\sin 2\pi c_k t_k}{2\pi c_k t_k}.$$

Маємо, що

$$|\hat{h}(t)| \le C \prod_{k=1}^d \min\Big\{c_k, \frac{2}{|v_k - u_k| t_k^2}\Big\} \in L_1(\mathbb{R}^d, dt).$$

(C позначає константу, точне значення якої неважливе.) Отже, для $\hat{h}(t)$ виконуються умови поточкового обернення перетворення Фур'є, а тому

$$\begin{aligned}\psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U}, x) &= \prod_{k=1}^d (v_k - u_k) \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle x, t\rangle} \hat{h}(t)\, dt \\ &= (4\pi^2 i)^{-d} \prod_{k=1}^d (1/c_k) \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle x, t\rangle} \prod_{k=1}^d \big(e^{-2\pi i t_k u_k} - e^{-2\pi i t_k v_k}\big) t_k^{-2} \sin 2\pi c_k t_k \, dt.\end{aligned}$$

Оскільки $\psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U}, x)$ обмежена, ми можемо розглянути інтеграл

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} \psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U}, x)\, d\mu_n(x) \\ &\quad= C \int_{\mathbb{R}^d} d\mu_n(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle x, t\rangle} \prod_{k=1}^d \big(e^{-2\pi i t_k u_k} - e^{-2\pi i t_k v_k}\big) t_k^{-2} \sin 2\pi c_k t_k \, dt \\ &\quad\overset{(*)}{=} C \int_{\mathbb{R}^d} dt \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle x, t\rangle} \prod_{k=1}^d \big(e^{-2\pi i t_k u_k} - e^{-2\pi i t_k v_k}\big) t_k^{-2} \sin 2\pi c_k t_k \, d\mu_n(x) \\ &\quad= C \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d \big(e^{-2\pi i t_k u_k} - e^{-2\pi i t_k v_k}\big) t_k^{-2} \sin 2\pi c_k t_k \, dt \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle x, t\rangle}\, d\mu_n(x) \\ &\quad= C \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}_n(-t) \prod_{k=1}^d \big(e^{-2\pi i t_k u_k} - e^{-2\pi i t_k v_k}\big) t_k^{-2} \sin 2\pi c_k t_k \, dt \\ &\quad\overset{t \to (-t)}{=} C \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}_n(t) \prod_{k=1}^d \big(e^{2\pi i t_k u_k} - e^{2\pi i t_k v_k}\big) t_k^{-2} \sin 2\pi c_k t_k \, dt\,.\end{aligned}$$

Тут в (*) ми використали теорему 2.1 з

$$g(t) = (2\pi)^{2d} \prod_{k=1}^d \min\{c_k |v_k - u_k|, 2|t_k|^{-2}\}, \quad g_1(t) = \psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U}, x) \le 1.$$

Тепер ми беремо твердження 2) для

$$f(t) = \prod_{k=1}^d \big(e^{2\pi i t_k u_k} - e^{2\pi i t_k v_k}\big) t_k^{-2} \sin 2\pi c_k t_k,\ |f(t)| \le (2\pi)^{2d} \prod_{k=1}^d \min\{c_k |v_k - u_k|, 2|t_k|^{-2}\},$$

тут $f \in \mathbb{C}_0 \cap L_1\big(\mathbb{R}^d,\ dt\big)$. Отримаємо, що для будь-яких C, U

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U}, x)\, d\mu_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Легко бачити, що $\psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U},x)=1$ для $u_k+c_k\le x_k\le v_k-c_k$, $\psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U},x)=0$ для $u_k-c_k\ge x_k$ та $x_k \ \ge \ v_k+c_k$, і завжди $0\le\psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U},x)\le 1$. Скінченними лінійними комбінаціями таких функцій легко можна рівномірно наблизити будь-яку $f\in\mathbb{C}_0$.

Лема 1.2 [2] дає, що для вимірної функции h, $|h(x)|\le K$, виконується нерівність

$$\left\|\int_A h\,d\mu_n\right\|\le 16\sup_{B\subset A}\|K\mu_n(B)\|$$

(тут ми використали позначення $\|\xi\|=\sup\{\delta:\mathsf{P}\{|\xi|>\delta\}>\delta\}$). З рівномірної обмеженості значень μ_n випливає, що відповідні лінійні комбінації $\int_{\mathbb{R}^d}\psi_{\mathsf{C}}(\mathsf{U},x)\,d\mu_n(x)$ наближають за ймовірністю $\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n$ рівномірно за n. Так ми отримуємо 1). □

5. Збіжність розв'язків рівняння теплопровідності

Як приклад застосування теореми 4.1, розглянемо збіжність розв'язків стохастичного рівняння теплопровідності для розмірності $d=1$:

$$du(x,t)=a^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\,dt+\sigma(x,t)\,d\mu(x),\quad u(x,0)=u_0(x),\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T].$$

Ми беремо розв'язок цього рівняння в м'якому сенсі:

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}p(x-y,t)u_0(y)\,dy+\int_{\mathbb{R}}d\mu(y)\int_0^t p(x-y,t-s)\sigma(y,s)\,ds\,, \tag{7}$$

де $p(x,t)=(4a^2\pi t)^{-1/2}e^{-x^2/4a^2t}$.

Будемо накладати наступні умови.

A1. $u_0(y)=u_0(y,\omega):\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ вимірна і при кожному фіксованому ω обмежена.

A2. $\sigma(y,s):\mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ вимірна, обмежена і неперервна за y при кожному фіксованому s.

Таке рівняння докладно розглянуто в [6].

Теорема 5.1. *Нехай виконуються умови A1 і A2, μ_n та μ — СМ на $\mathcal{B}$, значення $\mu_n(A)$, $A\in\mathcal{B}$, $n\ge1$ обмежені за ймовірністю, виконується* (6),

$$u_n(x,t)=\int_{\mathbb{R}}p(x-y,t)u_0(y)\,dy+\int_{\mathbb{R}}d\mu_n(y)\int_0^t p(x-y,t-s)\sigma(y,s)\,ds\,.$$

Тоді для будь-яких $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$

$$u_n(x,t)\xrightarrow{\mathsf{P}}u(x,t),\quad n\to\infty,$$

де $u(x,t)$ визначено в (7).

Доведення. Для фіксованих (x,t) розглянемо

$$f(y)=\int_0^t p(x-y,t-s)\sigma(y,s)\,ds\,.$$

Із стандартної теореми про мажоровану збіжність отримуємо, що $f\in\mathbb{C}_0$. Використання теореми 4.1 для даної f завершує доведення. □

Література

1. S. Kwapień and W. A. Woycziński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
2. В. Н. Радченко, *Интегралы по общим случайным мерам*, Труды Института математики НАН Украины **27** (1999).
3. V. Radchenko, *Riemann integral of a random function and the parabolic equation with a general stochastic measure*, Теор. ймовірн. та матем. стат. **87** (2012), 163–175.
4. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, Boca Raton, 1994.

5. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на эвклидовых пространствах*, "Мир", Москва, 1974.
6. V. M. Radchenko, *Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure*, Studia Mathematica **194** (2009), no, 3, 231–251.

Кафедра математичного аналізу, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: vradchenko@univ.kiev.ua

Кафедра математичного аналізу, Національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: valentinasavych@mail.ru

Надійшла 28/04/2016