Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 88, 2013, стор. 110–123

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 88, 2013, pp. 110–123

АПРОКСИМАЦІЯ ПРОЦЕСІВ З ПРОСТОРУ ОРЛІЧА В МЕТРИЦІ ПРОСТОРУ $C[0,\infty)$

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО І О. Є. КАМЕНЩИКОВА

Анотація. Отримано оцінки розподілу приростів орлічевських процесів, заданих на $[0,\infty)$. Досліджується апроксимація таких процесів в метриці простору $C[0,\infty)$ цілими функціями експоненціального типу не більше γ з точки зору точності та надійності.

Abstract. The estimates of the distribution of increments of Orlicz processes given on $[0,\infty)$ are obtained. The approximation of such processes in $C[0,\infty)$ metrics by integer functions of exponential type of no more then γ with given accuracy and reliability is studied.

Аннотация. Получено оценки распределения приращений орличевских процессов, заданных на $[0,\infty)$. Изучается аппроксимация таких процессов в метрике пространства $C[0,\infty)$ целыми функциями экспоненциального типа не больше γ с точки зрения точности и надежности.

1. Вступ

У роботі [1] досліджувалася апроксимація процесів з просторів $L_p(\Omega)$, що є підкласом просторів Орліча, тригонометричними сумами у просторі $L_q[0,2\pi]$ для різних співвідношень між числами p та q. Були одержані нерівності для оцінки найкращого такого наближення з точки зору точності та надійності, а також нерівності для оцінки приростів $L_p(\Omega)$-процесів в метриці простору $L_q[a,b]$.

У даній статті розглядається задача апроксимації комплекснозначного процесу $\{X(t), t\in[0,\infty)\}$ із простору Орліча.

Досліджується наближення таких процесів в метриці простору $C[0,\infty)$ цілими функціями експоненціального типу не більше γ з точки зору точності та надійності.

Для цього знаходяться оцінки для розподілу приростів орлічевських процесів, заданих на $[0,\infty)$.

Наведемо означення та твердження, що будуть використані далі.

Означення 1.1 ([2])**.** Неперервна парна опукла функція $U=\{U(x), x\in R\}$ називається C-функцією, якщо $U(x)$ монотонно зростає при $x>0$ і $U(0)=0$.

Означення 1.2 ([2])**.** Нехай U — довільна C-функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається сім'я випадкових величин, де для всіх $\xi\in L_U(\Omega)$ існує $r_\xi>0$ така, що $\mathsf{E}\,U(\xi/r_\xi)<\infty$.

В цьому просторі визначимо норму

$$\|\xi\|_{L_U}=\inf\left\{r>0\colon\ \mathsf{E}\,U\left(\frac{\xi}{r}\right)\le 1\right\},$$

яка називається нормою Люксембурга.

Теорема 1.1 ([2])**.** *Простір Орліча $L_U(\mathbb{T})$ є банаховим відносно норми Люксембурга.*

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G17; Secondary 60G07.

Ключові слова і фрази. Орлічевські процеси, оцінки приростів, апроксимація.

Означення 1.3 ([2]). Нехай $L_U(\Omega)$ — це простір Орліча. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ називається орлічевським процесом, якщо $X\colon \mathbb{T} \to L_U(\Omega)$, тобто для кожного $t \in \mathbb{T}$ випадкова величина $X(t)$ належить до простору $L_U(\Omega)$.

Означення 1.4 ([2]). Монотонна неспадна послідовність додатних чисел

$$(\varkappa(n), n \geq 1)$$

називається M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для будь-якого $n \geq 1$ і $\xi_k \in L_U(\Omega)$, $k = 1, \ldots, n$, виконується наступна нерівність:

$$\left\| \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \right\|_{L_U(\Omega)} \leq \varkappa(n) \max_{1 \leq k \leq n} \|\xi_k\|_{L_U(\Omega)}.$$

Лема 1.1 ([2] Нехай $p \geq 1$.). *Послідовність $\varkappa(n) = n^{1/p}$, $n \geq 1$, є M-характеристикою простору $L_p(\Omega)$.*

Зауваження 1.1. Властивості процесів Орліча можна знайти в [2].

2. Оцінки розподілу приростів орлічевських процесів $\{X(t), t \in [a,b]\}$

Теорема 2.1. *Нехай $\mathbb{T} = [a,b]$, $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ — сепарабельний випадковий процес з простору Орліча $L_U(\Omega)$, для якого виконується нерівність:*

$$\sup_{|t-s| \leq h, t,s \in [a,b]} \|X(t) - X(s)\|_{L_U(\Omega)} \leq \sigma(h), h > 0, \tag{1}$$

де $\sigma(h)$, $h > 0$ — монотонно зростаюча неперервна функція така, що $\sigma(h) \to 0$, $h \to 0$. Нехай існує константа $C(\upsilon)$ така, що для деякого $k \geq 1$

$$\frac{\sum_{m=k-1}^{\infty} \sigma^{(-1)}(\alpha \upsilon^m)}{\sigma^{(-1)}(\alpha \upsilon^k)} < C(\upsilon), \tag{2}$$

де $\alpha = b - a$, $0 < \upsilon < 1$ — довільне.

Тоді для всіх $\theta > 0$, $\varepsilon > 0$ та $0 < \upsilon < 1$ мають місце нерівності:

$$\left\| \sup_{|t-s| < \theta, t,s \in [a,b]} |X(t) - X(s)| \right\|_{L_U(\Omega)} \leq B(\theta),$$

та

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{|t-s| < \theta, t,s \in [a,b]} |X(t) - X(s)| > \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{U\left(\frac{\varepsilon}{B(\theta)}\right)},$$

де

$$S_\upsilon = \frac{1}{\upsilon(1-\upsilon)} \cdot \max\left(2, [C(\upsilon)]\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}\right),$$

$$B(\theta) = S_\upsilon \int_0^{\sigma(\theta)} \varkappa\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) du.$$

Зауваження 2.1. У виразах для $B(\theta)$ можна замінити $\sigma(\theta)$ на

$$\min(\sigma(\theta), 2 \sup_{t \in [a,b]} \|X(t)\|).$$

Доведення. Позначимо $\varepsilon_n = \sigma^{(-1)}(\alpha \upsilon^n)$ ($0 < \upsilon < 1$ — будь-яке), $n = 0, 1, \ldots$

Нехай V_{ε_n} — множина замкнених відрізків довжини ε_n, що перетинаються, можливо, лише в крайніх точках, які утворюють мінімальне покриття $[a,b]$, а $N_{\mathbb{T}}(\varepsilon_n)$ — відповідна кількість центрів цих відрізків, тоді $N_{\mathbb{T}}(\varepsilon_n) \leq \frac{b-a}{2\varepsilon_n} + 1$.

Для $\theta > 0$ зафіксуємо k — таке число, що виконуються нерівності $\sigma(\varepsilon_k) \leq \sigma(\theta) \leq \sigma(\varepsilon_{k-1})$, тобто $\alpha \upsilon^k \leq \sigma(\theta) \leq \alpha \upsilon^{k-1}$.

Множина $V_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} V_{\varepsilon_j}$ — це множина сепарабельності процесу, тому оскільки нерівність (1) означає, що процес $X(t)$ неперервний за ймовірністю, то

$$\sup_{|t-s|\le\theta} |X(t) - X(s)| = \sup_{t,s\in V_k, |t-s|\le\theta} |X(t) - X(s)|.$$

Розглянемо відображення

$$\alpha_n = \{\alpha_n(t), t \in V_k, n = k, k+1, \dots\}$$

(t, k — будь-які), де $\alpha_n(t)$ — це така точка з множини V_{ε_n}, що $|t - \alpha_n(t)| \le \varepsilon_n$. Якщо таких точок дві, то вибираємо найближчу, якщо відстані до тих точок рівні — то будь-яку з них.

Нехай m — довільне число таке, що $m > k$, $t_m = \alpha_m(t)$, $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m)$, …, $t_k = \alpha_k(t_{k+1})$, $s_m = \alpha_m(s)$, $s_{m-1} = \alpha_{m-1}(s_m)$, …, $s_k = \alpha_k(s_{k+1})$.

Тоді

$$\begin{aligned} X(t) - X(s) = (X(t) - X(\alpha_m(t))) + \sum_{l=k}^{m-1} (X(t_{l+1}) - X(t_l)) + \big(X(s) - X(\alpha_m(s))\big) \\ + \sum_{l=k}^{m-1} (X(s_{l+1}) - X(s_l)) + (X(t_k) - X(s_k)). \end{aligned} \tag{3}$$

З рівності (3) отримаємо, що

$$\begin{aligned} |X(t_k) - X(s_k)| \le |X(t) - X(s)| &+ |X(t) - X(\alpha_m(t))| \\ &+ \left| \sum_{l=k}^{m-1} |X(t_{l+1}) - X(t_l)| + |X(s) - X(\alpha_m(s))| \right| \\ &+ \sum_{l=k}^{m-1} |X(s_{l+1}) - X(s_l)|. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \|X(t_k) - X(s_k)\|_{L_U(\Omega)} &\le \|X(t) - X(s)\|_{L_U(\Omega)} + \|X(t) - X(\alpha_m(t))\|_{L_U(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{l=k}^{m-1} \|X(t_{l+1}) - X(t_l)\|_{L_U(\Omega)} \\ &\quad + (\|X(s) - X(\alpha_m(s))\|_{L_U(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{l=k}^{m-1} \|X(s_{l+1}) - X(s_l)\|_{L_U(\Omega)} \\ &\le \sigma(\theta) + \sigma(\varepsilon_m) + \sum_{l=k}^{m-1} \sigma(\varepsilon_l) + \sigma(\varepsilon_m) + \sum_{l=k}^{m-1} \sigma(\varepsilon_l) \\ &= \sigma(\theta) + 2\alpha\upsilon^m + 2\sum_{l=k}^{m-1} \alpha\upsilon^l \le \sigma(\theta) + 2\alpha \sum_{l=k}^{\infty} \upsilon^l \\ &= \sigma(\theta) + 2\alpha \frac{\upsilon^k}{1-\upsilon} \le \sigma(\theta)\left(1 + \frac{2}{1-\upsilon}\right) = \sigma(\theta)\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}. \end{aligned} \tag{4}$$

Тепер з рівності (3) і нерівності (4) отримаємо, що

$$\begin{aligned}|X(t)-X(s)| &\le |X(t)-X(\alpha_m(t))| + \sum_{l=k}^{m-1} |X(t_{l+1})-X(t_l)| + |X(s)-X(\alpha_m(s)| \\ &\quad + \sum_{l=k}^{m-1} |X(s_{l+1})-X(s_l)| + |X(t_k)-X(s_k)| \\ &\le |X(t)-X(\alpha_m(t))| + 2\sum_{l=k}^{m-1} \max_{u\in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u)-X(\alpha_l(u))| \\ &\quad + |X(s)-X(\alpha_m(s)| \\ &\quad + \max_{u,w\in V_{\varepsilon_k}, \|X(u)-X(w)\|_{L_U(\Omega)}\le\sigma(\theta)\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}} |X(u)-X(w)|.\end{aligned} \tag{5}$$

Оскільки для всіх $\xi \in L_U(\Omega)$, для яких $\|\xi\|_{L_U} > 0$, має місце нерівність

$$\mathsf{P}\{|\xi| \ge x\} \le \frac{1}{U\{x/\|\xi\|_{L_U}\}}$$

(див. [2]), то при $\frac{\theta}{\alpha\upsilon^m} > 1$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{|X(t)-X(\alpha_m)(t)| > \theta\right\} &\le \frac{1}{U\left(\frac{\theta}{\|X(t)-X(\alpha_m)(t)\|_{L_U(\Omega)}}\right)} \le \frac{1}{U\left(\frac{\theta}{\sigma(\varepsilon_m)}\right)} \\ &= \frac{1}{U\left(\frac{\theta}{\alpha\upsilon^m}\right)} \le C\frac{\alpha\upsilon^m}{\theta}\end{aligned}$$

(використали те, що існує константа C така, що $U(x) \ge C|x|$ для $|x| > 1$ ([2])).

Покладемо $\theta = \upsilon^{M/2}$, де M — таке число, що $2/(\alpha\upsilon^M) > 1$, тоді

$$\sum_{m=M}^{\infty} \mathsf{P}\left\{|X(t)-X(\alpha_m)(t)| > \upsilon^{m/2}\right\} \le C\alpha \sum_{m=M}^{\infty} \upsilon^{m/2} < \infty.$$

Отже, $X(\alpha_m)(t) \to X(t)$ з ймовірністю 1. Оскільки в V_k злічене число точок, то $X(\alpha_m)(t) \to X(t)$ при $m \to \infty$ з ймовірністю 1 для всіх точок з V_k. Отже, з (5) отримаємо, що

$$\begin{aligned}|X(t)-X(s)| &\le 2\sum_{l=k}^{\infty} \max_{u\in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u)-X(\alpha_l(u))| \\ &\quad + \max_{u,w\in V_{\varepsilon_k}, \|X(u)-X(w)\|_{L_U(\Omega)}\le\sigma(\theta)\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}} |X(u)-X(w)|.\end{aligned}$$

Оскільки права частина отриманої нерівності не залежить від t та s, то з ймовірністю 1

$$\begin{aligned}\sup_{|t-s|<\theta, t,s\in[a,b]} |X(t)-X(s)| &= \sup_{|t-s|<\theta, t,s\in V_k} |X(t)-X(s)| \\ &\le 2\sum_{l=k}^{\infty} \max_{u\in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u)-X(\alpha_l(u))| \\ &\quad + \max_{u,w\in V_{\varepsilon_k}, \|X(u)-X(w)\|_{L_U(\Omega)}\le\sigma(\theta)\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}} |X(u)-X(w)|.\end{aligned} \tag{6}$$

Далі, оскільки $|t-\alpha_m(t)| < \varepsilon_m$, то для всіх $r > k$ виконується наступне:

$$\begin{aligned}|t-t_k| &\le |t-\alpha_r(t)| + |\alpha_r(t)-\alpha_{r+1}(t)| + \cdots + |\alpha_{k-1}(t)-\alpha_k(t)| \\ &\le \varepsilon_r + \varepsilon_{r-1} + \cdots + \varepsilon_k \le \sum_{m=k}^{\infty} \varepsilon_m,\end{aligned}$$

аналогічно $|s - s_k| \le \sum_{m=k}^{\infty} \varepsilon_m$ і $|t - s| < \theta$.

Отже, $|t_k - s_k| \le \theta + 2\sum_{m=k}^{\infty} \varepsilon_m$.

Оскільки θ — таке число, що $\theta < \varepsilon_{k-1}$, то $|t_k - s_k| \le 2\sum_{m=k-1}^{\infty} \varepsilon_m$, тобто

$$|t_k - s_k| \le 2 \sum_{m=k-1}^{\infty} \sigma^{(-1)}(\alpha\upsilon^m).$$

Враховуючи умову (2), оцінимо в (6) останній доданок, тобто підрахуємо кількість таких точок u, w, що $u, w \in V_{\varepsilon_k}$ і $|u - w| \le 2\sum_{m=k-1}^{\infty} \varepsilon_m$ — в цій множині не більше ніж $N_{\mathbb{T}}(\varepsilon_k)([C(\upsilon)] + 1)$ точок.

Оскільки ще й $\|X(u) - X(w)\| \le \sigma(\theta)\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}$, то

$$\begin{aligned}
&\left\| \sup_{|t-s|<\theta, t,s\in[a,b]} |X(t) - X(s)| \right\|_{L_U(\Omega)} \\
&\le 2\sum_{l=k}^{\infty} \left\| \max_{u\in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| \right\|_{L_U(\Omega)} \\
&\quad + \left\| \max_{u,w\in V_{\varepsilon_k}, |u-w|<[C(\upsilon)]+1, \|X(u)-X(w)\|\le\sigma(\theta)\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}} |X(u) - X(w)| \right\|_{L_U(\Omega)} \\
&\le 2\sum_{l=k}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_{l+1}))\sigma(\varepsilon_l) + \varkappa(N(\varepsilon_k))([C(\upsilon)] + 1)\sigma(\theta)\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Але

$$\sum_{l=k}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_{l+1}))\sigma(\varepsilon_l) = \sum_{l=k}^{\infty} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}\left(\alpha\upsilon^{l+1}\right)\right)\right)\alpha\upsilon^l,$$

тому враховуючи, що N — спадна, а $\varkappa$ — зростаюча, маємо:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha\upsilon^{l+2}}^{\alpha\upsilon^{l+1}} \varkappa(N(u))\,du &\ge \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}\left(\alpha\upsilon^{l+1}\right)\right)\right)\left(\alpha\upsilon^{l+1} - \alpha\upsilon^{l+2}\right) \\
&= \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}\left(\alpha\upsilon^{l+1}\right)\right)\right)\alpha\upsilon^l\left(\upsilon - \upsilon^2\right).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=k}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_{l+1}))\sigma(\varepsilon_l) &\le \frac{1}{\upsilon - \upsilon^2} \sum_{l=k}^{\infty} \int_{\alpha\upsilon^{l+2}}^{\alpha\upsilon^{l+1}} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\,du \\
&= \frac{1}{\upsilon - \upsilon^2} \int_0^{\alpha\upsilon^{k+1}} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\,du.
\end{aligned}$$

Далі $\int_{\alpha\upsilon^{k+1}}^{\alpha\upsilon^k} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u)))\,du \ge \varkappa(N(\varepsilon_k))(\alpha\upsilon^k - \alpha\upsilon^{k+1})$,

$$\begin{aligned}
\varkappa(N(\varepsilon_k))\sigma(\theta) &\le \frac{\sigma(\theta)}{\alpha\upsilon^k} \cdot \frac{1}{1-\upsilon} \int_{\alpha\upsilon^{k+1}}^{\alpha\upsilon^k} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\,du \\
&\le \frac{1}{\upsilon(1-\upsilon)} \int_{\alpha\upsilon^{k+1}}^{\alpha\upsilon^k} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\,du.
\end{aligned}$$

Отже, з нерівності (7) та наведених вище оцінок одержимо:

$$\begin{aligned}
&\left\|\sup_{|t-s|<\theta,t,s\in[a,b]}|X(t)-X(s)|\right\| \\
&\quad\le \frac{2}{\upsilon-\upsilon^2}\int_0^{\alpha\upsilon^{k+1}}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du \\
&\quad\quad+\frac{1}{\upsilon(1-\upsilon)}\int_{\alpha\upsilon^{k+1}}^{\alpha\upsilon^{k}}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du[C(\upsilon)+1]\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon} \\
&\quad\le \int_0^{\alpha\upsilon^{k}}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\frac{1}{\upsilon(1-\upsilon)}\cdot\max\left(2,[C(\upsilon)+1]\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}\right) \\
&\quad\le \int_0^{\sigma(\theta)}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\cdot S_\upsilon,
\end{aligned}$$

де $S_\upsilon=\max(2,[C(\upsilon)]\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon})/(\upsilon(1-\upsilon))$. Теорему доведено. □

3. Оцінки розподілу приростів орлічевських процесів $\{X(t),t\in[0,\infty)\}$

Наступна теорема природнім чином випливає з попередньої та дає оцінку для розподілу приростів орлічевських процесів, заданих на $[0,\infty)$.

Теорема 3.1. *Нехай $[0,\infty)=\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$, де $A_i=[a_i,a_{i+1}]$, $\{a_i,i=0,\dots,\infty\}$ — деяка зростаюча послідовність, причому $a_0=0$. Позначимо $D_i=[a_i,a_{i+1}+\theta]$, $\alpha_i=a_{i+1}-a_i$.*

Нехай $X=\{X(t),t\in[0,\infty)\}\in L_U(\Omega)$ — сепарабельний випадковий процес, причому для будь-якого $\theta\in(0,\alpha_{i+1})$, $i=0,\dots,\infty$, виконується наступне:

$$\sup_{|t-s|\le h;t,s\in D_i}\|X(t)-X(s)\|_{L_U(\Omega)}\le\sigma_i(h),\qquad 0<h<\alpha_i+\theta,\tag{8}$$

де $\sigma_i(h)$, $i=0,\dots,\infty$ — монотонно зростаючі неперервні функції такі, що $\sigma_i(h)\to 0$, $h\to0$.

Нехай існують константи $C(\upsilon,i)$ такі, що

$$\frac{\sum_{m=k-1}^{\infty}\sigma_i^{(-1)}((\alpha_i+\theta)\upsilon^m)}{\sigma_i^{(-1)}((\alpha_i+\theta)\upsilon^k)}<C(\upsilon,i),\tag{9}$$

де $0<\upsilon<1$ – довільне. Якщо збігаються ряди $\sum_{i=0}^{\infty}B_i(\theta)$, $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{U(\varepsilon/B_i(\theta))}$, де

$$B_i(\theta)=S_{\upsilon,i}\int_0^{\min(\sigma_i(\theta),2\sup_{t\in D_i}\|X(t)\|)}\varkappa\left(\frac{\alpha_i+\theta}{2\sigma_i^{(-1)}(u)}+1\right)du,$$

$$S_{\upsilon,i}=\frac{1}{\upsilon(1-\upsilon)}\cdot\max\left(2,[C(\upsilon,i)]\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}\right).$$

то для всіх $\theta>0$, $\varepsilon>0$ та $0<\upsilon<1$ мають місце нерівності:

$$\left\|\sup_{|t-s|<\theta,t,s\in[0,\infty)}|X(t)-X(s)|\right\|_{L_U(\Omega)}\le\sum_{i=0}^{\infty}B_i(\theta)\tag{10}$$

та

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\theta,t,s\in[0,\infty)}|X(t)-X(s)|>\varepsilon\right\}\le\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{U\left(\frac{\varepsilon}{B_i(\theta)}\right)}.\tag{11}$$

Зауваження 3.1. Якщо збігається ряд в (11), то справджується нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\theta, t,s\in[0,\infty)} |X(t)-X(s)| > \varepsilon\right\} \le \frac{1}{U\left(\varepsilon / \sum_{i=0}^{\infty} B_i(\theta)\right)}. \tag{12}$$

Доведемо, що якщо збігається ряд в (10), то для будь-якого $\varepsilon > 0$ збігається і ряд $\sum_{i=0}^{\infty} 1/U\left(\varepsilon/B_i(\theta)\right)$. Дійсно, якщо ряд (10) є збіжним, то при досить великому i (наприклад, $i > M$) $B_i(\theta) < 1$, тому при цих i маємо:

$$U\left(\frac{\varepsilon}{B_i(\theta)}\right) \ge \frac{1}{B_i(\theta)} U(\varepsilon)$$

та

$$\sum_{i=M}^{\infty} \frac{1}{U\left(\varepsilon/B_i(\theta)\right)} \le \frac{1}{U(\varepsilon)} \sum_{i=M}^{\infty} B_i(\theta) < \infty.$$

З другого боку, якщо покласти $U(x) = |x|^p$, $p > 1$, то

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{U\left(\varepsilon/B_i(\theta)\right)} = \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_{i=0}^{\infty} (B_i(\theta))^p,$$

тобто можлива ситуація, коли цей ряд бігається, а ряд (10) розбігається. Крім того, $\sum_{i=0}^{\infty} (B_i(\theta))^p \le \left(\sum_{i=0}^{\infty} B_i(\theta)\right)^p$. Отже, взагалі кажучи, нерівність (11) не краща за нерівність (10).

Доведення. Оскільки заданий процес задовільняє умови (8) та (9), то, таким чином, на кожному відрізку D_i, $i = 0, \ldots, \infty$, виконуються умови (1) та (2) теореми 2.1 (для відповідних $S_{\upsilon,i}$, $C_i(\upsilon)$, $i = 0, \ldots, \infty$), а тому за цією теоремою для кожного $i = 0, \ldots, \infty$ мають місце нерівності:

$$\left\| \sup_{|t-s|<\theta, t,s\in D_i} |X(t)-X(s)| \right\|_{L_U(\Omega)} \le B_i(\theta)$$

та

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\theta, t,s\in D_i)} |X(t)-X(s)| > \varepsilon\right\} \le \frac{1}{U\left(\varepsilon/B_i(\theta)\right)},$$

де

$$B_i(\theta) = S_{\upsilon,i} \int_0^{\min(\sigma_i(\theta), 2\sup_{t\in D_i} \|X(t)\|)} \varkappa\left(\frac{\alpha_i + \theta}{2\sigma_i^{(-1)}(u)} + 1\right) du,$$

$$S_{\upsilon,i} = \frac{1}{\upsilon(1-\upsilon)} \cdot \max\left(2, [C(\upsilon, i)] \frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}\right).$$

Звідси одержимо:

$$\left\| \sup_{|t-s|<\theta, t,s\in[0,\infty)} |X(t)-X(s)| \right\|_{L_U(\Omega)} \le \left\| \sup_{|t-s|<\theta, t,s\in\bigcup_{i=0}^{\infty} D_i} |X(t)-X(s)| \right\|_{L_U(\Omega)}$$
$$\le \sum_{i=0}^{\infty} \left\| \sup_{|t-s|<\theta, t,s\in D_i} |X(t)-X(s)| \right\|_{L_U(\Omega)} \le \sum_{i=0}^{\infty} B_i(\theta),$$

аналогічно

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\theta, t,s\in[0,\infty)} |X(t)-X(s)| > \varepsilon\right\} \le \mathsf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\theta, t,s\in\bigcup_{i=0}^{\infty} D_i} |X(t)-X(s)| > \varepsilon\right\}$$
$$\le \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\theta, t,s\in D_i} |X(t)-X(s)| > \varepsilon\right\} \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{U\left(\varepsilon/B_i(\theta)\right)},$$

що й потрібно було довести. $\square$

Наслідок 3.1. *Якщо виконуються умови теореми 3.1, то процес* $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ *рівномірно неперервний з ймовірністю 1.*

Доведення. Якщо виконуються умови теореми 3.1, то оскільки всі $B_i(\theta) \to 0$ при $\theta \to 0$, то і $\sup_{|t-s|<\theta, t,s\in[0,\infty)} |X(t) - X(s)| \to 0$ при $\theta \to 0$ за ймовірністю.

Отже, існує монотонно спадна послідовність $\{\theta_k,\}_{k\geq 1}$, причому $\theta_k \to 0$, $k \to \infty$, що $\sup_{|t-s|<\theta_k, t,s\in[0,\infty)} |X(t) - X(s)| \to 0$ з ймовірністю одиниця, а оскільки $\sup_{|t-s|<\theta, t,s\in[0,\infty)} |X(t) - X(s)|$ є монотонно зростаючою функцією від θ, то і

$$\sup_{|t-s|<\theta, t,s\in[0,\infty)} |X(t) - X(s)| \to 0$$

при $\theta \to 0$ з ймовірністю одиниця. □

Наслідок 3.2. *Нехай* $[0,\infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, *де* $A_i = [a_i, a_{i+1}]$, $\{a_i, i = 0, \ldots, \infty\}$ *— довільна зростаюча послідовність, причому* $a_0 = 0$. *Позначимо* $D_i = [a_i, a_{i+1} + \theta]$, $\alpha_i = a_{i+1} - a_i$.

Нехай процес $\{X(t), t \in [0,\infty)\} \in L_q(\Omega)$ *(тобто* $U(x) = x^q$ $(q \geq 1)$*) — сепарабельний випадковий процес, причому для будь-якого* $0 < \theta < \alpha_{i+1}$, $i = 0, \ldots, \infty$, *виконується наступне:*

$$\sup_{|t-s|\leq h; t,s\in D_i} \|X(t) - X(s)\|_{L_q(\Omega)} \leq c_i h^{\beta}, \qquad h \in B_i,\ 0 < \beta \leq 1, \tag{13}$$

де $\{c_i\}$ *— незростаюча послідовність.*

Тоді для всіх $\varepsilon > 0$, $0 < \upsilon < 1$ *виконується нерівність:*

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\theta, t,s\in[0,\infty)} |X(t) - X(s)| > \varepsilon\right\} \\ \leq \frac{2^{q-\frac{1}{\beta}} S_\upsilon^q}{(1-\frac{1}{\beta q})^q \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_i + \theta) c_i^{\frac{1}{\beta}} \left(\sup_{t\in D_i} (\mathsf{E}\,|X(t)|^q)^{\frac{1}{q}}\right)^{q-\frac{1}{\beta}}, \end{aligned}$$

де

$$S_\upsilon = \frac{3-\upsilon}{\upsilon^{1+\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon)^2(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}})}.$$

Доведення. Перевіримо виконання умови (9). Маємо:

$$\sigma_i^{(-1)}(h) = \left(\frac{h}{c_i}\right)^{1/\beta} = \frac{1}{c_i^{\frac{1}{\beta}}} h^{\frac{1}{\beta}},$$

$$C(\upsilon, i) = \frac{(\alpha_i + \theta)^{\frac{1}{\beta}} \sum_{m=k-1}^{\infty} \upsilon^{m/\beta}}{(\alpha_i + \theta)^{\frac{1}{\beta}} \upsilon^{k/\beta}} = \frac{1}{\upsilon^{\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}})},$$

$$S_{\upsilon,i} = \frac{1}{\upsilon(1-\upsilon)} \cdot \max\left(2, \left[\frac{1}{\upsilon^{\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}})}\right] \frac{3-\upsilon}{1-\upsilon}\right) =: S_\upsilon$$

(не залежить від i). Оскільки $\upsilon \in (0,1)$, то $\frac{3-\upsilon}{1-\upsilon} \geq 3$, звідки

$$\left[\frac{1}{\upsilon^{\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}})}\right] \frac{3-\upsilon}{1-\upsilon} \geq 3,$$

тому

$$S_\upsilon = \frac{3-\upsilon}{\upsilon^{1+\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon)^2(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}})}.$$

Позначимо $M_i := \min(\sigma_i(\theta), 2\sup_{t\in D_i}(\mathsf{E}\,|X(t)|^q)^{1/q})$, тоді

$$
\begin{aligned}
B_i(\theta) &\le S_\upsilon \int_0^{M_i} \left(\frac{(\alpha_i+\theta)c_i^{\frac{1}{\beta}}}{2u^{\frac{1}{\beta}}} + 1 \right)^{1/q} du \le S_\upsilon c_i^{1/q\beta} \int_0^{M_i} \left(\frac{\alpha_i+\theta}{u^{\frac{1}{\beta}}} \right)^{1/q} du \\
&= S_\upsilon c_i^{1/q\beta} (\alpha_i+\theta)^{1/q} \left. \frac{u^{-\frac{1}{\beta q}+1}}{1-\frac{1}{\beta q}} \right|_0^{M_i} = S_\upsilon c_i^{1/q\beta}(\alpha_i+\theta)^{1/q} \frac{M_i^{-\frac{1}{\beta q}+1}}{1-\frac{1}{\beta q}} \\
&=: A_{\upsilon,i} M_i^{-\frac{1}{\beta q}+1}.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$
U\left(\frac{\varepsilon}{B_i(\theta)}\right) = \frac{\varepsilon^q}{B_i^q(\theta)} \ge \frac{\varepsilon^q}{A_{\upsilon,i}^q M_i^{q(-\frac{1}{\beta q}+1)}}.
$$

Звідси, за теоремою 3.1

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}&\left\{ \sup_{|t-s|<\theta, t,s\in[0,\infty)} |X(t)-X(s)| > \varepsilon \right\} \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_{\upsilon,i}^q M_i^{q(-\frac{1}{\beta q}+1)}}{\varepsilon^q} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_\upsilon^q}{(1-\frac{1}{\beta q})^q \varepsilon^q} (\alpha_i+\theta) c_i^{\frac{1}{\beta}} M_i^{q-\frac{1}{\beta}} \\
&\le \frac{2^{q-\frac{1}{\beta}} S_\upsilon^q}{(1-\frac{1}{\beta q})^q \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_i+\theta) c_i^{\frac{1}{\beta}} \left(\sup_{t\in D_i} (\mathsf{E}\,|X(t)|^q)^{1/q} \right)^{q-\frac{1}{\beta}},
\end{aligned}
$$

де

$$
S_\upsilon = \frac{3-\upsilon}{\upsilon^{1+\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon)^2(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}})}. \quad \square
$$

4. Наближення процесів з простору Орліча цілими функціями експоненціального типу $\le \gamma$

Використаємо доведені твердження для апроксимації процесів Орліча цілими функціями експоненціального типу не більше γ в метриці простору $C[0,\infty)$.

Наведемо необхідні означення.

Означення 4.1. Процес $\widetilde{X}(t)$ наближає $X(t)$ із точністю $\varepsilon > 0$ та надійністю $1-\delta$, $0<\delta<1$ в просторі Банаха A, якщо

$$
\mathsf{P}\left\{ \left\| X(t) - \widetilde{X}(t) \right\|_A > \varepsilon \right\} \le \delta.
$$

Означення 4.2. Цілими функціями експоненціального типу називаються цілі функції $f(z)$, які для $\forall z$ задовільняє нерівність типу $|f(z)| \le A_1 e^{A_2|z|}$, де числа A_1, A_2 не залежать від z. Точна нижня грань константи A_2, для якої має місце наведена нерівність, називається типом функції $f(z)$ і знаходиться за формулою

$$
\sigma = \overline{\lim}_{|z|\to\infty} \frac{\ln|f(z)|}{|z|}.
$$

Означення 4.3. Розглянемо простір C неперервних обмежених функцій, елементами якого є функції на R. Візьмемо деяку множину M функцій $f(x)(-\infty < x < \infty)$, які можуть і не належати C. Кожній функції $f(x) \in M$ поставимо у відповідність множину всіх тих цілих функцій $F(x)$ експоненціального типу $\le \gamma(\gamma > 0)$, для яких $f(x) - F(x) \in C$. Цю множину позначимо N_f і покладемо

$$
A_\gamma[f] = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } N_f \text{ порожня}, \\ \inf_{F\in N_f} \|f-F\|, & \text{якщо } N_f \text{ непорожня}. \end{cases}
$$

Покладемо $A_\gamma[M] = \sup_{f\in M} A_\gamma[f]$, задача знаходження цієї величини називається *прямою задачею гармонійної апроксимації* у метриці простору C для класу M.

Позначимо $\varepsilon_\gamma(f) := A_{\gamma-0}[f]$.

Означення 4.4 ([3]). Нехай $f(x)$ — рівномірно неперервна функція у скінченому чи нескінченому інтервалі I. Її модулем неперервності називається $\omega(\delta) = \omega(\delta; f) = \sup_{|x'-x''|\le\delta} |f(x') - f(x'')|$, $x', x'' \in I$.

Теорема 4.1 ([3]). *Нехай функція $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, має похідну $f^{(r)}(x)$ порядку $r \ge 0$, інтегровну в кожному скінченому інтервалі. Якщо $f^{(r)}(x)$ рівномірно неперервна на всій осі, то*

$$\varepsilon_\gamma(f) \le 3\omega\left(\frac{1}{\gamma}; f^{(r)}\right).$$

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови теореми 3.1, причому $\theta = \frac{1}{\gamma}$. Тоді для будь-яких $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < \upsilon < 1$ має місце нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{\varepsilon_\gamma(X) > \varepsilon\right\} \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{U\big(2\varepsilon/(3B_i\,(1/\gamma))\big)}.$$

Доведення. Застосуємо теорему 4.1 для $r = 0$ до парних функцій. Оскільки процес $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ є рівномірно неперервним з ймовірністю 1, то одержимо:

$$\mathsf{P}\left\{\varepsilon_\gamma(X) > \varepsilon\right\} \le \mathsf{P}\left\{\omega\left(\frac{1}{\gamma}; X\right) > \frac{2\varepsilon}{3}\right\} \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{U\big(2\varepsilon/(3B_i\,(1/\gamma))\big)}. \quad \square$$

Наслідок 4.1. *Нехай замість умов теореми 3.1 виконуються умови наслідка 3.2, причому $\theta = \frac{1}{\gamma}$. Тоді для будь-яких $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < \upsilon < 1$*

$$\mathsf{P}\{\varepsilon_\gamma(X) > \varepsilon\} \le \frac{3^q S_\upsilon^q}{\left(1 - \frac{1}{\beta q}\right)^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha_i + \frac{1}{\gamma}\right) c_i^{\frac{1}{\beta}} \left(\sup_{t\in D_i} \|X(t)\|\right)^{q-\frac{1}{\beta}},$$

де

$$S_\upsilon = \frac{3-\upsilon}{\upsilon^{1+\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon)^2\left(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}}\right)}.$$

Доведення. Використовуючи попередню теорему та наслідок 3.2, одержимо:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left\{\varepsilon_\gamma(X) > \varepsilon\right\} &\le \mathsf{P}\left\{\omega\left(\frac{1}{\gamma}; X\right) > \frac{2\varepsilon}{3}\right\} \\
&\le \frac{2^{q-\frac{1}{\beta}} S_\upsilon^q}{\left(1 - \frac{1}{\beta q}\right)^q \left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)^q} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha_i + \frac{1}{\gamma}\right) c_i^{\frac{1}{\beta}} \left(\sup_{t\in D_i} \|X(t)\|\right)^{q-\frac{1}{\beta}} \\
&= \frac{3^q S_\upsilon^q}{\left(1 - \frac{1}{\beta q}\right)^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha_i + \frac{1}{\gamma}\right) c_i^{\frac{1}{\beta}} \left(\sup_{t\in D_i} \|X(t)\|\right)^{q-\frac{1}{\beta}},
\end{aligned}$$

де

$$S_\upsilon = \frac{3-\upsilon}{\upsilon^{1+\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon)^2(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}})}. \quad \square$$

5. Приклади наближення $L_q(\Omega)$-процесів

Наведемо кілька прикладів апроксимації $L_q(\Omega)$-процесів в метриці $C[0,\infty)$ цілими функціями експоненціального типу $\le \gamma$.

5.1. **Процес із нормою, що має певний порядок спадання.**

Теорема 5.1. *Нехай для процесу* $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ *виконується умови наслідка 3.2, а також умова:* $(\mathsf{E}\,|X(t)|^q)^{1/q} \le \frac{c_*}{t^\eta}$, $\eta > q - \frac{1}{\beta}$, $\beta > \frac{1}{q}$, $q \ge 1$, $c_* = const$, *тобто нехай процес має норму, що має певний порядок спадання. Тоді для будь-яких* $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < \upsilon < 1$ *має місце нерівність:*

$$\mathsf{P}\{\varepsilon_\gamma(X) > \varepsilon\} \le \frac{3^q c_*^{q-\frac{1}{\beta}} S_\upsilon^q}{\left(1 - \frac{1}{\beta q}\right)^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha_i + \frac{1}{\gamma}\right) c_i^{\frac{1}{\beta}} a_i^{-\eta(q-\frac{1}{\beta})},$$

де

$$S_\upsilon = \frac{3-\upsilon}{\upsilon^{1+\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon)^2(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}})}.$$

Доведення. За наслідком 4.1 маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\varepsilon_\gamma(X) > \varepsilon\} &\le \frac{3^q S_\upsilon^q}{(1 - \frac{1}{\beta q})^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha_i + \frac{1}{\gamma}\right) c_i^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{c_*}{a_i^\eta}\right)^{q-\frac{1}{\beta}} \\ &= \frac{3^q c_*^{q-\frac{1}{\beta}} S_\upsilon^q}{(1 - \frac{1}{\beta q})^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha_i + \frac{1}{\gamma}\right) c_i^{\frac{1}{\beta}} a_i^{-\eta(q-\frac{1}{\beta})}.\end{aligned}$$

Приклад 1. Нехай $a_i = e^i$, $i = 1, \ldots, \infty$.
Тоді $\alpha_i + \frac{1}{\gamma} < \alpha_i + \alpha_i = 2(a_{i+1} - a_i) = 2(e^{i+1} - e_i) < 2e^{i+1}$,

$$\sup_{t \in D_i} \|X(t)\| = \frac{c_*}{a_i^\eta} = c_* e^{-i\eta},$$

звідки (враховуючи, що $\{c_i\}$ — спадна) з теореми 5.1 одержуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\varepsilon_\gamma(X) > \varepsilon\right\} &\le \frac{2e \cdot 3^q S_\upsilon^q c_0^{\frac{1}{\beta}}}{(1 - \frac{1}{\beta q})^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} e^i \left(c_* e^{-i\eta}\right)^{q-\frac{1}{\beta}} \\ &= \frac{2e \cdot 3^q S_\upsilon^q c_0^{\frac{1}{\beta}} c_*^{q-\frac{1}{\beta}}}{(1 - \frac{1}{\beta q})^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q} \cdot \frac{1}{1 - e^{1-\eta(q-\frac{1}{\beta})}} = \frac{c}{\varepsilon^q},\end{aligned}$$

де

$$c = \frac{2e \cdot 3^q S_\upsilon^q c_0^{\frac{1}{\beta}} c_*^{q-\frac{1}{\beta}}}{(1 - \frac{1}{\beta q})^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q (1 - e^{1-\eta(q-\frac{1}{\beta})})}. \quad \square$$

5.2. **Стаціонарні процеси.**

Теорема 5.2. *Нехай* $[0,\infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, *де* $A_i = [a_i, a_{i+1}]$, $\{a_i, i = 0, \ldots, \infty\}$ — *довільна зростаюча послідовність, причому* $a_0 = 0$. *Позначимо* $D_i = [a_i, a_{i+1} + \frac{1}{\gamma}]$, $\alpha_i = a_{i+1} - a_i$. *Нехай* $\gamma > 0$ — *довільне, але таке, що для кожного* $i = 0, \ldots, \infty$ *виконується* $\frac{1}{\gamma} < \alpha_i$. *Нехай процес* $X(t)$ — *стаціонарний,* $\mathsf{E}\,X(t) = 0$, $(\mathsf{E}\,|X(t)|^q)^{\frac{1}{q}} = c_a$, *і нехай для нього виконується нерівність для кожного* i:

$$\sup_{|t-s| \le h; t,s \in D_i} \|X(t) - X(s)\|_{L_q(\Omega)} \le c_i h^\beta, \qquad 0 < \beta \le 1, \ c_i = const,$$

причому $\{c_i\}$ – *незростаюча послідовність* $c_i \ge c_{i+1}$, $i \ge 0$, *а функція* $c(t)$ — *монотонно зростаюча, диференційовна, причому*

$$\sup_{t \in D_k} \frac{|c'(t)|}{|c^2(t)|} |a_{k+2} - a_k|^{1-\beta}$$

— спадна послідовність відносно k. Позначимо процес $Y(t) = X(t)/c(t)$. Тоді для будь-яких $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < \upsilon < 1$ виконується нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{\varepsilon_\gamma(Y) > \varepsilon\right\} \le \frac{3^q c_a^{q-\frac{1}{\beta}} S_\upsilon^q}{(1-\frac{1}{\beta q})^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i + \frac{1}{\gamma}) C_i^{\frac{1}{\beta}}}{(c(a_i))^{q-\frac{1}{\beta}}}, \tag{14}$$

де

$$S_\upsilon = \frac{3-\upsilon}{\upsilon^{1+\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon)^2(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}})},$$

$$C_k = \frac{c_k}{|c(a_k)|} + c_a \cdot \sup_{t\in D_k} \frac{|c'(t)|}{|c^2(t)|} |a_{k+2} - a_k|^{1-\beta}.$$

Доведення. Маємо: для $t, s \in D_k = [a_k, a_{k+1} + \theta]$ і деякого $\mu \in D_k$

$$\begin{aligned}
\|Y(t) - Y(s)\|_{L_q(\Omega)} &= \left\| \frac{X(t)}{c(t)} - \frac{X(s)}{c(t)} + \frac{X(s)}{c(t)} - \frac{X(s)}{c(s)} \right\|_{L_q(\Omega)} \\
&\le \frac{1}{|c(t)|} \cdot \|X(t) - X(s)\|_{L_q(\Omega)} + \|X(s)\|_{L_q(\Omega)} \left| \frac{1}{c(t)} - \frac{1}{c(s)} \right| \\
&\le \frac{c_k |t-s|^\beta}{|c(t)|} + \|X(s)\|_{L_q(\Omega)} \cdot \frac{|c'(\mu)| \cdot |t-s|}{|c^2(\mu)|} \\
&\le \frac{c_k |t-s|^\beta}{|c(a_k)|} + c_a \cdot \sup_{t\in D_k} \frac{|c'(t)|}{|c^2(t)|} \cdot |t-s|,
\end{aligned}$$

Але $|t-s| \le |a_{k+2} - a_k|^{1-\beta} |t-s|^\beta$, тому $\|Y(t) - Y(s)\|_{L_q(\Omega)} \le C_k |t-s|^\beta$, де $C_k = \frac{c_k}{|c(a_k)|} + c_a \cdot \sup_{t\in D_k} \frac{|c'(t)|}{|c^2(t)|} |a_{k+2} - a_k|^{1-\beta}$.

Оскільки $\{c_k\}$ — спадна, а $\sup_{t\in D_k} \frac{|c'(t)|}{|c^2(t)|} |a_{k+2} - a_k|^{1-\beta}$ — спадна відносно k, то і C_k — спадна відносно k, то можемо використати наслідок 4.1, звідки отримуємо необхідну нерівність теореми.

Приклад 2. Нехай в попередній теоремі $c(t) = t^a$, $a > 1$, $a > \frac{1}{q}$, $a_i = e^i$.

Тоді

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{c_k}{|c(a_k)|} + c_a \cdot \sup_{t\in D_k} \frac{|c'(t)|}{|c^2(t)|} |a_{k+2} - a_k|^{1-\beta} = \frac{c_k}{e^{ak}} + c_a \frac{a}{e^{k(a+1)} |e^{k+2} - e^k|^{1-\beta}} \\
&= \frac{c_k}{e^{ak}} + \frac{a c_a (e^2-1)^{1-\beta}}{e^{k(a+\beta)}} < \frac{c_k + a c_a (e^2-1)^{1-\beta}}{e^{ak}} =: \frac{\widetilde{c}}{e^{ak}},
\end{aligned}$$

де $\widetilde{c} := c_k + a c_a (e^2-1)^{1-\beta}$.

Тоді за нерівністю (14)

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left\{\varepsilon_\gamma\left(\frac{X}{c}\right) > \varepsilon\right\} &\le \frac{3^q c_a^{q-\frac{1}{\beta}} S_\upsilon^q}{(1-\frac{1}{\beta q})^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} \left(e^{i+1} - e^i + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot \frac{\widetilde{c}^{\frac{1}{\beta}}}{e^{ai/\beta}} \cdot \frac{1}{e^{ai(q-\frac{1}{\beta})}} \\
&< \frac{3^q e \widetilde{c}^{\frac{1}{\beta}} c_a^{q-\frac{1}{\beta}} S_\upsilon^q}{(1-\frac{1}{\beta q})^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^i}{e^{aiq}} = \frac{3^q e \widetilde{c}^{\frac{1}{\beta}} c_a^{q-\frac{1}{\beta}} S_\upsilon^q}{(1-\frac{1}{\beta q})^q 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^q (1 - e^{(aq-1)})} = \frac{c}{\varepsilon^q},
\end{aligned}$$

де c — деяка відома константа, а саме

$$c = \frac{3^q e \widetilde{c}^{\frac{1}{\beta}} c_a^{q-\frac{1}{\beta}} S_\upsilon^q}{(1-\frac{1}{\beta q})^q 2^{\frac{1}{\beta}} (1 - e^{(aq-1)})}. \quad \square$$

5.3. Процес із заданою коваріаційною функцією.

Теорема 5.3. *Нехай* $[0,\infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, *де* $A_i = [a_i, a_{i+1}]$, $\{a_i, i = 0,\dots,\infty\}$ *— довільна зростаюча послідовність, причому* $a_0 = 0$. *Позначимо* $D_i = [a_i, a_{i+1} + \frac{1}{\gamma}]$, $\alpha_i = a_{i+1} - a_i$. *Нехай* $\gamma > 0$ *— довільне, але таке, що для кожного* $i = 0,\dots,\infty$ *виконується* $\frac{1}{\gamma} < \alpha_i$. *Нехай задано нестаціонарний процес* $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ *з простору* $L_2(\Omega)$ *з коваріаційною функцією*

$$r(t,s) = \int_0^\infty f(t,u) f(s,u)\, du,$$

де $\exists \frac{\partial f(t,u)}{\partial t}$, $t \in [0,\infty)$, *причому*

$$\left|\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}\right| < |c_i(u)|, \qquad t \in [a_i, a_{i+1} + \frac{1}{\gamma}],\ u \in [0,\infty),$$

і

$$C_i = 2\left(\int_0^\infty |c_i(u)|^{2\beta} \cdot \sup_{t\in[a_i,a_{i+1}+\frac{1}{\gamma}]} |f(t,u)|^{2(1-\beta)} du\right)^{1/2} < \infty$$

— спадна послідовність. Тоді для будь-якого $\beta \in (0,1)$

$$\mathsf{P}\{\varepsilon_\gamma(X) > \varepsilon\} \le \frac{9S_\upsilon^2}{(1-\frac{1}{2\beta})^2 2^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^2} \sum_{i=0}^\infty \left(\alpha_i + \frac{1}{\gamma}\right) C_i^{\frac{1}{\beta}} (\sup_{t\in D_i} \|X(t)\|)^{2-\frac{1}{\beta}},$$

де

$$S_\upsilon = \frac{3-\upsilon}{\upsilon^{1+\frac{1}{\beta}}(1-\upsilon)^2(1-\upsilon^{\frac{1}{\beta}})}.$$

Доведення. Для довільного $0 < \beta \le 1$ маємо наступне:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X(t) - X(s))^2 &= \int_0^\infty (f(t,u) - f(s,u))^2\, du \\
&= \int_0^\infty (f(t,u) - f(s,u))^{2\beta} (f(t,u) - f(s,u))^{2(1-\beta)}\, du \\
&\le |t-s|^{2\beta} \int_0^\infty |f'(\mu,u)|^{2\beta} \cdot |f(t,u) - f(s,u)|^{2(1-\beta)}\, du \\
&\le |t-s|^{2\beta} \int_0^\infty |c(u)|^{2\beta} \cdot |f(t,u) - f(s,u)|^{2(1-\beta)}\, du.
\end{aligned}$$

Використаємо наступну нерівність.

Для $a > 0$, $b > 0$ має місце $(a+b)^r \le c_r(a^r + b^r)$, де

$$c_r = \begin{cases} 2^{r-1}, & \text{при } r \ge 1, \\ 1, & \text{при } 0 \le r \le 1. \end{cases}$$

Отримаємо для $t, s \in [a_i, a_{i+1} + \frac{1}{\gamma}]$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X(t) - X(s))^2 &\le c_r |t-s|^{2\beta} \int_0^\infty |c(u)|^{2\beta} \cdot \left(|f(t,u)|^{2(1-\beta)} + |f(s,u)|^{2(1-\beta)}\right) du \\
&\le 2c_r |t-s|^{2\beta} \int_0^\infty |c(u)|^{2\beta} \cdot \sup_{t\in[a_i,a_{i+1}+\frac{1}{\gamma}]} |f(t,u)|^{2(1-\beta)}\, du.
\end{aligned}$$

В нашому випадку $r = 2(1-\beta) \in [1,2]$, тому $c_r \in [1,2]$, звідки

$$(\mathsf{E}(X(t) - X(s))^2)^{1/2} \le |t-s|^\beta \cdot 2\left(\int_0^\infty |c(u)|^{2\beta} \cdot \sup_{t\in[a_i,a_{i+1}+\frac{1}{\gamma}]} |f(t,u)|^{2(1-\beta)} du\right)^{1/2},$$

тобто

$$\sup_{|t-s|\le h, t,s\in[a_i,a_{i+1}+\frac{1}{\gamma}]} \|X(t)-X(s)\|_{L_2(\Omega)} \le C_i h^{\beta},$$

де

$$C_i = 2\left(\int_0^{\infty} |c(u)|^{2\beta}\cdot \sup_{t\in[a_i,a_{i+1}+\frac{1}{\gamma}]} |f(t,u)|^{2(1-\beta)}\,du\right)^{1/2}.$$

Таким чином, можемо використати наслідок 4.1 для $q=2$ (тобто для простору $L_2(\Omega)$), одержимо необхідну нерівність теореми, що доводиться. □

Приклад 3. Нехай $f(t,u)=\frac{1}{(1+ut)^{\lambda}}$, $\lambda>1/2$. Тоді

$$\|X(t)\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+ut)^{2\lambda}}\,du} = \sqrt{\frac{1}{t}\frac{(1+ut)^{-2\lambda+1}}{-2\lambda+1}\Big|_0^{\infty}} = \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2\lambda-1}}.$$

Крім того,

$$\sup_{t\in[a_i,a_{i+1}+\frac{1}{\gamma}]} |f(t,u)|^{2(1-\beta)} = \frac{1}{(1+ua_i)^{2\lambda(1-\beta)}},$$

$$\frac{\partial f(t,u)}{\partial t} = -\frac{u\lambda}{(1+ut)^{\lambda+1}},$$

звідки

$$c_i(u) = \frac{u\lambda}{(1+ua_i)^{\lambda+1}}, t\in[a_i,a_{i+1}+\frac{1}{\gamma}].$$

Маємо:

$$C_i = 2\left(\int_0^{\infty}\frac{|u\lambda|^{2\beta}}{(1+ua_i)^{2\beta(1+\lambda)+2\lambda(1-\beta)}}\,du\right)^{1/2} = 2\lambda^{\beta}\left(\int_0^{\infty}\frac{u^{2\beta}}{(1+ua_i)^{2(\lambda+\beta)}}\right)^{1/2} < \infty$$

при $\lambda>1/2$. Оскільки a_i — зростаюча по i, то C_i — спадна, а оскільки

$$\|X(t)\| \le \frac{K}{t^{\eta}},$$

де $\eta=1/2$, $K=\frac{1}{\sqrt{2\lambda-1}}$, то задача звелася до прикладу 2 (є частинним його випадком), за умови, що $\eta > q-\frac{1}{\beta}$, тобто $\beta<\frac{2}{3}$.

Література

1. О. Є. Каменщикова, Т. О. Яневич, *Апроксимація $L_p(\omega)$-процесів*, Теорія ймовір. та матем. статист. **83** (2010), 59–68.
2. V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
3. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, “Наука”, Москва, 1965.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4г, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: ykoz@ukr.net

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4г, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: kamalev@gmail.com

Надійшла 07/03/2012