ДВОСТОРОННІ ОЦІНКИ ГАММА-РОЗПОДІЛУ

УДК 519.21

О. О. ВОЗОВІТОВ

Резюме. У роботі наведено двосторонні асимптотичні оцінки неповного гамма-розподілу та їх застосування для отримання деяких інших нерівностей.

При розв'язуванні різних задач, зв'язаних з оцінюванням гауссівського розподілу, часто використовується нерівність Комацу [1, 2]

$$\frac{2e^{-t^2/2}}{t+\sqrt{t^2+4}} \le \int_t^\infty e^{-x^2/2}\,dx \le \frac{2e^{-t^2/2}}{t+\sqrt{t^2+2}}, \qquad t \ge 0.$$

В [3] була узагальнена ідея доведення нерівності Комацу (лема 1, див. далі). Спираючись на цю лему, в роботі встановлюються оцінки гамма-розподілу та інших подібних йому розподілів.

Розглянемо задачу про оцінку інтеграла

$$\mathfrak{J}_r(t) = \int_t^\infty x^r e^{-x}\,dx, \qquad t \ge 0,\ r \ge 0.$$

Інтегруванням частинами цей інтеграл можна привести до вигляду

$$\mathfrak{J}_r(t) = A\mathfrak{J}_\alpha(t) + B(t), \qquad t \ge 0,\ \alpha \in [0,1), \tag{1}$$

де $\alpha = r - [r]$ ($[r]$ — ціла частина числа r),

$$A = r(r-1)(r-2)\dots(\alpha+1),$$

$$B(t) = e^{-t}\left(t^r + rt^{r-1} + r(r-1)t^{r-2} + \dots + At^\alpha\right).$$

Оскільки $\mathfrak{J}_0(t) = e^{-t}$, то питання про оцінку інтеграла $\mathfrak{J}_r(t)$, $r \ge 0$, зводиться до оцінювання інтеграла $\mathfrak{J}_\alpha(t)$ при $\alpha \in (0,1)$.

Теорема 1. *Для інтеграла $\mathfrak{J}_r(t)$ виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} &\frac{4\alpha t^\alpha e^{-t}}{2t-2\alpha+1+\sqrt{(2t-2\alpha+1)^2+8t}} \\ &\qquad \le \mathfrak{J}_\alpha(t) - t^\alpha e^{-t} \le \frac{4\alpha t^\alpha e^{-t}}{2t-2\alpha+1+\sqrt{(2t-2\alpha+1)^2+2ct}}. \end{aligned} \tag{2}$$

При цьому, ліва нерівність виконується при всіх $t \ge \max\{0, \alpha - \frac12\}$ і $\alpha \in (0,1)$. Якщо $c = 2$, то права нерівність виконується при $t \ge t_0$, де

$$t_0 = \begin{cases} \frac12\left((1-2\alpha)^2\left(2-2\alpha+\sqrt{3-4\alpha}\right)\right)^{1/3} & \\ \quad +\frac12\left((1-2\alpha)^2\left(2-2\alpha-\sqrt{3-4\alpha}\right)\right)^{1/3}, & \text{при } \alpha \in \left(0, \frac34\right], \\ (2\alpha-1)\cos\frac{\phi}{3}, & \text{де } \cos\phi = \frac{2-2\alpha}{2\alpha-1}, \text{ при } \alpha \in \left(\frac34, 1\right). \end{cases}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60E05; Secondary 60E15.

Якщо $c = 4\alpha$ *і* $\alpha \in (0,1)$, *то права нерівність виконується при* $t \geq \tilde{t}_0$, *де*

$$\tilde{t}_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-2\alpha)^2\left(1+\sqrt{1+\frac{(1-2\alpha)^2}{27}}\right)} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-2\alpha)^2\left(1-\sqrt{1+\frac{(1-2\alpha)^2}{27}}\right)}.$$

Зауваження. Ліва та права частина в (2) асимптотично рівні при $t \to \infty$. При $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ і $c = 2$ маємо, що $t_0 \leq \sqrt[3]{2}$. При $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ і $c = 4\alpha$ маємо, що $\tilde{t}_0 \leq \frac{3}{1+\sqrt[3]{108}}$.

При доведенні теореми 1 використовується наступне твердження [3].

Лемма 1. *Нехай* $y(t)$, $t > \tau_0$, *і* $z(t)$, $t > \tau_0$, *такі дійсні функції, що*

1) $z(t) > 0$, $t > \tau_0$;
2) *при* $t > \tau_0$ *функція* $y(t)$ *диференційовна і для її похідної* $y'(t)$ *має місце нерівність*
$$y'(t) \leq z(t)\, y(t), \qquad t > \tau_0;$$
3) $y(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Тоді

$$y(t) \geq 0, \qquad t > \tau_0.$$

Доведення теореми 1. Покажемо справедливість лівої нерівності. Нехай

$$g(t) = t^{1/2-\alpha} e^t \mathfrak{J}_\alpha(t) - t^{1/2}, \qquad t > 0,$$

$$g_c(t) = \frac{4\alpha\sqrt{t}}{2t - 2\alpha + 1 + \sqrt{(2t-2\alpha+1)^2 + 2ct}}, \qquad t > 0.$$

Похідні цих функцій мають такий вигляд:

$$g'(t) = \frac{2t-2\alpha+1}{2t} g(t) - \frac{\alpha}{\sqrt{t}}, \qquad t > 0,$$

$$g_c'(t) = -2\alpha \frac{2t + 2\alpha - 1}{\left(2t - 2\alpha + 1 + \sqrt{(2t-2\alpha+1)^2 + 2ct}\right)\sqrt{(2t-2\alpha+1)^2 + 2ct}}, \qquad t > 0.$$

Покладемо $y(t) = g(t) - g_c(t)$ і $z(t) = (2t - 2\alpha + 1)/(2t)$, де $t > 0$, і зауважимо, що при $t > \max\{0, \alpha - \frac{1}{2}\}$ умова (1) леми 1 виконана. Для $t > 0$ розглянемо нерівність

$$g_c'(t) \geq z(t) g_c(t) - \frac{\alpha}{\sqrt{t}}.$$

Нескладні підрахунки показують, що вона еквівалентна такій нерівності:

$$P_c(t) = 4(c-4)t^3 + 2(c-2)(c-4\alpha)t^2 + (1-2\alpha)(5c-4-8\alpha-2c\alpha) + 4(1-\alpha)(1-2\alpha)^2 \geq 0.$$

Якщо $c \geq 4$, то ця нерівність має місце для всіх додатних t, починаючи з деякого. Нехай $c = 4$ і $\alpha \in (0,1)$. Тоді $P_4(t) = 4(1-\alpha)(2t - 2\alpha + 1)^2 \geq 0$ і, отже,

$$g_4'(t) \geq z(t) g_4(t) - \frac{\alpha}{\sqrt{t}}, \qquad t > 0.$$

Таким чином, для всіх $t > 0$

$$y'(t) = g'(t) - g_4'(t) = z(t)g(t) - \frac{\alpha}{\sqrt{t}} - g_4'(t) \leq z(t)(g(t) - g_4(t)) = z(t)y(t).$$

Крім цього $g(t) - g_4(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Згідно лемі 1, для всіх $t > \max\{0, \alpha - \frac{1}{2}\}$

$$g(t) - g_4(t) \geq 0,$$

що і доводить ліву нерівність в (1) для всіх $t > \max\{0, \alpha - \frac{1}{2}\}$. Нерівність для $t = \max\{0, \alpha - \frac{1}{2}\}$ отримуємо граничним переходом при $t \to \max\{0, \alpha - \frac{1}{2}\}$.

Дослідимо праву нерівність в (2). Для цього покладемо $y(t) = g_c(t) - g(t)$, $z(t) = (2t - 2\alpha + 1)/(2t)$, $t > 0$, і зауважимо, що при $t > \max\{0, \alpha - \frac{1}{2}\}$ умова (1) леми 1 виконана.

Для $t > 0$ розглянемо нерівність

$$g_c'(t) \le z(t)g_c(t) - \frac{\alpha}{\sqrt{t}}. \tag{3}$$

Прості підрахунки показують, що вона еквівалентна нерівності

$$P_c(t) = 4(c-4)t^3 + 2(c-2)(c-4\alpha)t^2 + (1-2\alpha)(5c-4-8\alpha-2c\alpha)t + 4(1-\alpha)(1-2\alpha)^2 \le 0.$$

Якщо $c < 4$, то ця нерівність має місце для всіх додатних t, починаючи з деякого. Нехай $c = 2$ і $\alpha \in (0,1)$, тоді $P_2(t) = -8t^3 + 6(1-2\alpha)^2 t + 4(1-\alpha)(1-2\alpha)^2$ і нерівність (3) еквівалентна нерівності

$$t^3 - \frac{3}{4}(1-2\alpha)^2 t - \frac{1}{2}(1-\alpha)(1-2\alpha)^2 \ge 0.$$

При дослідженні цієї нерівності скористаємось формулами Кардано для кубічного рівняння

$$t^3 + pt^2 + q = 0. \tag{4}$$

Нехай t_0 — максимальний серед дійсних коренів цього рівняння. Тоді $t^3 + pt^2 + q > 0$ для всіх $t > t_0$. Відомо [4], що якщо $q^2/4 + p^3/27 > 0$, то рівняння (4) має єдиний дійсний корінь

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Якщо $q^2/4 + p^3/27 = 0$, то рівняння (4) має три дійсні корені, два з яких співпадають

$$t_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \quad \text{і} \quad t_2 = t_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Якщо $q^2/4 + p^3/27 < 0$, то рівняння (4) має три дійсних, попарно різних корені:

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\phi + 2k\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

де

$$\cos\phi = -\frac{q}{2r} \quad (\sin\phi > 0), \qquad r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}.$$

Поклавши $p = -\frac{3}{4}(1-2\alpha)^2$ і $q = -\frac{1}{2}(1-\alpha)(1-2\alpha)^2$, бачимо, що при $\alpha \in (0, \frac{3}{4})$

$$t_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-2\alpha)^2\left(2 - 2\alpha + \sqrt{3-4\alpha}\right)} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-2\alpha)^2\left(2 - 2\alpha - \sqrt{3-4\alpha}\right)} > 0.$$

Якщо $\alpha = \frac{3}{4}$, то $t_0 = \frac{1}{2}$. Якщо $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$, то рівняння має три дійсні корені

$$(2\alpha - 1)\cos\frac{\phi + 2k\pi}{3}, \quad \text{де } k = 0, 1, 2, \ \cos\phi = \frac{2-2\alpha}{2\alpha - 1} \ (\sin\phi > 0).$$

Причому $t_0 = (2\alpha - 1)\cos\frac{\phi}{3}$ — максимальний, і до того ж додатний корінь рівняння при $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$. Таким чином у всіх випадках $P_2(t) \le 0$ для всіх $t > t_0$ і $\alpha \in (0,1)$. Отже, для всіх $t > t_0$

$$y'(t) = g_2'(t) - g'(t) = g_2'(t) - z(t)g(t) + \frac{\alpha}{\sqrt{t}} \le z(t)(g_2(t) - g(t)) = z(t)y(t).$$

Зауважимо також, що $t_0 \ge \max\{0, \alpha - \frac{1}{2}\}$ при $\alpha \in (0,1)$, отже $z(t) \ge 0$ при $t > t_0$. Крім того $g_2(t) - g(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Згідно з лемою 1, для всіх $t > t_0$

$$g_2(t) - g(t) \ge 0,$$

що і доводить праву нерівність в (2) при $c=2$ для всіх $t>\max\{0,\alpha-\frac{1}{2}\}$. Нерівність для $t=\max\{0,\alpha-\frac{1}{2}\}$ отримаємо граничним переходом при $t\to\max\{0,\alpha-\frac{1}{2}\}$.

Нехай тепер $c=4\alpha$. Тоді $P_{4\alpha}(t)=4(1-\alpha)(-4t^3-(1-2\alpha)^2t+(1-2\alpha)^2)$ і нерівність (3) еквівалентна нерівності

$$t^3+\frac{(1-2\alpha)^2}{4}t-\frac{(1-2\alpha)^2}{4}\geq 0.$$

Покладемо в формулі Кардано $p=\frac{1}{4}(1-2\alpha)^2$ і $q=-\frac{1}{4}(1-2\alpha)^2$. Отримаємо, що

$$\tilde{t}_0=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-2\alpha)^2\left(1+\sqrt{1+\frac{(1-2\alpha)^2}{27}}\right)}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-2\alpha)^2\left(1-\sqrt{1+\frac{(1-2\alpha)^2}{27}}\right)}$$

буде єдиним додатним коренем при $\alpha\in(0,1)$. Для всіх $t\geq\tilde{t}_0$ маємо, що $P_{4\alpha}(t)\leq 0$, отже для всіх $t>\tilde{t}_0$

$$y'(t)=g'_{4\alpha}(t)-g'(t)=g'_{4\alpha}(t)-z(t)g(t)+\frac{\alpha}{\sqrt{t}}\leq z(t)(g_{4\alpha}(t)-g(t))=z(t)y(t).$$

Зауважимо, що $\tilde{t}_0\geq\max\{0,\alpha-\frac{1}{2}\}$ при $\alpha\in(0,1)$, отже $z(t)\geq 0$ при $t>\tilde{t}_0$. Крім того, $g_{4\alpha}(t)-g(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Згідно з лемою 1, для всіх $t>\tilde{t}_0$

$$g_{4\alpha}(t)-g(t)\geq 0,$$

що і доводить праву нерівність в (2) при $c=4\alpha$ для всіх $t>\max\{0,\alpha-\frac{1}{2}\}$. Нерівність для $t=\max\{0,\alpha-\frac{1}{2}\}$ отримуємо граничним переходом при $t\to\max\{0,\alpha-\frac{1}{2}\}$. Таким чином, теорему доведено. □

За допомогою нерівностей (2) можна отримати подібні оцінки для інших інтегралів. Розглянемо інтеграл

$$\mathfrak{B}_\gamma(t)=\int_t^\infty x^\gamma\,dF(x),\qquad t\geq 0,$$

де

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\theta x^\beta}, & \text{при } x\geq 0,\\ 0, & \text{при } x<0,\end{cases}$$

— функція розподілу Вейбула. Після заміни змінної $u=\theta x^\beta$, маємо

$$\mathfrak{B}_\gamma(t)=\theta^{-\gamma/\beta}\mathfrak{I}_{\gamma/\beta}\left(\theta t^\beta\right).$$

Нехай, наприклад, $\beta>\gamma>0$. Тоді

$$\frac{4\gamma t^\gamma e^{-\theta t^\beta}}{2\beta\theta t^\beta-2\gamma+\beta+\sqrt{(2\beta\theta t^\beta-2\gamma+\beta)^2+8\beta^2\theta t^\beta}}$$
$$\leq\mathfrak{B}_\gamma(t)-t^\gamma e^{-\theta t^\beta}\leq\frac{4\gamma t^\gamma e^{-\theta t^\beta}}{2\beta\theta t^\beta-2\gamma+\beta+\sqrt{(2\beta\theta t^\beta-2\gamma+\beta)^2+2c\beta^2\theta t^\beta}}.$$

Ліва нерівність вірна при $\theta t^\beta\geq\max\{0,\frac{\gamma}{\beta}-\frac{1}{2}\}$. Якщо $c=2$, то права нерівність вірна при $t\geq t_0$, де

$$t_0{}^\beta=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}\sqrt[3]{\left(1-2\frac{\gamma}{\beta}\right)^2\left(2-2\frac{\gamma}{\beta}+\sqrt{3-4\frac{\gamma}{\beta}}\right)}\\ \qquad+\frac{1}{2\theta}\sqrt[3]{\left(1-2\frac{\gamma}{\beta}\right)^2\left(2-2\frac{\gamma}{\beta}-\sqrt{3-4\frac{\gamma}{\beta}}\right)}, & \frac{\gamma}{\beta}\in\left(0,\frac{3}{4}\right],\\ \frac{1}{\theta}\left(2\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\cos\frac{\phi}{3}, & \text{де } \cos\phi=\frac{2\beta-2\gamma}{2\gamma-\beta}\\ & \text{при } \frac{\gamma}{\beta}\in\left(\frac{3}{4},1\right).\end{cases}$$

Якщо $c = 4\gamma/\beta$ і $\gamma/\beta \in (0,1)$, то права нерівність вірна при $t \geq \tilde{t}_0$, де

$$\tilde{t}_0^\beta = \frac{1}{2\theta}\sqrt[3]{\left(1-2\frac{\gamma}{\beta}\right)^2\left(1+\sqrt{1+\frac{\left(1-2\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}{27}}\right)} + \frac{1}{2\theta}\sqrt[3]{\left(1-2\frac{\gamma}{\beta}\right)^2\left(1-\sqrt{1+\frac{\left(1-2\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}{27}}\right)}.$$

Якщо $\gamma \geq \beta > 0$, то має місце формула (1).

Розглянемо інтеграл

$$\mathfrak{N}_\gamma(t) = \int_t^\infty x^\gamma e^{-x^2/2}\,dx, \qquad t \geq 0,\ \gamma \in (-1,1).$$

Після заміни змінної $u = x^2/2$ отримаємо, що

$$\mathfrak{N}_\gamma(t) = \frac{2^{(\gamma+1)/2}}{\gamma+1}\mathfrak{J}_{(\gamma+1)/2}\left(\frac{t^2}{2}\right) - \frac{t^{\gamma+1}}{\gamma+1}e^{-t^2/2}, \qquad \frac{\gamma+1}{2} \in (0,1).$$

Тому за формулою (2)

$$\frac{2t^{\gamma+1}e^{-t^2/2}}{t^2-\gamma+\sqrt{(t^2-\gamma)^2+4t^2}} \leq \mathfrak{N}_\gamma(t) \leq \frac{2t^{\gamma+1}e^{-t^2/2}}{t^2-\gamma+\sqrt{(t^2-\gamma)^2+ct^2}}.$$

Ліва нерівність вірна при $t^2 \geq \max\{0,\gamma\}$, $\gamma \in (-1,1)$. Якщо $c = 2$, то права нерівність вірна при $t \geq \sqrt{t_0}$, де

$$t_0 = \begin{cases} \sqrt[3]{\gamma^2(1-\gamma+\sqrt{1-2\gamma})} \\ \qquad + \sqrt[3]{\gamma^2(1-\gamma-\sqrt{1-2\gamma})}, & \gamma \in \left(-1,\frac{1}{2}\right], \\ \gamma\cos\frac{\phi}{3}, & \text{де } \cos\phi = \frac{1-\gamma}{\gamma}\ (\sin\phi > 0),\ \gamma \in \left(\frac{1}{2},1\right). \end{cases}$$

Якщо ж $c = 2+2\gamma$ і $\gamma \in (-1,1)$, то права нерівність вірна при $t \geq \sqrt{\tilde{t}_0}$, де

$$\tilde{t}_0 = \sqrt[3]{\gamma^2\left(1+\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\gamma^2\left(1-\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{27}}\right)}.$$

В частинному випадку, при $\gamma = 0$, отримуємо відомі нерівності Комацу. Якщо $\gamma \geq 1$, то слід скористатись формулою (1).

Література

1. Y. Komatsu, *Elementary inequalties for Mill's ratio*, Rep. Statist. Appl. Res. Un. Jap. Ser. Engrs. **4** (1959), 69–70.
2. К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории*, "Мир", Москва, 1968.
3. В. В. Булдыгин, *Гауссовские векторы*, Математика сегодня **11** (1997), 53–70.
4. Д. К. Фаддеев, *Лекции по алгебре*, "Наука", Москва, 1984, стр. 61–67.

Національний технічний університет України, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, пр. Перемоги, 37, Київ 03056

Надійшла 01/06/2001