можно в силу теоремы 2 совершить предельный переход при $R \to \infty$, а предельное выражение выбором H может быть сделано малым.

Таким образом, предельное распределение $\{\eta_R(\lambda_1), \ldots, \eta_R(\lambda_m)\}$ совпадает с предельным распределением $\{\eta_R'(\lambda_1), \ldots, \eta_R'(\lambda_m)\}$. Но $\eta_R'(\lambda_i)$, $i = \overline{1, m}$ есть линейные непрерывные функционалы от процесса $\gamma_R(u)$, и конечномерные распределения $\gamma_R(u)$ слабо сходятся к конечномерным распределениям $\gamma(u)$.

Поэтому, учитывая [7, с. 485] и гауссовость интеграла от гауссовского процесса, получаем гауссовость предельного распределения $\eta_R'(\lambda_i)$, $i = \overline{1, m}$, что завершает доказательство теоремы.

1. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. Киев : Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1980. 208 с. 2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. 296 с. 3. *Дыховичный А. А.* Об оценке корреляционной функции однородного и изотропного гауссовского случайного поля. Теория вероятностей и мат. статистика, 1983, вып. 29, с. 37—40. 4. *Градштейн И. С. Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с. 5. *Иванов А. В., Леоненко Н. Н.* О принципе инвариантности для оценки корреляционной функции однородного и изотропного случайного поля.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 3, с. 323—331. 6. *Дыховичный А. А.* Оценка корреляционной функции однородного и изотропного случайного поля по наблюдениям на шаре.— В кн.: Исследования по статистике случайных процессов. Киев : Киев. ун-т, 1982. 16 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2889—82. 7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т. М.: Наука, 1971. Т. 1. 664 с.

Поступила в редколлегию 23.02.83

УДК 519.21

Н. В. КАРТАШОВ, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

ОДНО УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК ЭРГОДИЧНОСТИ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ И ЦЕПЕЙ МАРКОВА

В работе доказываются уточнения неравенств для дискретных последовательностей восстановления [1] и неравенств эргодичности и устойчивости общих цепей Маркова [2]. Метод доказательства основан на неравенстве для производящей функции апериодического дискретного распределения, отделяющего ее значения на единичной окружности от единицы.

1. Рассмотрим дискретное распределение вероятностей $q = (q_t)$ на множестве $N = \{1, 2, \ldots\}$ с моментами $\mu = \sum_{t \geq 1} t q_t$, $\mu_{1+\beta} = 2 \sum_{n \geq} n^{\beta} Q_n$, где $Q_n = \sum_{t > n} q_t$, $n \geq 0$, «хвост» распределения q, а $\beta \in (0, 1)$.

Предположим, что распределение q апериодично, т. е. наибольший общий делитель (н. о. д.) множества $I(q) = \{i : q_i > 0\}$ равен единице. Тогда при некотором n множество $I_n(q) = I(q) \cap [1, n]$ содержится в классе $J = \{I \subset N,$ н. о. д. $I = 1,\ \sup I < \infty\}$. Из определения J

вытекает, что для всех $I \in J$ множество целочисленных векторов $I^* = \{d \in Z^I : \sum_{i \in I} i d_i = 1\}$ непусто. Поэтому следующий показатель апериодичности

$$r(q) = \inf_{I \in J \cap I(q)} \min_{d \in I^*} \left(\sum_{i \in I} d_i^2 / q_i \right) \tag{1}$$

определен и конечен для всякого апериодического распределения q. Полагая $I = \{1\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}, \ldots$, из (1) получаем

$$r(q) = \inf (q_1^{-1},\ q_2^{-1} + q_3^{-1},\ q_3^{-1} + q_4^{-1},\ 4q_2^{-1} + q_5^{-1}, \ldots). \tag{2}$$

В общем случае для всех n таких, что н. о. д. $I_n(q) = 1$, справедлива оценка

$$r(q) \leqslant n^2 \pi_n^3 \max (1/q_i,\ i \in I_n(q)), \tag{3}$$

где π_n количество простых чисел, не превосходящих n. Оценку (3), по-видимому, можно улучшить.

Как известно, для апериодичности a необходимо и достаточно, чтобы производящая функция $q(z) = \Sigma z^t q_t$ не обращалась в единицу на множестве $D = \{z : |z| = 1\} \setminus \{1\}$. В терминах показателя $r(q)$ величину $|q(z) - 1|$ можно оценить снизу.

Лемма. Пусть распределение q апериодично, $r(q) \leqslant r$, а $\beta \in (0, 1]$. Тогда для всех $z \in D$ справедливо неравенство

$$|(1 - q(z))/(1 - z)| \geqslant \mu/\omega, \tag{4}$$

где

$$\omega = \min(\omega_1, \omega_2),\quad \omega_1 = (r\mu)^{1-1/\beta} (1 + r\mu_{1+\beta})^{1/\beta},$$

$$\omega_2 = 2 \exp(-(\mu - 1)(1 - q_1)^{-1} \ln q_1) - 1. \tag{5}$$

Замечание 1. Величина ω_2 конечна лишь для распределений с атомом $q_1 > 0$ и первым моментом μ. Для конечности ω_1 достаточно апериодичности, однако при конечном моменте $\mu_{1+\beta}$, $\beta > 0$. Кроме того, уже в классе распределений с $\mu_2 < \infty$ и $q_1 > 0$ имеются примеры распределений, для которых $\omega_1 < \omega_2$ (достаточно выбрать малым q_1), или $\omega_1 > \omega_2$ (при большом μ_2 и фиксированных μ, q_1).

Доказательство. Нетрудно проверить, что $Q(z) = \sum z^n Q_n = (1 - q(z))/(1 - z)$, а $Q(1) = \mu$. Используя элементарное неравенство $|z^n - 1| \leqslant |z - 1|^\beta 2^{1-\beta} n^\beta$, справедливое при $z \in D$, $\beta \in (0, 1]$, оценим

$$|Q(z) - \mu| = \left| \sum (z^n - 1) Q_n \right| \leqslant |z - 1|^\beta 2^{-\beta} \mu_{1+\beta} = s^\beta \mu_{1+\beta}, \tag{6}$$

где $s = \sin \varphi/2$, $\varphi = \arg z$. Следовательно, при $z \in D$

$$|(1 - q(z))/(1 - z)| = |Q(z)| \geqslant \mu - |Q(z) - \mu| \geqslant \mu - s^\beta \mu_{1+\beta}. \tag{7}$$

Выберем теперь $I \in J \cap I(q)$, $d \in I^*$. Заметив, что $\sum_{i \in I} i d_i = 1$, $q_i > 0$ при $i \in I$, и использовав при $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ элементарные неравенства $|\sin(x + y)| \leqslant |\sin x| + |\sin y|$, $|\sin nx| \leqslant n |\sin x|$, оценим для всех α

$$\sin^2\alpha = \left|\sin\left(\sum_{i\in I} i d_i \alpha\right)\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i\in I} |d_i|\,|\sin i\alpha|\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i\in I} |d_i/q_i^{1/2}|\cdot|q_i^{1/2}\sin i\alpha|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i\in I} d_i^2/q_i\right)\left(\sum_{i\in I} q_i \sin^2 i\alpha\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i\in I} d_i^2/q_i\right) \sum_{t\geqslant 1} q_t \sin^2 t\alpha, \tag{8}$$

где использовано также неравенство Коши—Буняковского. Вычислив нижнюю грань правой части (8) по $I \in J \cap I(q)$, $d \in J^*$, убеждаемся, что вместо первой суммы в правой части (8) можно подставить $r(q) \leqslant r$. Положив в (8) $\alpha = \varphi/2$, $\varphi = \arg z$ после этой подстановки, приходим к неравенству

$$|1 - q(z)| \geqslant \operatorname{Re}(1 - q(z)) = \sum_{t\geqslant 1} q_t (1 - \cos t\varphi) =$$

$$= 2\sum_{t\geqslant 1} q_t \sin^2 t\alpha \geqslant 2r^{-1}\sin^2\alpha = |z-1|\, r^{-1} s. \tag{9}$$

Из (7) и (9) заключаем, что левая часть (4) не меньше

$$\max\left(r^{-1}s,\ \mu - s^{\beta}\mu_{\beta+1}\right), \tag{10}$$

где $s = \sin(1/2 \arg z) \in [0, 1]$. Заметим, что при любом $z \in D$ величина (10) не меньше своего минимального значения по $s \in [0, 1]$. Это значение достигается в точке s_0, удовлетворяющей уравнению $\mu - s_0^{\beta}\mu_{1+\beta} = s_0/r$, и оценивается снизу величиной s_0/r. Из указанного уравнения и неравенства $s_0 \leqslant s_0^{\beta}$ вытекает, что $s_0^{\beta} \geqslant r\mu/(1 + r\mu_{1+\beta})$, т. е. выражение (10) при $s \in [0, 1]$ не меньше $r^{-1}(r\mu)^{1/\beta}(1 + r\mu_{1+\beta})^{-1/\beta} = \mu/\omega_1$. Следовательно, неравенство (4) доказано при $\omega = \omega_1$.

Справедливость (4) при $\omega = \omega_2$ установлена в лемме 4 работы [2] (где следует положить $g_t = q_{t+1}$ при $t \geqslant 0$, $zg(z) = q(z)$ и заменить μ на $\mu - 1$).

2. Рассмотрим последовательность восстановления $h_t = \sum_{n\geqslant 0} (q^{*n})_t$, порожденную распределением q. Ее производящая функция имеет вид $h(z) = \sum_{t\geqslant 0} z^t h_t = (1 - q(z))^{-1}$. Обозначим $\overline{Q}_t = \sum_{n>t} Q_n$, $t \geqslant 0$.

Теорема 1. Пусть распределение q апериодично, $r(q) \leqslant r$, и $\mu_{1+\beta} < \infty$ при некотором $\beta \in (1/2, 1]$. Тогда для всех $t \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$|h_t - \mu^{-1} - \mu^{-2}\overline{Q}_t| \leqslant \mu_{1+\beta}^2(\omega^2 + 2\omega)/c_\beta \mu^3 t, \tag{11}$$

где ω определяется равенствами (5); $c_\beta = B(\beta, \beta)\, 2^{2\beta}(2\beta - 1) \geqslant 2\beta - 1$; B — стандартная бета-функция.

Замечание 2. При одном лишь условии $\mu_{1+\beta} < \infty$, где $\beta < 1$, последовательности $h_t - \mu^{-1}$, $\mu^{-2}\overline{Q}_t$ в левой части (11) могут убывать существенно медленнее, чем $O(t^{-1})$ в правой части (так, что $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t\,|\,h_t -$ $- \mu^{-1}\,|\,\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t\overline{Q}_t = \infty$).

Отметим также, что предположение $\beta > 1/2$ существенно для справедливости (11). Действительно, как вытекает из работы [3], для каждого $\beta < 1/2$ найдется распределение q с $\mu_{1+\beta} < \infty$ такое, что $h_t - \mu^{-1} - \mu^{-2}\overline{Q}_t \asymp t^{-2\alpha}$ при $t\to\infty$, и $\beta < \alpha < 1/2$, т. е. $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t\,|\,h_t -$ $- \mu^{-1} - \mu^{-2}\overline{Q}_t\,| = \infty$.

Доказательство. Рассмотрим при $t \geqslant 0$ последовательность $f_t = t\,(h_t - \mu^{-1} - \mu^{-2}\overline{Q}_t)$. Из определения $\overline{Q}_t$ нетрудно вывести, что $\overline{Q}(z) = \sum z^t\overline{Q}_t = (q(z) - 1 - \mu(z-1))/(z-1)^2$. Вычислим при $|z| < 1$ производящую функцию

$$f(z) = \sum z^t f_t = z^d/_{dz}\,(h(z) - m\,(1-z)^{-1} - m^2\overline{Q}(z)) =$$
$$= z\,(q'(z)\,(1-q(z))^{-2} - (2m + m^2 q'(z))\,(1-z)^{-2} +$$
$$+ 2m^2\,(1-q(z))\,(1-z)^{-3}) = zF(z)\,(q'(z)\,F(z) + 2mG(z)), \tag{12}$$

где $m = \mu^{-1}$, $F(z) = (1-q(z))^{-1} - m\,(1-z)^{-1}$, $G(z) = (q(z) - 1 -$ $- (z-1)\,q'(z))\,(z-1)^{-2}$.

По непрерывности равенство (12) остается справедливым и при $z \in D$, поскольку $q(z) \neq 1$ при $z \in D$ в соответствии с леммой, а функция $f(z)$ в сделанных предположениях непрерывна в единичном круге [3].

Заметив, что $F(z) = m\,(1-q(z))^{-1}\,(Q(z) - \mu)$, и использовав оценки (4) и (6), при $z \in D$ получим неравенство

$$|F(z)| \leqslant |z-1|^{\beta-1}\mu_{1+\beta}m^2\omega 2^{-\beta}. \tag{13}$$

Из приведенного выше неравенства $|z^n - 1| \leqslant |z-1|^{\beta}2^{1-\beta}n^{\beta}$ заключаем, что $|z^n - 1 - nz^{n-1}(z-1)| = |z-1|\,|z^{n-2} - z^{n-1} + \ldots + 1 -$ $- z^{n-1}| \leqslant |z-1|\,(|z-1| + \ldots + |z^{n-1} - 1|) \leqslant |z-1|^{1+\beta}2^{1-\beta}(1^{\beta} + \ldots$ $\ldots + (n-1)^{\beta})$. Следовательно, для всех $z \in D$

$$|G(z)| = |\sum\nolimits_{n\geqslant 1} q_n\,(z^n - 1 - nz^{n-1}(z-1))\,|\,|(z-1)|^{-2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n\geqslant 1} q_n\,|z-1|^{1+\beta}2^{1-\beta}\sum_{t=1}^{n-1} t^{\beta}\,|z-1|^{-2} =$$
$$= 2^{1-\beta}\,|z-1|^{\beta-1}\sum_{t\geqslant 1} t^{\beta}Q_t = 2^{-\beta}\,|z-1|^{\beta-1}\mu_{1+\beta}. \tag{14}$$

Заметим, наконец, что $|q'(z)| \leqslant \sum tq_t = \mu$ при $z \in D$. Поэтому из (12) — (14) вытекает при $z \in D$ оценка

$$|f(z)| \leqslant |z-1|^{2\beta-2}m^3\mu_{1+\beta}^2\,(\omega^2 + 2\omega)\,2^{-2\beta}.$$

Отсюда следует, в частности, интегрируемость $f(z)$ на единичной окружности C при $\beta \in (1/2, 1]$. Поэтому для оценки $|f_t|$ применима формула обращения ряда Фурье:

$$|f_t| = (2\pi)^{-1} \left| \int_C z^{-t-1} f(z)\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant m^3 \mu_{1+\beta}^2 (\omega^2 + 2\omega)(2^{2\beta+1}\pi)^{-1} \int_C |z-1|^{2\beta-2} |dz|. \tag{15}$$

Вычислив интеграл в правой части (15), с учетом определения f_t приходим к неравенству (11). Теорема доказана.

Следствие. Для каждого класса распределений $Q = \{q : q_1 \geqslant \varepsilon,$ $\mu = \mu,\ \mu_2 \leqslant \sigma\}$ величина $\varphi(\varepsilon, \mu, \sigma) = \sup_{q \in Q} \sup_{t \geqslant 1} t\,|h_t - \mu^{-1}|$ конечна и удовлетворяет неравенству

$$\varphi(\varepsilon, \mu, \sigma) \leqslant (2\sigma\mu + \sigma^2(\sigma + 2\varepsilon)^2 \varepsilon^{-2})/4\mu^3. \tag{16}$$

Отметим, что нормировка t в определении φ отражает правильный порядок убывания $h_t - \mu^{-1}$ в классе Q, поскольку $\sup_{q \in Q} \sup_{t \geqslant 1} t^{1+\delta} \times$ $\times |h_t - \mu^{-1}| = \infty$ для всех $\delta > 0$.

Для доказательства (16) достаточно положить в (11) $\beta = 1$, оценить $\omega \leqslant \omega_1 = 1 + z\mu_2 \leqslant 1 + q_1^{-1}\sigma \leqslant 1 + \varepsilon^{-1}\sigma$ в соответствии с (2) и (4) и заметить, что $\sup_{t \geqslant 1} t\bar{Q}_t \leqslant \Sigma n Q_n = \mu_2/2 \leqslant \sigma/2$.

Задача оценки последовательности восстановления ранее была решена В. В. Калашниковым в несколько более общих моментных предположениях на распределение q [1, теорема 4.7.2]. Применительно к введенному выше классу Q полученное [1] неравенство имеет вид

$$\varphi(\varepsilon, \mu, \sigma) \leqslant 2\,(2\mu + \sigma/\mu + (2 + 3\sigma)\,\varepsilon^{-2-3\sigma}). \tag{17}$$

Оценка (17) вытекает из теоремы 4.7.2 [1], где следует положить $N = 1$, $a = \varepsilon$, $G(t) = t(t-1)$, $g_1 = \sigma$, поскольку в обозначениях [1] $Q =$ $= NP(1, \varepsilon) \cap L(G, \sigma)$.

Правые части (16) и (17), вообще говоря, не мажорируют одна другую. Однако отметим, что на границе сходимости оценка (16) существенно лучше. Действительно, как нетрудно убедиться, $\varphi(\varepsilon, \mu, \sigma) \to$ $\to \infty$, если $\varepsilon \to 0$ или $\sigma \to \infty$. В первом случае правая часть (16) имеет порядок $O(\varepsilon^{-2})$, а (17) — порядок $O(\varepsilon^{-2-3\sigma})$, где асимптотически $\sigma \geqslant 2$ (поскольку $\varepsilon \geqslant q_1 \to 0$). Далее, при $\sigma \to \infty$ оценка (16) имеет порядок $O(\sigma^4)$, а правая часть (17) растет как показательная функция $\varepsilon^{-3\sigma}$, где $\varepsilon < 1$. Поэтому (16) улучшает результат [1] для класса Q. Такое же соотношение сохраняется и между оценками теоремы 1 и теоремы 4.7.2 [1] в общем апериодическом случае, если $\mu_{1+\beta}$ ограничено при некотором $1/2 < \beta \leqslant 1$, а $\varepsilon = \sup_{I \in J} \min(q_i, i \in I) \to 0$.

3. Неравенство (4) с постоянными (5) уточняет лемму 4 [2]. Используя (4) вместо этой леммы, получаем усиление неравенств эргодичности и устойчивости общих цепей Маркова, доказанных в работе [2].

Замечание 3. Неравенства (30), (33), (35) и (41) работы [2] остаются справедливыми, если вместо условия $\alpha h > 0$ предположить апериодичность распределения $q_T = (\alpha T^{t-1} h, t \geq 1)$, а постоянную ω, входящую в равенства (29), (34), (40) [2], заменить на $\omega = \min(\omega_1, \omega_2)$, где

$$\omega_1 = 2r(q_T)\pi T(I-T)^{-1} 1/\pi h + 1,$$

$$\omega_2 = 2\exp(-(1-\pi h)\ln(\alpha h)/(\pi h)(1-\alpha h)) - 1. \qquad (18)$$

Чтобы убедиться в справедливости замечания, достаточно вместо леммы 4 в доказательствах упомянутых неравенств применить к распределению q_T с $r(q_T) < \infty$ оценку (4) при $\beta = 1$, вычислив с учетом леммы 5 [2] $\mu = \sum_{t \geq 1} t\alpha T^{t-1} h = \alpha(I-T)^{-2} h = 1/\pi h$, $\mu_2 = \sum_{t \geq 1} t(t-1)\alpha T^{t-1} h = 2\alpha T(I-T)^{-3} h = 2\pi T(I-T)^{-1} 1/\pi h$, $\omega_1 = 1 + r(q_T)\mu_2$.

Отметим, что постоянная ω_2 совпадает с показателем ω, определенным в равенстве (32) работы [2], и конечна лишь при $\alpha h = (q_T)_1 > 0$, в отличие от ω_1. Однако в этом случае ω_1 и ω_2 в (18) не сравнимы.

Приведем один пример применения неравенства эргодичности (33) работы [2] с использованием (18).

Пусть $(\xi_n, n \geq 1)$ — последовательность независимых случайных величин с общим апериодическим дискретным распределением $q = (q_t, t \geq 1)$ и моментами $\mu = \mathbf{E}\xi_1$, $\mu_2 = \mathbf{E}\xi_1(\xi_1 - 1)$. Как и выше, $Q_n = \mathbf{P}(\xi_1 > n)$ — «хвост» распределения q.

Рассмотрим процесс восстановления $X_t = t - (\xi_1 + \ldots + \xi_{\tau_t})$, где $\tau_t = \sup(n : \xi_1 + \ldots + \xi_n \leq t)$. Последовательность «недоскоков» X_t удовлетворяет рекуррентным соотношениям $X_{t+1} = (X_t + 1) I(X_t + 1 < \xi_{t+1})$, $X_0 = 0$ и образует цепь Маркова с переходной матрицей $P = ((q_{i+1}\delta_{0j} + Q_{i+1}\delta_{i+1,j})/Q_i,\ i, j \geq 0)$ и стационарным распределением $\pi = (\mu^{-1} Q_i,\ i \geq 0)$. Здесь и ниже индексы i, j, n принимают значения от 0 до $\sup(i : Q_i > 0)$. Отметим, что в ранее принятых обозначениях $h_t = \mathbf{P}(X_t = 0) = \mathbf{P}(\bigcup_{k \geq 0}\{\xi_1 + \ldots + \xi_k = t\})$.

Предположим, что распределение q удовлетворяет условиям

$$r(q) \leq r, \quad Q_n = \mathbf{P}(\xi_1 > n) \leq Q\mu\rho^n \qquad (19)$$

для всех $n \geq 0$ и некоторых $\rho < 1$, $r < \infty$, $Q < \infty$.

Тогда для цепи X_t выполняются условия теоремы 6 [2], за исключением $\alpha h > 0$, с векторами $h = (q_{i+1}/Q_i,\ i \geq 0)'$, $\alpha = (\delta_{0j},\ j \geq 0)$, матрицей $T = (Q_{i+1}\delta_{i+1,j}/Q_i,\ i, j \geq 0)$ и нормой $\|\alpha\| = \Sigma|\alpha_j|\rho^j/Q_j$ мер $\alpha = (\alpha_j,\ j \geq 0)$. Действительно, $P = T + h \circ \alpha$ и $\|T\| = \rho < 1$, как показывают несложные выкладки. Вычислив входящие в оценки (33), (29) работы [2] и в (18) величины $\sigma = \|\pi\| \cdot \|1\| = (\mu - \mu\rho)^{-1}\|1\| = (\mu - \mu\rho)^{-1}\sup Q_n\rho^{-n} \leq Q(1-\rho)^{-1}$, $\pi h = \mu^{-1}$, $\pi T(I-T)^{-1} 1 = \mu_2/2\mu$, убеждаемся, что в рассматриваемом случае постоянная ω в определении θ_0 (равенство (29) [2]) не превосходит $\omega_1 = 2r(q_T)(\mu_2/2\mu)/\mu^{-1} + 1 \leq 1 + r\mu_2$, поскольку распределение $q_T = (\pi T^{t-1} 1,\ t \geq 1)$ в точности совпадает с q. Поэтому из оценки (33) работы [2] и замечания 3 вытекает такое утверждение.

Теорема 2. Пусть распределение q удовлетворяет условиям (19). Тогда при каждом $t > \theta_0 (1 - \theta_0)^{-1}$ выполняется неравенство

$$\sum_{n \geqslant 0, Q_n > 0} |\mathbf{P}(X_t = n) Q_n^{-1} - \mu^{-1}| \rho^n \leqslant (\rho^{t+1} + \theta_0^{t+1} (t+2) e\rho^{-1})(1 + Q), \qquad (20)$$

где $\theta_0 = 1 - (1-\rho)^2 (1 - \rho + Q\rho (1 + r\mu_2))^{-1}$. В частности, правая часть (20) оценивает сверху и величину $|h_t - \mu^{-1}|$.

Отметим, что в (20) одновременно содержится оценка характеристического показателя $\theta(q) = \overline{\lim\limits_{t \to \infty}} (|h_t - \mu|)^{1/t} : \theta(q) \leqslant \theta_0 = \theta_0 (r, \rho, Q)$.

Как известно, показатель $\theta(q) = \inf(|z|^{-1} : z \neq 1,\ q(z) = 1,\ q(|z|) < \infty)$ весьма сложно зависит от q (в частности, зависит от каждого значения q_t). Поэтому в общем случае вычисление или исследование асимптотики $\theta(q)$ затруднительно. Однако для распределений q, сосредоточенных на $\{1, 2\}$, можно найти $\theta(q) = 1 - q_1$. При этом $\theta_0 = 1 - q_1 + 2q_1^2 (1 + q_1)^{-1}$, если $\rho = q_1$ (в условиях теоремы это возможно). Таким образом, оценка $\theta(q) \leqslant \theta_0$ асимптотически точна при $q_1 \to 0$.

1. *Калашников В. В.* Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. М.: Наука, 1978. 248 с. 2. *Карташов Н. В.* Неравенства в теоремах эргодичности и устойчивости цепей Маркова с общим фазовым пространством. II.— Теория вероятностей и ее применения, 1985, **30**, вып. 1, с. 65—81. 3. *Рогозин Б. А.* Оценка остаточного члена в предельных теоремах теории восстановления.— Теория вероятностей и ее применения, 1973, **18**, вып. 4, с. 703—717.

Поступила в редколлегию 24.10.83

УДК 519.21

О. И. КЛЕСОВ, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ — последовательность случайных элементов в некотором гильбертовом пространстве $\mathbf{\Gamma}$. Скалярное произведение в Γ обозначим $(\cdot, \cdot)$, а норму — $\|\cdot\|$. Последовательность $\{X_n\}$ назовем квазистационарной, если

$$MX_n = 0,\ \sup_{n \geqslant 1} |M(X_n, X_{n+m})| \leqslant \varphi(m) \qquad (m \geqslant 0). \qquad (1)$$

Близкими к квазистационарным являются последовательности ортогональных случайных элементов $\{X_n\}$:

$$M\|X_n\|^2 < \infty,\ M(X_n, X_{n+m}) = 0 \qquad (m \geqslant 1). \qquad (2)$$