симых случайных величин, а

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant \varepsilon t_n\} \leqslant \mathbf{P}\left\{Z_{1n} \geqslant \frac{\varepsilon}{m} t_n\right\} + \ldots + \mathbf{P}\left\{Z_{mn} \geqslant \frac{\varepsilon}{m} t_n\right\}.$$

Для последовательности m-ортогональных случайных величин например, условие V и условия $M_n = o\left(\frac{t_n^2}{n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{n}{t_n^2} < \infty$ буду достаточны, чтобы выполнялись A1) и B1), так как $\mathbf{P}\{S_n \geqslant \varepsilon t_n\} \leqslant C_{11} \frac{\mathrm{D}S_n}{t_n^2} \leqslant C_{12} \frac{n}{t_n^2}$.

1. *Baum L. E., Katz M.* Convergence rates in the law of large numbers.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **120**, N 1, p. 108—123. 2. *Davis J. A.* Convergence rates for probabilities of moderate deviations.— Ann. Math. Statist., 1968, **39**, N 6, p. 2016—2028. 3. *Rohatgi V. K.* On probabilities of large deviations.— Bull. Austral. Math Soc., 1970, N 3, p. 277—285. 4. *Rohatgi V. K.* On the rate of convergence of probabilities of moderate deviations.— J. Austral. Math. Soc., 1970, **11**, N 1, p. 91—94. 5. *Амосова Н. Н.* О вероятностях больших уклонений.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1976, вып. 14, с. 20—24. 6. *Петров В. В.* Некоторые предельные теоремы для последовательностей зависимых случайных величин.— Тез. докл. III междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике. Вильнюс, 1981, Т. 2, с. 104—105. 7. *Петров В. В.* Последовательности m-ортогональных случайных величин.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1982, **119**, с. 198—202.

Поступила в редколлегию 28.06.82

УДК 513.88+519.4

А. Ю. ДАЛЕЦКИЙ, инж.,
Институт электросварки АН УССР

О КВАНТОВОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Классическая степенная проблема моментов Гамбургера [1] состоит в следующем: какие условия нужно наложить на последовательность чисел $\{s_{k_1,\ldots,k_n}\}_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}$, чтобы существовала борелевская вероятностная мера $\mu(\Delta)$ на $\mathbb{R}^n$ такая, что все ее моменты

$$m_{k_1,\ldots,k_n} = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \, \mu(dx).$$

Известны различные подходы к решению классической проблемы моментов и различные условия, обеспечивающие существование и единственность решения [1, 2].

Естественным обобщением классической проблемы моментов является ее рассмотрение не на $\mathbb{R}^n$, а на более сложных объектах как коммутативных, так и некоммутативных. В коммутативном случае интерес представляет бесконечномерная проблема моментов (для меры, сосредоточенной на пространстве, сопряженном к ядерному), решение которой дано в работе [3].

Для того чтобы перейти к некоммутативным обобщениям проблемы моментов, переформулируем ее в терминах теории представлений.

Задание борелевской вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^n$ эквивалентно заданию циклического унитарного представления $\{U_t\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ в некотором гильбертовом пространстве H и циклического вектора Ω. Действительно, мере μ можно поставить в соответствие представление пространства $\mathbb{R}^n$ операторами умножения на функции e^{itx} в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n, \mu(dx))$ и циклический вектор $\Omega \cong 1$. Наоборот, циклическому унитарному представлению $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}^n}$ с циклическим вектором Ω поставим в соответствие его спектральную меру μ, построенную по вектору Ω:

$$U_t = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{itx} E(dx), \quad \mu(dx) = (E(dx)\,\Omega, \Omega).$$

По теореме Стоуна $U_{t_1,\ldots,t_n} = e^{it_1A_1+\ldots+it_nA_n}$, где $A_1, \ldots, A_n$ — самосопряженные операторы. Очевидно, числа $m_{k_1,\ldots,k_n} = (A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n}\Omega)$ являются моментами меры μ.

Теперь проблему моментов можно сформулировать следующим образом: при каких условиях на последовательность чисел $\{s_{k_1,\ldots,k_n}\}_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}$ существуют унитарное циклическое представление $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}^n}$ и циклический вектор Ω такой, что все моменты $m_{k_1,\ldots,k_n} = (A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n}\Omega, \Omega)$ конечны и $s_{k_1,\ldots,k_n} = m_{k_1,\ldots,k_n}$.

Приведем теперь постановку конечномерной некоммутативной проблемы моментов [4]. Пусть G — связанная односвязная группа Ли, $\mathfrak{G}$ — ее комплексная алгебра Ли с образующими $e_1, \ldots, e_n$, $\{U_g\}$ — циклическое представление G в гильбертовом пространстве H, Ω — его циклический вектор. Тройку $(\{U_g\}, H, \Omega)$ будем называть некоммутативной мерой на G. Ее моментами будем называть числа $m_{k_1,\ldots,k_n} = (A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n}\Omega, \Omega)$, где $\{A_x\}$ — соответствующее $\{U_g\}$ представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Некоммутативная проблема моментов (G-проблема моментов) состоит в следующем: при каких условиях на последовательность комплексных чисел $\{s_{k_1,\ldots,k_n}\}_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}$ существует некоммутативная мера на G такая, что все ее моменты $m_{k_1,\ldots,k_n}$ конечны и $s_{k_1,\ldots,k_n} = m_{k_1,\ldots,k_n}$.

В настоящей работе рассматривается проблема моментов для систем, удовлетворяющих каноническим коммутационным соотношениям (CCR) [5, 6], — квантовая проблема моментов.

Ранее квантовая проблема моментов рассматривалась в работах [7, 8]. В них обобщался на квантовый случай классический метод Рисса.

В настоящей статье рассматривается как конечномерная, так и бесконечномерная проблема моментов. В последнем случае используется конструкция представления в работе [9].

Проблема моментов для представления канонических коммутационных соотношений с одной степенью свободы. Пусть G — группа

Гайзенберга—Вейля, т. е. группа всех вещественных матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & t & \alpha \\ & 1 & \tau \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Алгебра Ли группы G имеет 3 образующие: q, p и e, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям в форме Гайзенберга:

$$[q, p] = ie, \quad [q, e] = [p, e] = 0. \tag{1}$$

Пусть $\{U_g\}$ — унитарное циклическое представление группы G в гильбертовом пространстве H с циклическим вектором Ω, $\{A_x\}$ — соответствующее ему представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Ограничимся рассмотрением таких представлений, для которых $U_{(0,0,\alpha)} = e^{i\alpha} I$ и, следовательно, $A_e = I$, т. е. представлений канонических коммутационных соотношений.

Моментами представления $\{U_g\}$ будем называть числа $m_{n,k} = (A_q^n A_p^k \Omega, \Omega)$, образующие бесконечную двумерную матрицу.

Проблема моментов в этом случае формулируется следующим образом: каким условиям должна удовлетворять матрица $(a_{n,k})_{n,k=0}^{\infty}$, чтобы существовали циклическое представление $CCR\{U_g\}$ и циклический вектор Ω такие, что все моменты $m_{n,k}$ конечны и выполняются равенства $a_{n,k} = m_{n,k}$.

Пусть L — обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{G}$. По определению это множество полиномов с комплексными коэффициентами от q, p и e, профакторизованное по соотношениям эквивалентности: $qp - pq \sim ie$, $qe \sim eq$, $pe \sim ep$. Как известно, L можно реализовать в виде множества полиномов от q, p и e, в которых формальные переменные пишутся в фиксированном порядке: $L \ni x = \Sigma \lambda_{ijk} q^i p^j e^k$. Операция умножения производится в этом случае с учетом коммутационных соотношений.

Алгебра L является $*$-алгеброй: элементы q, p и e считаем самосопряженными, на остальных элементах операция $*$ вводится стандартным образом (с учетом коммутационных соотношений), например: $(qp)^* = qp - ie$.

Для дальнейшего понадобится следующая известная формула:

$$p^m q^n = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \frac{n!\, m!}{(n-k)!\, k!\, (m-k)!}\, q^{n-k} p^{m-k}.$$

Ее можно получить из CCR в форме Вейля (эквивалентных коммутационным соотношениям (1)):

$$e^{i\tau p} e^{itq} = e^{it\tau} e^{itq} e^{i\tau p},$$

продифференцировав это равенство по t и τ n и m раз соответственно и положив $t = \tau = 0$.

Зададим на L линейный функционал S следующим образом. На образующих алгебры L положим: $S(q^n p^m e^k) = a_{n,m}$, на остальные элементы продолжим по линейности.

Будем предполагать, что функционал S положительно определен, т. е. $S(x^* x) \geqslant 0$ для любого $x \in L$ (условие (А)). Введем следующий набор чисел:

$$b_{(n,m)(n_1,m_1)} = \sum_{k=0}^{\min(n+n_1,m_1)} i^k \frac{(n+n_1)!\, m_1!}{(n+n_1-k)!\, k!\, (m_1-k)!} a_{n+n_1-k,m+m_1-k}.$$

Очевидно, $b_{(n,m)(n_1,m_1)} = S(p^{m_1} q^{n+n_1} p^m)$. Отсюда нетрудно заключить, что положительная определенность функционала S эквивалентна положительной определенности последовательности $b_{(n,m)(n_1,m_1)}$ в том смысле, что для любого конечного набора чисел $\{\lambda_{n,m}\}$

$$\Sigma \lambda_{n,m} \bar{\lambda}_{n_1,m_1} b_{(n,m)(n_1,m_1)} \geqslant 0.$$

По положительно-определенному функционалу S введем в L скалярное произведение $(x, y) = S(y^* x)$. Пополним L в этом скалярном произведении и профакторизуем по его ядру. Получим гильбертово пространство H.

Согласно конструкции Гельфанда — Наймарка — Сигала операторы A_x в H, заданные на плотном множестве элементов (элементах L) в виде $A_x y = xy$, образуют циклическое представление алгебры L, причем $\Omega = 1$ алгебры L является его циклическим вектором и $(A_x \Omega, \Omega) = S(x)$, откуда

$$(A_q^n A_p^m \Omega, \Omega) = a_{n,m}. \tag{2}$$

Пара $(\{A_x\}, \Omega)$, удовлетворяющая соотношению (2), единственна (с точностью до унитарной эквивалентности).

Таким образом, если представление $\{A_x\}$ продолжается до циклического представления группы G $\{U_g\}$, то $(\{U_g\}, H, \Omega)$ является решением проблемы моментов.

Предположим, что выполняются следующие условия: $|a_{n,0}| \leqslant CM^n n!$, $|a_{0,n}| \leqslant CM^n n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где C и M — некоторые положительные числа (условие (Б)).

Лемма. Пусть условия (А), (Б) выполнены. Тогда для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ существуют положительные константы C_m и M_m такие, что

$$b_{(n,m)(n,m)} \leqslant C_m M_m^n \sqrt{(4n)!}, \quad b_{(m,n)(m,n)} \leqslant C_m M_m^n \sqrt{(4n)!} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Докажем, например, второе неравенство. Очевидно,

$$|b_{(m,n)(m,n)}| \leqslant \sum_{k=0}^{\min(2m,n)} \frac{(2m)!\, n!}{(2m-k)!\, k!\, (n-k)!} |a_{2m-k,2n-k}|.$$

Из неравенства Коши — Буняковского и условия (Б) следует, что

$$|a_{2m-k,2n-k}| = |(p^{2n-k}, q^{2m-k})| \leqslant \| p^{2n-k} \| \| q^{2m-k} \| =$$
$$= \sqrt{a_{2(2m-k),0}a_{0,2(2n-k)}}.$$

Тогда

$$|b_{(m,n)(m,n)}| \leqslant \sum_{k=0}^{\min(2m,n)} \frac{(2m)!\, n!}{(2m-k)!\, k!\, (n-k)!} CM^{2(n+m)} \sqrt{(4n)!\,(4m)!}\,.$$

Пусть m фиксировано. Обозначим

$$d_{n,k} = \frac{(2m)!\, n!}{(2m-k)!\, k!\, (n-k)!}\,, \quad d_n = \sum_{k=0}^{\min(2m,n)} d_{n,k}.$$

Очевидно, $d_{n+1,k} = d_{n,k} \dfrac{n+1}{n+1-k} \leqslant 2d_{n,k}$ при $n \geqslant 4m-1$ $\Big($в этом случае $\dfrac{n+1}{n+1-k} \leqslant 2$, так как $k \leqslant 2m \leqslant \dfrac{n+1}{2}\Big)$. Таким образом, для $n \geqslant 4m-1$

$$d_n \leqslant 2^{n-4m+1} d_{4m-1}. \qquad (3)$$

Положим теперь

$$\tilde{C} = d_{4m-1} 2^{-4m+1} CM^{2n} \sqrt{(4n)!}, \quad C_m = \max(\tilde{C}, b_{(m,n)(m,n)};\ n < 4m-1).$$
$$M_m = 2M^2.$$

Тогда $|b_{(m,n)(m,n)}| \leqslant C_1 M_1^n \sqrt{(4n)!}$.

Другое неравенство доказывается аналогично.

Докажем теперь основную теорему.

Теорема 1. Пусть для матрицы $(a_{n,m})$ выполнены условия (А) и (Б). Тогда проблема моментов однозначно разрешима.

Доказательство. Достаточно показать, что построенное выше представление $\{A_x\}$ алгебры L однозначно продолжается до представления группы G с тем же циклическим вектором.

Согласно теореме, доказанной Флато, Саймоном, Снелманом и Стернгеймером (см. [10]), для существования такого продолжения достаточно, чтобы операторы A_q, A_p и A_e имели общее плотное инвариантное множество аналитических векторов.

Напомним, что вектор X называется аналитическим для оператора A, если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\|A^k x\|}{k!} s^k$ сходится для некоторого $s > 0$.

1. Докажем, что любой элемент вида $x = q^n p^m$ является аналитическим для оператора A_q, т. е. сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\|q^{k+n} p^m\|}{k!} s^k$ для некоторого $s > 0$.

Из леммы следует, что

$$\| q^{n+k} p^m \| = (s(p^m q^{2(n+k)} p^m)^{1/2} = (b_{(n+k,m)(n+k,m)})^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 M_1^{n+k} ((4n+4k)!)^{1/4}.$$

Применим признак Даламбера:

$$\frac{C_1 M_1^{n+k+1} ((4n+4k+4)!)^{1/4} s^{k+1}/(k+1)!}{C_1 M_1^{n+k} ((4n+4k)!)^{1/4} s^k/k!} = \frac{M_1 s}{k+1} \Big((4n+4k+1) \times$$
$$\times (4n+4k+2)(4n+4k+3)(4n+4k+4)^{1/4} =$$
$$= M_1 s \left(\left(\frac{4n-3}{k+1} + 4 \right) \left(\frac{4n-2}{k+1} + 4 \right) \left(\frac{4n-1}{k+1} + 4 \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{4n}{k+1} + 4 \right) \right)^{1/4} \leqslant 5 M_1 s$$

при достаточно большом k. Таким образом, при $s < \frac{1}{5M_1}$ ряд сходится.

2. Докажем, что любой элемент вида $x = q^n p^m$ является аналитическим для оператора A_p, т. е. для некоторого $s > 0$ сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\| p^k q^n p^m \|}{k!} s^k$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| p^k q^n p^m \| = \left\| \sum_{j=0}^{n} i^j d_{k,j} q^{n-} p^{m+k-j} \right\| \leqslant \sum_{j=0}^{n} d_{k,j} \| q^{n-j} p^{m+k-j} \| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{n} d_{k,j} (b_{(n-j,m+k-j)(n-j,m+k-j)})^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{n} d_{k,j} C_j M_j^{m+k-j} ((4m+4k-4j)!)^{1/4} \leqslant C'M')^{m+k-j} d_k ((4m+4k)!)^{1/4} \leqslant$$
$$\leqslant C'' (M'')^k ((4m+4k)!)^{1/4},$$

так как согласно неравенству (3) $d_k \leqslant 2^k (d_{4m-1} 2^{1-4m})$. Дальнейшее доказательство строится, как в п. 1.

Аналогичное утверждение для оператора A_e очевидно.

Таким образом, для операторов A_q, A_p и A_e векторы вида $q^n p^m$ являются аналитическими и, следовательно, аналитическими являются все элементы линейной оболочки $\{q^n p^m\}$, плотной в H.

Представления канонических коммутационных соотношений с конечным числом степеней свободы. Принципиально случай конечного числа степеней свободы ничем не отличается от одномерного, поэтому сформулируем основные результаты без доказательства.

Пусть $G_n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ — группа Гайзенберга — Вейля порядка n (групповая операция в ней имеет вид $(t, \tau, \alpha)(t_1, \tau_1, \alpha_1) = (t + t_1, \tau + \tau_1, \alpha + \alpha_1 + \langle t, \tau_1 \rangle)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$), $\mathfrak{G}$ — ее комплексная алгебра Ли. Образующие $\mathfrak{G}$ $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, e$ удовлетворяют коммутационным соотношениям $[q_j, p_k] = i\delta_{jk}e$, $[q_j, e] = [p_k, e] = [q_j, q_k] = [p_j, p_k] = 0$.

Пусть $\{U_g\}$ — циклическое унитарное представление группы G_n в гильбертовом пространстве H с циклическим вектором Ω такое, что $U_{(0,0,\alpha)} = e^{i\alpha}I$, $\{A_x\}$ — соответствующее ему представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Моменты некоммутативной меры $(\{U_g\}, H, \Omega)$ образуют бесконечную матрицу размера $2n$ с элементами

$$m_{k_1,\dots,k_n,r_1,\dots,r_n} = (A_{q_1}^{k_1} \dots A_{q_n}^{k_n} A_{p_1}^{r_1} \dots A_{p_n}^{r_n} \Omega, \Omega).$$

Пусть теперь $\{a_{k_1,\dots,k_n,r_1,\dots,r_n}\}$ — числовая последовательность. Как в п. 1, зададим по обертывающей алгебре L алгебры Ли $\mathfrak{G}$ (множестве полиномов с комплексными коэффициентами от q_i, p_k, e, в которых формальные переменные пишутся в фиксированном порядке $L \ni x = \Sigma\lambda_{k_1,\dots,k_n,r_1,\dots,r_m,m} q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n} p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n} e^m$) линейный функционал

$$S(q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n} p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n} e^m) = a_{(k_1,\dots,k_n,r_1,\dots,r_n)}.$$

Решение проблемы моментов дает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{a_{k_1,\dots,k_n,r_1,\dots,r_n}\}$ такова, что:

А) функционал S положительно определен, т. е. $S(x^*x) \geqslant 0$, $x \in L$;

Б) для некоторых положительных постоянных C и M

$$|a_{\underbrace{0,\dots,0,k}_{j},0,\dots,0}| \leqslant CM^k k!, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Тогда проблема моментов однозначно разрешима.

Представление канонических коммутационных соотношений со счетным числом степеней свободы. Рассмотрим теперь простейший случай бесконечного числа степеней свободы — группу $G_0 = (\mathbb{R}_0^\infty, \mathbb{R}_0^\infty, \mathbb{R}^1)$ ($\mathbb{R}_0^\infty$ — пространство всех финитных последовательностей $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$). Групповая операция в G_0 имеет тот же вид, что и в G_n: $(t, \tau, \alpha)(t_1, \tau_1, \alpha_1) = (t + t_1, \tau + \tau_1, \alpha + \alpha_1 + \langle t, \tau_1 \rangle)$. Комплексная алгебра Ли $\mathfrak{G}$ группы G_0 имеет бесконечное число образующих $q_1, \dots, q_n, \dots, p_1, \dots, p_n, \dots, e$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям $[q_j, p_k] = i\delta_{j,k}e$, $[q_j, e] = [p_k, e] = [q_j, q_k] = [p_j, p_k] = 0$, $j, k = 1, 2, \dots$.

Пусть $(\{U_g\}_{g \in G_0}, H, \Omega)$ — некоммутативная мера на G_0. Будем, как и прежде, предполагать, что $U_{(0,0,\alpha)} = e^{i\alpha}I$. Ее моментами являются числа

$$m_{k_1,\dots,k_n,r_1,\dots,r_m} = (A_{q_1}^{k_1} \dots A_{q_n}^{k_n} A_{k_1}^{r_1} \dots A_{p_m}^{r_m} \Omega, \Omega), \quad n, m = 1, 2, \dots;$$

$$k_i, r_j = 0, 1, 2, \dots.$$

Обертывающая алгебра L_0 алгебры Ли $\mathfrak{G}_0$ является множеством формальных полиномов бесконечного числа переменных q_i, p_k, e с фиксированным порядком записи переменных:

$$L \ni x = \Sigma\lambda_{k_1,\dots,k_n,r_1,\dots,r_m,s} q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n} p_1^{r_1} \dots p_m^{r_m} e^s .$$

Подход к проблеме моментов в этом случае полностью аналогичен конечномерному.

Пусть $\mathfrak{A} = \{a_{k_1,\dots,k_n,r_1,\dots,r_m};\ n, m = 1, 2, \dots;\ k_i, r_j = 0, 1, \dots\}$ — набор комплексных чисел. Зададим на L_0 линейный функционал

$$S(q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n} p_1^{r_1} \dots p_m^{r_m} e^t) = a_{k_1,\dots,k_n,r_1,\dots,r_m}.$$

Справедлива теорема, аналогичная теореме 2.

Теорема 3. Пусть набор $\mathfrak{A}$ таков, что:

А) функционал S положительно определен;

Б) для любого $j = 1, 2, \dots$ существуют постоянные C_j, M_j,

$$|a_{0,\dots,0,k}| \leqslant C_j M_j^k k!.$$

Тогда проблема моментов однозначно разрешима.

Доказательство. Пусть $G_n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ — группа Гайзенберга — Вейля с n степенями свободы, $\mathfrak{G}_n$ — ее алгебра Ли, L_n — ее обертывающая алгебра. Очевидно, $G_0 = \operatorname{indlim} G_n$, $L_0 = \operatorname{indlim} L_n$.

Для каждой группы G_n рассмотрим проблему моментов, задаваемую набором чисел $\mathfrak{A}_n = \{a_{k_1,\dots,k_n,r_1,\dots,r_n} k_i, r_j = 0, 1, \dots\} \subset \mathfrak{A}$. Вследствие теоремы 2 существует единственное решение G_n-проблемы моментов $(\{U_g^n\}_{g \in G_n}, H_n, \Omega)$.

Пространство H_n строится следующим образом: на алгебре L_0 вводится скалярное произведение с помощью набора чисел $\mathfrak{A}_n$, затем L_n пополняется и факторизуется по его ядру. По построению при $m \geqslant n$ H_n является подпространством пространства H_m и $\beta\Omega_n = \Omega_m$ (β — вложение H_n в H_m).

Аналогичным образом по алгебре L_0 и набору $\mathfrak{A}$ строится пространство H. Очевидно, все H_n являются подпространствами H.

Вследствие единственности решения конечномерной проблемы моментов система

$$((\{U_g^n\}_{g \in G_n}, H_n, \Omega_n), \quad n = 1, 2, \dots) \tag{4}$$

является согласованной: при $m \geqslant n$ для любого g из G_n оператор U_g^n является сужением U_g^m на пространство H_n, т. е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} H_n & \xrightarrow{U_g^n} & H_n \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta \\ H_m & \xrightarrow{U_g^m} & H_m \end{array} .$$

Построим теперь представление $\{U_g\}$ группы G_0 в пространстве H. Зафиксируем элементы $g \in G_0$, $h \in L_0 \subset H$. Существует номер n такой, что $g \in G_n$, $h \in H_n$. Положим $U_g h = U_g^n h$. Такое определение корректно вследствие согласованности системы (4).

Очевидно, операторы U_g продолжаются до унитарных операторов в H; представление $\{U_g\}_{g \in G_0}$ является циклическим вектором $\Omega = \Omega_n$; некоммутативная мера $(\{U_g\}_{g \in G_0}, H, \Omega)$ является решением проблемы моментов.

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М.: Физматгиз, 1961. 310 с. 2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев : Наук. думка, 1965. 798 с. 3. *Березанский Ю. М., Шифрин С. Н.* Обобщенная степенная симметричная проблема моментов.— Укр. мат. журн., 1971, **23**, № 3, с. 291—306. 4. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. Киев : Наук. думка, 1983. 236 с. 5. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции : В 4-х т. М.: Физматгиз, 1961. Т. 4. 472 с. 6. *Холево А. С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Физматгиз, 1980. 320 с. 7. *Woronowicz S. L.* The quantum problem of moments. II.— Rep. Math. Phys., 1971, **1**, N 3, p. 175—183. 8. *Powers R. T.* Self-adjoint algebras of unbounded operators. 1.— Comm. Math. Phys., 1971, **21**, N 2, p. 85—124. 9. *Коломыцев В. И., Самойленко Ю. С.* О неприводимых представлениях индуктивных пределов групп.—Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 4, с. 526—531. 10. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения: В 2-х т. М.: Мир, 1980. Т. 1. 455 с.

Поступила в редколлегию 01.10.82

УДК 519.21

А. А. ДЫХОВИЧНЫЙ, инж., Киевский университет

ОБ ОЦЕНКАХ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИЙ ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

В настоящей статье изучаются асимптотические свойства эмпирических оценок корреляционной и спектральной функций гауссовского однородного и изотропного случайного поля, наблюдаемого на шаре.

Пусть $\xi(x)$ — однородное и изотропное непрерывное в среднем квадратическом гауссовское случайное поле в n-мерном евклидовом пространстве R^n. Это означает, что математическое ожидание $M\xi(x) = m = \text{const}$ (будем предполагать $m = 0$), а $M\xi(x)\xi(y) = B(|x-y|)$ зависит только от расстояния между точками x и y.

Известно [1], что корреляционная функция допускает представление

$$B(r) = \int_0^\infty Y_n(\lambda r)\, d\Phi(\lambda),$$

$$Y_n(\lambda r) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)(\lambda r)^{\frac{2-n}{2}},$$