УДК 519.21

Н. Н. АМОСОВА, канд. физ.-мат. наук,
Ленинградский политехнический институт

О ВЕРОЯТНОСТЯХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Поведение вероятностей вида $\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant \varepsilon t_n\right\}$, $\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right| \geqslant \varepsilon t_n\right\}$ и $\mathbf{P}\left\{\sup_{k>n}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right|/t_k\right) \geqslant \varepsilon\right\}$ изучалось для последовательностей независимых случайных величин, где t_n — некоторая последовательность положительных постоянных такая, что $t_n \to \infty$*, а ε — любое положительное число [1—5]. Нас будет интересовать эта задача в односторонней постановке для зависимых случайных величин X_1, $X_2, \ldots$. Ограничимся рассмотрением m-зависимых и m-ортогональных случайных величин (m — целое неотрицательное число). Напомним, что $X_1, X_2, \ldots$ называется последовательностью m-зависимых случайных величин, если случайные векторы $(X_p, \ldots, X_q)$ и $(X_r, \ldots, X_s)$ независимы для любых p, q, r, s, удовлетворяющих условиям $1 \leqslant p \leqslant q < r \leqslant s$ и $r - q > m$. Понятие m-ортогональности было введено в работах [6, 7]. Последовательность $X_1, X_2, \ldots$ есть последовательность m-ортогональных случайных величин, если $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$ для любого i и $\mathbf{E}(X_k X_j) = 0$ при $|k - j| > m$.

Положим $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ и будем предполагать, что для последовательностей m-ортогональных случайных величин $\mathbf{E}X_i = 0$ при всех i. Пусть $\{t_n\}$ — последовательность положительных постоянных такая, что $t_n \to \infty$, а $\{M_n\}$ и $\{R_n\}$ — две неотрицательные неубывающие числовые последовательности такие, что для любого $\varepsilon > 0$

$$M_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{k+m} - S_k < -\varepsilon t_n\} \to 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{k+m} - S_k < -\varepsilon t_n\} > \infty.$$

Будем через C, C_0, C_1, ... обозначать положительные постоянные.

Условие I. Существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $P\{S_n \geqslant -\varepsilon t_n\} \geqslant \gamma$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n.

Условие II. Существует постоянная $C > 0$ такая, что $t_n/t_{n+m+1} \geqslant C$ для всех n.

* Все пределы указаны при $n \to \infty$.

Условие III. Существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что $t_{2^n}/t_{2^{n+1}} \geqslant C_0$ для всех n.

Условие IV. Существует постоянная $0 < C_1 < \frac{1}{2}$ такая, что для любого $k \geqslant 1$, любого события A из σ-алгебры, порожденной случайными величинами $X_1, \ldots, X_k$, и любого события B из σ-алгебры, порожденной случайными величинами $X_{k+m+1}, X_{k+m+2}, \ldots$, справедливо неравенство $|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leqslant C_1 \mathbf{P}(A)$.

Условие V. Существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что $\mathbf{E}S_n^2 \leqslant C_2 n$ для всех n.

Условие VI. $\mathbf{E}S_n^2 = o(t_n^2)$.

Замечание 1. Если последовательность $X_1, X_2, \ldots$ есть последовательность ортогональных случайных величин (т. е. $m = 0$), то условие V примет вид $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i^2 \leqslant C_2 n$ для всех n, а условие VI — $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i^2 = o(t_n^2)$.

Замечание 2. Если последовательность $X_1, X_2, \ldots$ есть последовательность m-ортогональных случайных величин и существует постоянная B такая, что $\mathbf{E}X_i^2 \leqslant B$ для всех i, то условие V будет выполнено автоматически, так как в этом случае

$$\left| \sum_{\substack{|i-j| \leqslant m \\ 1 \leqslant i < j \leqslant n}} \mathbf{E}X_i X_j \right| \leqslant \sum_{\substack{|i-j| \leqslant m \\ 1 \leqslant i < j \leqslant n}} |\mathbf{E}X_i X_j| \leqslant \sum_{\substack{|i-j| \leqslant m \\ 1 \leqslant i < j \leqslant n}} \sqrt{\mathbf{E}X_i^2 \mathbf{E}X_j^2} \leqslant 2mnB.$$

Теорема 1. Следующие условия в каждой паре эквивалентны при любом $\varepsilon > 0$:

$$\text{A1)}\quad M_n \mathbf{P}\{S_n \geqslant \varepsilon t_n\} \to 0,$$

$$\text{A2)}\quad M_n \mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon t_n\} \to 0,$$

$$\text{B1)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} R_n \mathbf{P}\{S_n \geqslant \varepsilon t_n\} < \infty,$$

$$\text{B2)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} R_n \mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon t_n\} < \infty$$

для последовательностей m-зависимых случайных величин, если выполнены условия I и II, и для последовательностей m-ортогональных случайных величин, если выполнены условия II, IV и VI.

Если последовательность m-ортогональных случайных величин удовлетворяет условию V, причем $M_n = o\left(\frac{t_n^2}{n^2}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{n^2}{t_n^2} < \infty$, то утверждение теоремы 1 также справедливо.

Теорема 2. Пусть $u > 0$ $\{L_n\}$ — неотрицательная неубывающая числовая последовательность и $M_n = n^u L_n$. Условия А1), А2) и условие

$$\text{А3)}\ n^u L_n \mathbf{P}\left\{\sup_{k\geqslant n} \frac{S_k}{t_k} \geqslant \varepsilon\right\} \to 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0$$

эквивалентны для последовательностей m-зависимых случайных величин, если выполнены условия I и III, и для последовательностей m-ортогональных случайных величин, если выполнены условия III, IV и VI или условия III, V и $M_n = o\left(\frac{t_n^2}{n^2}\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} R_n \frac{n^2}{t_n^2} < \infty$.

Теорема 3. Пусть $u \geqslant 0$, $\{Q_n\}$ — неотрицательная неубывающая числовая последовательность и $R_n = n^u Q_n$. Условия В1), В2) и условие

$$\text{В3)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^u Q_n \mathbf{P}\left\{\sup_{k\geqslant n} \frac{S_k}{t_k} \geqslant \varepsilon\right\} < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0$$

эквивалентны для последовательностей m-зависимых случайных величин, если выполнены условия I и III, и для последовательностей m-ортогональных случайных величин, если выполнены условия III, IV и VI или условия III, V и $M_n = o\left(\frac{t_n^2}{n^2}\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} R_n \frac{n^2}{t_n^2} < \infty$.

Замечание 3. Нетрудно показать, что в качестве последовательностей $\{t_n\}$, удовлетворяющих условиям II и III, можно взять, например, такие: $t_n = \sqrt{2n \log \log n}$, $t_n = \sqrt{n \log n}$, $t_n = n$, $t_n = n^\alpha$, $\alpha > 0$, а в качестве последовательностей $\{t_n\}$, удовлетворяющих только условию II, можно взять, кроме того, еще и последовательности $t_n = e^n$, $t_n = a^n$, $a > 1$.

Замечание 4. Если $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность m-ортогональных случайных величин, причем существует положительная постоянная B такая, что $\mathbf{E}X_i^2 \leqslant B$ для всех i, то последовательность $\{M_n\}$ можно выбрать, например, исходя из условия $M_n = o\left(\frac{t_n^2}{n}\right)$, а последовательность R_n — из условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{R_n n}{t_n^2} < \infty$.

Действительно, согласно неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\{S_{k+m} - S_k < -\varepsilon t_n\} \leqslant C_3 \frac{D(S_{k+m} - S_k)}{t_n^2} \leqslant \frac{C_4}{t_n^2}$$

и

$$M_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{k+m} - S_k < -\varepsilon t_n\} \leqslant M_n \frac{C_4 n}{t_n^2} \to 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{k+m}-S_k<-\varepsilon t_n\} \leqslant C_4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n n}{t_n^2}<\infty.$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим последовательность m-зависимых случайных величин. Пусть выполнено условие А1) (В1)). Повторяя рассуждения работы [5], нетрудно показать, что $\mathbf{P}\{S_n-S_k \geqslant -2\varepsilon t_n\} \geqslant \frac{\gamma}{2}$ для $k<n$, любого $\varepsilon>0$ и всех достаточно больших n.

Введем следующие события: $D_1=\{S_1 \geqslant \varepsilon t_n\}$, $D_k=\{S_1<\varepsilon t_n, S_2<\varepsilon t_n, \ldots$ $\ldots, S_{k-1}<\varepsilon t_n, S_k \geqslant \varepsilon t_n\}$, $k=2, \ldots, n$. События $D_1, D_2, \ldots, D_n$ — попарно несовместны, причем $\bigcup_{k=1}^{n} D_k=\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon t_n\}$. Стсюда, учитывая условия I и II, находим

$$\mathbf{P}\left\{S_{n+m+1} \geqslant \frac{\varepsilon}{4} t_n\right\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{D_k \cap\left\{S_{n+m+1} \geqslant \frac{\varepsilon}{4} t_n\right\} \cap\right.$$

$$\left.\cap\left\{S_{k+m} \geqslant \frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}\right\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{D_k \cap\left\{S_{n+m+1}-S_{k+m} \geqslant-\frac{\varepsilon}{4} t_n\right\} \cap\right.$$

$$\left.\cap\left\{S_{k+m}-S_k \geqslant-\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{D_k \cap\left\{S_{n+m+1}-S_{k+m} \geqslant-2 \varepsilon_1 t_{n+m+1}\right\} \cap\right.$$

$$\left.\cap\left\{S_{k+m}-S_k \geqslant-\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}\right\} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\left[\mathbf{P}\left\{D_k \cap\left\{S_{n+m+1}-S_{k+m} \geqslant\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\geqslant-2 \varepsilon_1 t_{n+m+1}\right\}\right\}-\mathbf{P}\left.\left\{S_{k+m}-S_k<-\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}\right] \geqslant \frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(D_k\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{S_{k+m}-S_k<-\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}=\frac{\gamma}{2} \mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon t_n\}-$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{S_{k+m}-S_k<-\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon t_n\} \leqslant \frac{2}{\gamma} \mathbf{P}\left\{S_{n+m+1} \geqslant \frac{\varepsilon}{4} t_n\right\}+$$

$$+\frac{2}{\gamma} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{S_{k+m}-S_k<-\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}.$$

Первая часть теоремы 1 доказана.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность m-ортогональных случайных величин и выполнены условия II, IV и VI. Обозначим через μX медиану случайной величины X. Учитывая условие VI, известное неравенство для медиан $|\mu X - \mathbf{E}X| \leqslant \sqrt{2\mathbf{D}X}$ и $\mathbf{E}S_n = 0$, находим $|\mu S_n| \leqslant \sqrt{2\mathbf{E}S_n^2} = o(t_n)$. Далее, действуя как и выше, получаем

$$\mathbf{P}\left\{S_{n+m+n} \geqslant \frac{\varepsilon}{4} t_n\right\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{D_k \cap \left\{S_{n+m+1} \geqslant \frac{\varepsilon}{4} t_n\right\} \cap\right.$$

$$\left.\cap \left\{S_{k+m} \geqslant \frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}\right\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{D_k \cap \left\{S_{n+m+1} - S_{k+m} \geqslant -\frac{\varepsilon}{4} t_n\right\} \cap\right.$$

$$\left.\cap \left\{S_{k+m} - S_k) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{D_k \cap \{S_{n+m+1} - S_{k+m} - \mu(S_{n+m+1} - S_{k+m}) \geqslant -\varepsilon_1 t_n\} \cap\right.$$

$$\left.\cap \left\{S_{k+m} - S_k \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}\right\} \geqslant C_5 \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(D_k) - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{S_{k+m} -\right.$$

$$\left.- S_k < -\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\} = C_5 \mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon t_n\} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{S_{k+m} - S_k < -\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon t_n\} \leqslant C_6 \mathbf{P}\left\{S_{n+m+1} \geqslant \frac{\varepsilon}{4} t_n\right\} +$$

$$+ C_6 \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{S_{k+m} - S_k < -\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}.$$

Теорема 1 и в этом случае доказана.

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, нам осталось рассмотреть случай, когда последовательность m-ортогональных случайных величин удовлетворяет условию V, $M_n = o\left(\frac{t_n^2}{n^2}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{n^2}{t_n^2} < \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{S_n \geqslant \frac{\varepsilon}{2} t_n\right\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{D_k \cap \left\{S_n \geqslant \frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{D_k \cap \left\{S_n - S_k \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} t_n\right\}\right\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(D_k) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left\{S_n-S_k<-\frac{\varepsilon}{2}t_n\right\}\geqslant\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\geqslant\varepsilon t_n\}-$$

$$-C_7\sum_{k=1}^{n}\frac{D(S_n-S_k)}{t_n^2}\geqslant\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\geqslant\varepsilon t_n\}-C_8\frac{n^2}{t_n^2}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\geqslant\varepsilon t_n\}\leqslant\mathbf{P}\left\{S_n\geqslant\frac{\varepsilon}{2}t_n\right\}+C_8\frac{n^2}{t_n^2},$$

и теорема 1 доказана.

Доказательство теорем 2 и 3 существенно не отличается от доказательства теорем 3 и 4 из работы [5].

В заключение рассмотрим, какие условия являются достаточными для выполнения соотношений A1) и B1). Для последовательностей m-зависимых случайных величин такие условия указать нетрудно. Пусть последовательности $\{M_n\}$ и $\{R_n\}$ удовлетворяют дополнительному условию: существуют постоянные $C_9>0$ и $C_{10}>0$ такие, что $\frac{M_{(m+1)(n+1)+m}}{M_n}\leqslant C_9$, $\frac{R_{(m+1)(n+1)+m}}{R_n}\leqslant C_{10}$ для всех достаточно больших n.

Тогда для выполнения A1) и B1) в случае последовательностей m-зависимых случайных величин будут достаточны те же самые условия, которые достаточны для выполнения A1) и B1) в случае последовательностей независимых случайных величин. Некоторые из таких условий были указаны в работах [1—3]. Например, условие $\mathbf{E}|X_1|^t\log(1+|X_1|)<\infty$, $0<t<1$ достаточно для того, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\mathbf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon n^{1/t})<\infty\ \text{для любого}\ \varepsilon>0,$$

если $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Это же условие достаточно для выполнения B1) с $R_n=\frac{\log n}{n}$, $t_n=n^{1/t}$, если $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность m-зависимых случайных величин с одинаковой одномерной функцией распределения. Показать это нетрудно.

Положим

$$Z_{1n}=\sum_{0\leqslant l,1+(m+1)l\leqslant n}X_{1+(m+1)l},\ Z_{2n}=\sum_{0\leqslant l,2+(m+1)l\leqslant n}X_{2+(m+1)l},\ \ldots,$$

$$Z_{mn}=\sum_{0\leqslant l,m+(m+1)l\leqslant n}X_{m+(m+1)l}.$$

Тогда $S_n=\sum_{j=1}^{m}Z_{jn}$ и суммы $Z_{1n}, Z_{2n}, \ldots, Z_{mn}$ состоят уже из независимых случайных величин, а

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant \varepsilon t_n\} \leqslant \mathbf{P}\left\{Z_{1n} \geqslant \frac{\varepsilon}{m} t_n\right\} + \ldots + \mathbf{P}\left\{Z_{mn} \geqslant \frac{\varepsilon}{m} t_n\right\}.$$

Для последовательности m-ортогональных случайных величин например, условие V и условия $M_n = o\left(\frac{t_n^2}{n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{n}{t_n^2} < \infty$ буду достаточны, чтобы выполнялись A1) и B1), так как $\mathbf{P}\{S_n \geqslant \varepsilon t_n\} \leqslant$ $\leqslant C_{11} \frac{\mathrm{D}S_n}{t_n^2} \leqslant C_{12} \frac{n}{t_n^2}$.

1. *Baum L. E., Katz M.* Convergence rates in the law of large numbers.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **120**, N 1, p. 108—123. 2. *Davis J. A.* Convergence rates for probabilities of moderate deviations.— Ann. Math. Statist., 1968, 39, N 6, p. 2016—2028. 3. *Rohatgi V. K.* On probabilities of large deviations.— Bull. Austral. Math. Soc., 1970, N 3, p. 277—285. 4. *Rohatgi V. K.* On the rate of convergence of probabilities of moderate deviations.— J. Austral. Math. Soc., 1970, **11**, N 1, p. 91—94. 5. *Амосова Н. Н.* О вероятностях больших уклонений.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1976, вып. 14, с. 20—24. 6. *Петров В. В.* Некоторые предельные теоремы для последовательностей зависимых случайных величин.— Тез. докл. III междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике. Вильнюс, 1981, Т. 2, с. 104—105. 7. *Петров В. В.* Последовательности m-ортогональных случайных величин.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1982, **119**, с. 198—202.

Поступила в редколлегию 28.06.82

УДК 513.88+519.4

А. Ю. ДАЛЕЦКИЙ, инж.,
Институт электросварки АН УССР

О КВАНТОВОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Классическая степенная проблема моментов Гамбургера [1] состоит в следующем: какие условия нужно наложить на последовательность чисел $\{s_{k_1,\ldots,k_n}\}_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}$, чтобы существовала борелевская вероятностная мера $\mu(\Delta)$ на $\mathbb{R}^n$ такая, что все ее моменты

$$m_{k_1,\ldots,k_n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \mu(dx).$$

Известны различные подходы к решению классической проблемы моментов и различные условия, обеспечивающие существование и единственность решения [1, 2].

Естественным обобщением классической проблемы моментов является ее рассмотрение не на $\mathbb{R}^n$, а на более сложных объектах как коммутативных, так и некоммутативных. В коммутативном случае интерес представляет бесконечномерная проблема моментов (для меры, сосредоточенной на пространстве, сопряженном к ядерному), решение которой дано в работе [3].