Из (4) следует

$$P(\zeta < t) = \varepsilon (1 - e^{-t^2}) M\nu_{11}(t - \eta_{12}).$$

Если ε мало, то по известной асимптотической формуле $P(\zeta < t) \sim \sim 1 - \exp(-\varepsilon\mu^{-1}t)$, где $\mu = \int_0^\infty t d(1 - e^{-t^2})$. Положим, например, $\varepsilon = 10^{-3}$, $t = 10$, тогда асимптотическая формула дает оценку $P(\zeta < t) \sim 1{,}1348 \cdot 10^{-2}$. Вычисления методом Монте-Карло по формуле (6) дают оценку $P(\zeta < t) \sim 1{,}0883 \cdot 10^{-2}$ с выборочной дисперсией $\sigma^2 = 3{,}031 \cdot 10^{-6}$. Точность полученной оценки определяется по формуле $\pm 3\sqrt{\sigma^2/N}$, где $N = 10^4$ — число реализаций метода Монте-Карло. Вычисления проведены на ЭВМ СМ-4.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. Киев : Наук. думка, 1976. 182 с. 2. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 534 с.

Поступила в редколлегию 27.05.82

УДК 519.21

Г. А. ШКЛЯР, инж.,
Институт кибернетики АН УССР

О КВАДРАТИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ПРОЦЕССОВ ТИПА ГЛАДЫШЕВА

В работе [1] поставлена задача о возможных границах скорости стремления к нулю диаметра разбиения $m(\pi_n)$ в теоремах типа Леви—Бакстера. Было показано [1, 2], что условие $m(\pi_n) = 0(1/\ln n)$ является наилучшим возможным для процесса броуновского движения. В данной работе аналогичный результат получен для процессов Гладышева [3].

Определение. Процесс $x(t)$, $t \in [0, 1]$ называется процессом Гладышева, если:

1) $x(t)$ — гауссовский процесс;

2) $m(t) = Mx(t)$ имеет ограниченную первую производную;

3) $r(s, t) = Mx(s)x(t) - m(s)m(t)$ непрерывна на $[0, 1]^2$, имеет вторые производные на $[0, 1]^2 \setminus \Delta$, где $\Delta = \{(t, t) : t \in [0, 1]\}$, и $\left| \frac{\partial^2 r(s, t)}{\partial s \partial t} \right| < L/|t - s|^{\gamma}$ для некоторых постоянных $L > 0$ и $0 < < \gamma < 2$;

4) $(r(t, t) - 2r(t, t - h) + r(t - h, t - h))/h^{2-\gamma} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(t)$ равномерно на $[0, 1]$.

Используя обычное обозначение приращения для функции $\psi : [0, 1]^2 \to R$ $\Delta_{h_1, h_2}\psi(t_1, t_2) = \psi(t_1, t_2) - \psi(t_1, t_2 - h_2) - \psi(t_1 - h_1, t_2) + \psi(t_1 - - h_1, t_2 - h_2)$, последнее условие можно записать таким образом:

4') $\Delta_{h,h} r(t, t)/h^{2-\gamma} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(t)$ равномерно на $[0, 1]$.

Пусть $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{c(\pi)} = 1\}$ — разбиение отрезка $[0, 1]$, $m(\pi) = \max(t_i - t_{i-1}, i = \overline{1, c(\pi)})$, $B(\pi) = \sum_{k=1}^{c(\pi)} [(x(t_k) - x(t_{k-1}))/ /(t_k - t_{k-1})^{\frac{1-\gamma}{2}}]^2$, Рассмотрим последовательность разбиений $\{\pi_n,\ n \geqslant 1\}$ отрезка $[0,\ 1]$. В работе [3] доказано, что для процесса Гладышева с индексом $\gamma \in (1,\ 2)$ условие $m(\pi_n) = o(1/\ln n)$ является достаточным, для того чтобы $B(\pi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$ почти наверное.

Теорема. Пусть $x(t)$ — процесс Гладышева с индексом $\gamma \in (1,\ 2)$, $m(t) = 0$, $f(t) > 0$. Существует последовательность интервальных разбиений $\{\pi_n,\ n \geqslant 1\}$ отрезка $[0,\ 1]$ такая, что $m(\pi_n) = O(1/\ln n)$, но

$$B(\pi_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} \int_0^1 f(t)\,dt$$

почти наверное.

Доказательство. Воспользуемся последовательностью разбиений, построенной в работе [2]. Пусть π_0 — разбиение, состоящее из одного интервала $[0,\ 1]$. Для $p \geqslant 1$ введем класс разбиений Π_p. Этот класс содержит разбиения интервала $[0,\ 1]$ на 2^{p-1} равных интервалов длины $1/2^{p-1}$, каждый из которых может делиться еще пополам. Таким образом, каждое разбиение класса Π_p содержит для любого целого k, $0 \leqslant k \leqslant 2^{p-1} - 1$ или интервал $J_p^k = [2k/2^p,\ (2k+2)/2^p]$ или оба интервала $I_p^{2k} = [2k/2^p, (2k+1)/2^p]$, $I_p^{2k+1} = [(2k+1)/2^p,\ (2k+2)/2^p]$.

Разбиения класса Π_p добавляются к ранее полученной последовательности разбиений. Нумерация разбиений внутри класса произвольная. В итоге получаем последовательность $\{\pi_n,\ n \geqslant 1\}$. Легко проверить, что $m(\pi_n) = O(1/\ln n)$.

Рассмотрим $B(\pi_n)$ для такой последовательности разбиений. Пусть $U_p = \max\limits_{\pi\in\Pi_p} B(\pi)$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, B(\pi_n) = \overline{\lim_{p\to\infty}}\, U_p.$$

Если $\lim\limits_{p\to\infty} U_p$ существует с вероятностью единица, то, как будет показано ниже,

$$M(\lim_{p\to\infty} U_p) = \lim_{p\to\infty} MU_p$$

и для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{p\to\infty} MU_p \neq \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Приращение процесса на интервале $A \subset [0,\ 1]$ обозначим $x(A)$. Из определения Π_p следует

$$U_p = 1/2^{p(\gamma-1)} \sum\nolimits_{k=0}^{2^{p-1}-1} U_p^k,$$

где

$$U_p^k = \max\{[x(I_p^{2k})]^2 + [x(I_p^{2k+1})]^2,\quad 2^{\gamma-1}[x(J_p^k)]^2\}.$$

Обозначим $\xi_{1,k} = x(I_p^{2k})$, $\xi_{2,k} = x(I_p^{2k+1})$. Таким образом,

$$U_p^k = \max\{\xi_{1,k}^2 + \xi_{2,k}^2,\ 2^{\gamma-1}(\xi_{1,k} + \xi_{2,k})^2\}.$$

Здесь $\xi_{1,k}$, $\xi_{2,k}$ — зависимые гауссовские случайные величины с нулевым средним.

$$\sigma^2_{i,k} = M\xi^2_{i,k} = \Delta_{2^{-p},2^{-p}}r\,((2k+i)/2^p,\ (2k+i)/2^p) = 1/2^{p(2-\gamma)} \times$$
$$\times\,[f\,((2k+i)/2^p) + o\,(1)] \qquad (1)$$

при $p \to \infty$ равномерно по k; $i = 1, 2$;

$$M\xi_{1,k}\xi_{2,k} = \Delta_{2^{-p},2^{-p}}r\,((2k+1)/2^p,\ (2k+2)/2^p) = 1/(2\cdot 2^{p(2-\gamma)}) \times$$
$$\times\,[(2^{2-\gamma}-1)\,f\,((2k+2)/2^p) - f\,((2k+1)/2^p) + o\,(1)], \qquad (2)$$

при $p \to \infty$ равномерно по k.

Легко получить, что

$$M\,(U_p) = 2^{-p(\gamma-1)}\sum_{k=0}^{2^{p-1}-1}[2^{\gamma-1}M\,(\xi_{1,k}+\xi_{2,k})^2 + M\eta_k/2 + M\,|\,\eta_k\,|/2],$$

где $\eta_k = \xi^2_{1,k} + \xi^2_{2,k} - 2^{\gamma-1}\,(\xi_{1,k}+\xi_{2,k})^2$. Заметим, что

$$2^{-p(\gamma-1)}\sum_{k=0}^{2^{p-1}-1}2^{\gamma-1}M\,(\xi_{1,k}+\xi_{2,k})^2 = \sum_{k=0}^{2^{p-1}-1}2^{1-p}\,[f\,((2k+2)/2^p) +$$
$$+\,o\,(1)] \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f\,(t)\,dt.$$

Рассмотрим второе слагаемое. В силу (1), (2)

$$M\eta_k = 2^{-p(2-\gamma)}\,[f\,((2k+1)/2^p - f\,((2k+2)/2^p) + o\,(1)].$$

Поэтому $2^{-p(\gamma-1)}\sum_{k=0}^{2^{p-1}-1}M\eta_k/2 \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Таким образом,

$$\lim_{p\to\infty} MU_p = \int_0^1 f\,(t)\,dt + \lim_{p\to\infty}\overline{B}\,(\Pi_p),$$

где

$$\overline{B}\,(\Pi_p) = 2^{-p(\gamma-1)}\sum_{k=0}^{2^{p-1}-1}M\,|\,\xi^2_{1,k} + \xi^2_{2,k} - 2^{\gamma-1}\,(\xi_{1,k}+\xi_{2,k})^2\,|/2.$$

Введем случайные величины $\zeta_{1,k} = 1/\sqrt{2}\cdot[(c+1)\,\xi_{1,k} + (c-1)\,\xi_{2,k}]$, $\zeta_{2,k} = 1/\sqrt{2}\cdot[(c-1)\,\xi_{1,k} + (c+1)\,\xi_{2,k}]$, где $c^2 = 2^\gamma - 1$; $k = \overline{0,\,2^{p-1}-1}$. Тогда $\xi^2_{1,k} + \xi^2_{2,k} - 2^{\gamma-1}\,(\xi_{1,k}+\xi_{2,k})^2 = \zeta_{1,k}\zeta_{2,k}$. Очевидно, $M\zeta_{1,k} = M\zeta_{2,k} = 0$. В силу (1), (2)

$$\hat{\sigma}^2_{i,k} = D\zeta_{i,k} = \{(c+c_i)^2\,[f\,((2k+1)/2^p) + o\,(1)] + (c-c_i)^2 \times$$
$$\times\,[f\,((2k+2)/2^p) + o\,(1)] + (c^2-1)\,[(2^{2-\gamma}-1)\,f\,((2k+2)/2^p) -$$
$$-\,f\,((2k+1)/2^p) + o\,(1)]\}/(2\cdot 2^{p(2-\gamma)}),$$

где $c_i = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ -1, & i = 2. \end{cases}$ Таким образом,

$$\hat{\sigma}_{1,k}^2 \hat{\sigma}_{2,k}^2 = [Af^2((2k+1)/2^p) + Bf^2((2k+2)/2^p) + Cf(2k+1)/2^p) \times$$
$$\times f((2k+2)/2^p) + o(1)]/(2^2 \cdot 2^{2p(2-\gamma)}),$$

где

$$A = -4 \cdot 2^\gamma + 8; \tag{3}$$

$$B = -4 \cdot 2^\gamma + 40 - 96 \cdot 2^{-\gamma} + 64 \cdot 2^{-2\gamma}; \tag{4}$$

$$C = 8 \cdot 2^\gamma + 16 - 32 \cdot 2^{-\gamma}. \tag{5}$$

Далее, $M|\zeta_{i,k}| = \hat{\sigma}_{i,k}\sqrt{2/\pi}$, $i = 1, 2$ и, следовательно,

$$\tilde{B}(\Pi_p) = 2^{-p(\gamma-1)} \sum_{k=0}^{2^{p-1}-1} (M|\zeta_{1,k}|\, M|\zeta_{2,k}|)/2 = (2\pi)^{-1} \cdot 2^{-p(\gamma-1)} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{2^{p-1}-1} [Af^2((2k+1)/2^p) + Bf^2((2k+2)/2^p) + Cf((2k+1)/2^p) \times$$
$$\times f((2k+2)/2^p) + o(1)]^{1/2}/2^{p(2-\gamma)} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} (A+B+C)^{1/2}/(4\pi) \cdot \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Из равенств (3) — (5) находим, что $(A+B+C)^{1/2} = 8(1-2^{-\gamma})$, отсюда

$$\lim_{p\to\infty} \tilde{B}(\Pi_p) = 2/\pi \cdot (1-2^{-\gamma}) \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Поскольку $f(t) > 0$, то $\sup\limits_{p, 0 \leqslant k \leqslant 2^{p-1}-1} |M\zeta_{1,k}\zeta_{2,k}| \leqslant \rho_0 < 1$ и, следуя доказательству леммы в работе [4], нетрудно получить

$$|M|\zeta_{1,k}\zeta_{2,k}| - M|\zeta_{1,k}|\, M|\zeta_{2,k}|| \leqslant L \cdot |M\zeta_{1,k}\zeta_{2,k}|.$$

Поэтому

$$|\bar{B}(\Pi_p) - \tilde{B}(\Pi_p)| \leqslant 2^{-p(\gamma-1)} \sum_{k=0}^{2^{p-1}-1} |M|\zeta_{1,k}\zeta_{2,k}| - M|\zeta_{1,k}|\, M|\zeta_{2,k}||/2 \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-p(\gamma-1)} \sum_{k=0}^{2^{p-1}-1} L \cdot 2^{-p(2-\gamma)} |f((2k+1)/2^p) - f((2k+2)/2^p) +$$
$$+ o(1)|/2 = L/4 \cdot \sum_{k=0}^{2^{p-1}-1} 2^{1-p} |f((2k+1)/2^p) - f((2k+2)/2^p) + o(1)| \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда

$$\lim_{p\to\infty} MU_p = (1+c_0) \int_0^1 f(t)\,dt,$$

где $c_0 = 2/\pi \cdot (1-2^{-\gamma}) > 0$.

Докажем, что последовательность $\{U_p,\ p \geqslant 1\}$ равномерно интегрируема. Поскольку $U_p^k \leqslant 2^\gamma (\xi_{1,k}^2 + \xi_{2,k}^2)$, то легко показать, что

$$MU_p^2 = 2^{-2p(\gamma-1)} \sum_{k,l=0}^{2^{p-1}-1} MU_p^k U_p^l \leqslant 2^{-2p(\gamma-1)} \sum_{k,l=0}^{2^{p-1}-1} 3 \cdot 2^{2\gamma} (\sigma_{1,k}^2 + \sigma_{2,k}^2) \times$$
$$\times (\sigma_{1,l}^2 + \sigma_{2,l}^2) = 3 \cdot 2^{2\gamma} \Big(\sum_{k=0}^{2^{p-1}-1} 2^{-p} [f((2k+1)/2^p) + f((2k+2)/2^p) +$$

$$+ o(1))\Big)\left(\sum_{i=0}^{2^{p-1}-1} 2^{-p}\left[f((2i+1)/2^p) + f((2i+2)/2^p) + o(1)\right]\right) \xrightarrow[p\to\infty]{} \xrightarrow[p\to\infty]{} 3\cdot 2^{2\gamma}\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2.$$

Отсюда $\sup\limits_{p\geqslant\infty} M(U_p)^2 < +\infty$. Согласно теореме Валле-Пуссена случайные величины U_p равномерно интегрируемы, и если существует $\lim\limits_{p\to\infty} U_p$, то

$$M(\lim_{p\to\infty} U_p) = \lim_{p\to\infty} M(U_p).$$

Таким образом,

$$B(\pi_n) \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Теорема доказана.

1. *Дадли Р. М.* Выборочные функции гауссовского процесса.— В кн.: Случайные процессы. М.: Наука, 1978, с. 7—62. 2. *Vega W. F. de la.* An almost sure convergence of quadratic brownian variation.— Ann. Probab., 1974, 2, N 3, p. 551—552. 3. *Klein R., Gine E.* On quadratic variation of processes with gaussian increments.— Ann. Probab., 1975, 3, N 4, p. 716—721. 4. *Kawada T.* The Levy — Baxter theorem for Gaussian random field : a sufficient condition.— Proc. Amer. Math. Soc., 1975, 53, N 2, p. 463—469.

Поступила в редколлегию 09.02.83

УДК 519.21

Н. В. КАРТАШОВ, канд. физ.-мат. наук, Киевский университет

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ОБЩИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В работе получены асимптотические представления для вероятностей перехода общих цепей Маркова с точностью до слагаемых экспоненциального порядка убывания. Найден вид этих представлений для цепей, описывающих марковские системы обслуживания. Доказательства основаны на операторном подходе в эргодической теории цепей Маркова [1]. Аналогичные представления для дискретных полумарковских процессов с непрерывными временами пребывания получены автором в работе [2].

Рассмотрим цепь Маркова $X = (X_t,\ t \geqslant 0)$ со значениями в измеримом пространстве $(E,\ \mathscr{E})$, заданную переходным ядром $P(x, B)$, $x \in E$, $B \in \mathscr{E}$ и имеющую единственную вероятностную инвариантную меру π.

Пусть в пространстве конечных мер на $\mathscr{E}$ выделено банахово пространство $\mathfrak{m}$ с нормой $\|\cdot\|$, удовлетворяющей условиям (1.1), (1.2), (1.3) работы [1]. Эта норма выделяет из класса переходных ядер на $(E,\ \mathscr{E})$ пространство линейных ограниченных операторов $\mathfrak{B}$ с нормой $\|Q\| = \sup(\|\mu Q\|,\ \|\mu\| \leqslant 1)$. Как и в работе [1], предположим, что $P \in \mathfrak{B}$, $\pi \in \mathfrak{m}$.