ции $A(t, x)$, кроме $A^j(t, x^1, \ldots, x^d)$, одинаково монотонны (либо все не убывают, либо все не возрастают) по аргументам $x^1, \ldots, x^{j-1}, x^{j+1}, \ldots x^d$. При этом в E_d придется ввести новую упорядоченность.

1. *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений.— Мат. сб., 1980, 111 (153), с. 434—452.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 720 с.

Поступила в редколлегию 26.10.82

УДК 519.248

Т. Н. ЧЕЧЕТКИНА, инж.,
Киевский политехнический институт

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Известно [1], что различные характеристики полумарковского процесса (ПМП) с дискретным множеством состояний могут быть определены как решения уравнения марковского восстановления. Для достаточно больших $t \in [0, \infty)$ это решение может быть оценено с помощью известных предельных теорем [1, гл. 4]. В статье получено представление решения уравнения марковского восстановления в форме, удобной для вычисления его в произвольной точке $t \in [0, \infty)$.

Пусть $\eta(t)$ — неприводимый положительно возвратный ПМП со значениями в дискретном множестве состояний $E = \{1, 2, \ldots\}$, заданный начальным распределением ρ_i, $i \in E$; вероятностями перехода вложенной цепи Маркова p_{ij}, $i, j \in E$; условными функциями распределения времени до перехода $F_{ij}(t)$, $i, j \in E$, $t \geqslant 0$, имеющими плотности.

Уравнение марковского восстановления в матричной форме для некоторой характеристики $\varphi(t)$ введенного процесса имеет вид

$$\varphi(t) = L(t) + \int_0^t Q(dx)\,\varphi(t-x), \tag{1}$$

где $Q(t)$ — полумарковская матрица; $L(t)$ — матрица (или вектор) известных измеримых, ограниченных в ограниченном интервале функций; $\varphi(t)$ — матрица (соответственно вектор) искомых характеристик ПМП.

Согласно теореме 3.2 [1] перечисленные условия обеспечивают существование единственного решения уравнения марковского восстановления, представимого в виде

$$\varphi(t) = \int_0^t R(dx)\,L(t-x), \quad R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{k^*}(t). \tag{2}$$

Задача состоит в оценке этого решения. Обозначим $\varphi_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$, $L_{ij}(t)$, $i, j \in E$ элементы соответствующих матричных функций.

Предположим, что для всех $i, j \in E$ существуют производные

$L_{ij}(t) = d/dt\, L_{ij}$, $t \geqslant 0$; причем для всех $x \in [0, t)$ имеет место представление

$$L_{ij}(x) = l_{ij}(t)\, d/dt\, \lambda_{ij}(x), \tag{3}$$

где $\lambda_{ij}(x)$ — функция распределения в $[0, t)$, $l_{ij}(t)$ ограничена для $t \in [0, \infty)$.

Пусть $\nu_{ij}(t)$ — число посещений ПМП $\eta(t)$ состояния j за время t, если $\eta(0) = i$; η_{ij} — случайная величина с функцией распределения $\lambda_{ij}(x)$, $x \in [0, t)$, $i, j \in E$.

Теорема. Если выполнены перечисленные условия, то для всех $i, j \in E$ имеет место равенство

$$\varphi_{ij}(t) = \sum\nolimits_{k \in E} l_{kj}(t)\, M\nu_{ik}(t - \eta_{kj}). \tag{4}$$

Доказательство. Так как $F_{ij}(t)$ имеют плотности, то $R_{ij}(t)$ дифференцируемы и, следовательно,

$$\varphi_{ij}(t) = \sum\nolimits_{k \in E} \int_0^t R_{ik}(dx)\, L_{kj}(t - x) =$$

$$= \sum\nolimits_{k \in E} \int_0^t R_{ik}(t - x)\, L_{kj}(x)\, dx.$$

Из формулы (3) получаем

$$\varphi_{ij}(t) = \sum\nolimits_{k \in E} l_{kj}(t) \int_0^t R_{ik}(t - x)\, d\lambda_{ij}(x).$$

Отсюда следует справедливость (4).

Следствие. Пусть множество $E = E_0 \cup \{r\}$, а $\varphi_{ir}(t) = \mathbf{P}(\zeta < t / \eta(0) = i)$, где $\zeta = \inf\{t : \eta(t) = r\}$. Тогда $L_{kr}(x) = p_{kr} F_{kr}(x)$, $k \in E_0$. Представим $L_{kr}(x)$ в виде

$$L_{kr}(x) = p_{kr} F_{kr}(t)\, d/dx\, \{[F_{kr}(t)]^{-1} F_{kr}(x)\}.$$

Согласно доказанной теореме

$$\mathbf{P}(\zeta < t / \eta(0) = i) = \sum\nolimits_{k \in E_0} p_{kr} F_{kr}(t)\, M\nu_{ik}(t - \eta_{kr}), \tag{5}$$

где η_{kr} — случайные величины, имеющие распределение $F_{kr}(x) \times \times [F_{kr}(t)]^{-1}$, $x \in [0, t)$, $k \in E$.

Полученные результаты позволяют оценить значение решения уравнения (1) методом Монте-Карло для некоторого наперед заданного набора точек из $[0, t)$, после чего приближенное значение решения может быть оценено в произвольной точке из $[0, t)$ известными методами интерполяции сеточных функций, например, методом гладких восполнений [2, гл. 3].

Пример. Оценим значение распределения момента поглощения полумарковского процесса ζ с множеством состояний $\{1, 2\}$ ($\eta(0) = 1$), заданного полумарковской матрицей

$$\begin{Vmatrix} (1 - \varepsilon)(1 - e^{-t^2}) & \varepsilon(1 - e^{-t^2}) \\ 0 & \Phi(t) \end{Vmatrix},$$

где $\Phi(t)$ — произвольная функция распределения.

Из (4) следует

$$P(\zeta < t) = \varepsilon (1 - e^{-t^2})\, M\nu_{11}(t - \eta_{12}).$$

Если ε мало, то по известной асимптотической формуле $P(\zeta < t) \sim 1 - \exp(-\varepsilon\mu^{-1}t)$, где $\mu = \int_0^\infty t d(1 - e^{-t^2})$. Положим, например, $\varepsilon = 10^{-3}$, $t = 10$, тогда асимптотическая формула дает оценку $P(\zeta < t) \sim 1{,}1348 \cdot 10^{-2}$. Вычисления методом Монте-Карло по формуле (6) дают оценку $P(\zeta < t) \sim 1{,}0883 \cdot 10^{-2}$ с выборочной дисперсией $\sigma^2 = 3{,}031 \cdot 10^{-6}$. Точность полученной оценки определяется по формуле $\pm 3\sqrt{\sigma^2/N}$, где $N = 10^4$ — число реализаций метода Монте-Карло. Вычисления проведены на ЭВМ СМ-4.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. Киев : Наук. думка, 1976. 182 с. 2. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 534 с.

Поступила в редколлегию 27.05.82

УДК 519.21

Г. А. ШКЛЯР, инж.,
Институт кибернетики АН УССР

О КВАДРАТИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ПРОЦЕССОВ ТИПА ГЛАДЫШЕВА

В работе [1] поставлена задача о возможных границах скорости стремления к нулю диаметра разбиения $m(\pi_n)$ в теоремах типа Леви—Бакстера. Было показано [1, 2], что условие $m(\pi_n) = 0(1/\ln n)$ является наилучшим возможным для процесса броуновского движения. В данной работе аналогичный результат получен для процессов Гладышева [3].

Определение. Процесс $x(t)$, $t \in [0, 1]$ называется процессом Гладышева, если:

1) $x(t)$ — гауссовский процесс;
2) $m(t) = Mx(t)$ имеет ограниченную первую производную;
3) $r(s, t) = Mx(s)x(t) - m(s)m(t)$ непрерывна на $[0, 1]^2$, имеет вторые производные на $[0, 1]^2 \setminus \Delta$, где $\Delta = \{(t, t) : t \in [0, 1]\}$, и $\left|\frac{\partial^2 r(s,t)}{\partial s \partial t}\right| < L/|t - s|^\gamma$ для некоторых постоянных $L > 0$ и $0 < \gamma < 2$;
4) $(r(t, t) - 2r(t, t - h) + r(t-h, t-h))/h^{2-\gamma} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(t)$ равномерно на $[0, 1]$.

Используя обычное обозначение приращения для функции $\psi : [0, 1]^2 \to R$ $\Delta_{h_1,h_2}\psi(t_1, t_2) = \psi(t_1, t_2) - \psi(t_1, t_2 - h_2) - \psi(t_1 - h_1, t_2) + \psi(t_1 - h_1, t_2 - h_2)$, последнее условие можно записать таким образом:

4') $\Delta_{h,h} r(t, t)/h^{2-\gamma} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(t)$ равномерно на $[0, 1]$.

Пусть $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{c(\pi)} = 1\}$ — разбиение отрезка $[0, 1]$, $m(\pi) = \max(t_i - t_{i-1},\ i = \overline{1, c(\pi)})$, $B(\pi) = \sum_{k=1}^{c(\pi)} [(x(t_k) - x(t_{k-1}))/(t_k - t_{k-1})^{\frac{1-\gamma}{2}}]^2$,