УДК 519.21

И. В. ФЕДОРЕНКО, ассист., Кубанский университет

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЕДИНИЧНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Рассмотрим векторное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = A(t, x(t))\, dt + dw_t, \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$x_0 \in E_d$; $t \in [0, 1]$; w_t — d-мерный винеровский процесс на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P); функция $A(t, x)$, действующая из $[0, 1] \times E_d$ в E_d, непрерывна и линейно ограничена по x, т. е. существует такое $L > 0$, что $|A(t, x)| \leqslant L(1 + |x|)$ при всех t, x. В работе [1] показано, что при любом $x_0 \in E_d$ уравнение (1) имеет единственное решение $X(t, x, \omega)$ с п. н. непрерывными траекториями. В настоящей заметке указаны условия, при которых реализации $X(\cdot, \cdot, \omega)$ случайной функции $X(t, x, \omega)$ п. н. непрерывны.

1. В этом пункте доказывается многомерная «теорема сравнения». Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$dy(t) = B(t, y(t))\, dt + dw_t, \ y(0) = y_0 \in E_d,$$

функция $B(t, x)$ непрерывна и линейно ограничена по x.

Будем говорить, что функция $A(t, x)$ удовлетворяет условию Камке—Важевского, если при любом $i = \overline{1, d}$ ее i-я компонента $A^i(t, x^1, \ldots, x^d)$ не убывает по аргументам $x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^d$ [2].

Введем в E_d естественную упорядоченность, т. е. будем говорить, что $x > y$ для $x, y \in E_d$, если $x^i > y^i$ при всех $i = \overline{1, d}$.

Теорема 1. Пусть одна из функций $A(t, x)$ или $B(t, x)$ удовлетворяет условию Камке—Важевского, $x_0 > y_0$, $A(t, x) > B(t, x)$ при всех t, x, тогда

$$P\{\omega : x(t) > y(t),\ t \in [0, 1]\} = 1.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. существуют такие случайные величины $i(\omega)$, принимающая только натуральные значения от 1 до d, и $\tau(\omega)$, принимающая значения из $[0, 1]$, что

$$P\left\{\begin{matrix} \omega : x^{i(\omega)}(\tau(\omega)) = y^{i(\omega)}(\tau(\omega)),\ x^j(t) > y^j(t) \\ \text{при } t < \tau(\omega) \text{ для любых } j = \overline{1, d} \end{matrix}\right\} > 0.$$

Измеримость этих случайных величин следует из непрерывности траекторий процессов $x(t)$ и $y(t)$. Из неравенства $x_0 > y_0$ вытекает, что $P\{\omega : \tau(\omega) > 0\} = 1$. Далее, при $t < \tau(\omega)$ равенство

$$y^{i(\omega)}(t) - x^{i(\omega)}(t) = \int\limits_t^{\tau(\omega)} [A^{i(\omega)}(s, x(s)) - B^{i(\omega)}(s, y(s))]\, ds$$ выполнено п. н.

Левая часть здесь п. н. отрицательна. Под знаком интеграла в правой части стоит процесс, п. н. положительный при $s = \tau(\omega)$, это следует из условия Камке—Важевского. В силу непрерывности траекторий процессов $x(t)$ и $y(t)$ правая часть п. н. положительна в некотором интервале $(\tau_1(\omega), \tau(\omega))$, $\tau_1(\omega) < \tau(\omega)$ п. н. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Как показывают тривиальные примеры, без условия Камке—Важевского многомерная «теорема сравнения» не верна.

2. Пусть функция $A(t, x)$ удовлетворяет условию Камке—Важевского.

Теорема 2. Существует такое $\Omega_1 \subset \Omega$, $P(\Omega_1) = 1$, что при любых $x_0 \in E_d$, $\omega \in \Omega_1$ функция $X(\cdot, x_0, \omega)$ непрерывна.

Доказательство. Пусть $Q \subset E_d$ — множество всех элементов из E_d с рациональными координатами. Так как Q счетно, то существует такое $\Omega_1 \subset \Omega$, $P(\Omega_1) = 1$, что при любых $x \in Q$, $\omega \in \Omega_1$ функция $X(\cdot, x, \omega)$ непрерывна. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset Q$, $x_n \downarrow x_0$. По теореме 1

$$P\{\omega : X(t, x_{n+1}, \omega) > X(t, x_n, \omega) > X(t, x_0, \omega),\ t \in [0, 1]\} = 1.$$

Из теоремы Беппо — Леви следует, что при каждом t последовательность $\{X(t, x, \omega)\}$ сходится п. н. к случайной величине $Y(t, \omega)$ при $n \to \infty$. Для любого $\omega \in \Omega_1$ последовательность детерминированных функций $\{X(\cdot, x_n, \omega)\}$ монотонна, равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, ее равномерным по t пределом при $n \to \infty$ является траектория $Y(\cdot, \omega)$, следовательно, она непрерывна (т. е. существует процесс $Z(t, \omega)$, стохастически эквивалентный процессу $Y(t, \omega)$, такой, что при любом $\omega \in \Omega_1$ функции $Z(\cdot, \omega)$ непрерывны). Нетрудно заметить, что процесс $Y(t, \omega)$ является решением уравнения (1), в силу единственности решения он стохастически эквивалентен процессу $X(t, x_0, \omega)$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Почти при всех $\omega \in \Omega$ функция $X(\cdot, \cdot, \omega)$ непрерывна по совокупности аргументов.

Доказательство. Выберем множество $\Omega_1 \subset \Omega$, как в теореме 2. Возьмем произвольную последовательность $\{y_n\} \subset E_d$, $y_n \downarrow x_0$. Существует последовательность $\{x_n\} \subset Q$ такая, что $x_n \downarrow x_0$ и $x_n > y_n$ при каждом натуральном n. Из теоремы 1 следует, что

$$P\{\omega : X(t, x_n, \omega) > X(t, y_n, \omega) > X(t, x_0, \omega),\ t \in [0, 1]\} = 1. \qquad (2)$$

В теореме 2 показано, что при любом $\omega \in \Omega_1$ последовательность детерминированных функций $\{X(\cdot, x_n, \omega)\}$ сходится к функции $X(\cdot, x_0, \omega)$ равномерно. Отсюда и из (2) следует, что при любых $\omega \in \Omega_1$, $x_0 \in E_d$ функция $X(\cdot, x, \omega)$ стремится к функции $X(\cdot, x_0, \omega)$ при $x \to x_0$ равномерно. Утверждение теоремы теперь следует из того факта, что при любом $\omega \in \Omega_1$ функция $X(t, x\ \omega)$ при каждом x непрерывна по t и равномерно по t непрерывна по x.

Замечание 2. Условие Камке —Важевского можно заменить следующим: при каждом $j = \overline{1, d}$ все компоненты $A^i(t, x^1, \ldots, x^d)$ функции $A(t, x)$, кроме $A^j(t, x^1, \dots, x^d)$, одинаково монотонны (либо все не убывают, либо все не возрастают) по аргументам $x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots x^d$. При этом в E_d придется ввести новую упорядоченность.

1. *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений.— Мат. сб., 1980, **111** (153), с. 434—452.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 720 с.

Поступила в редколлегию 26.10.82

УДК 519.248

Т. Н. ЧЕЧЕТКИНА, инж.,
Киевский политехнический институт

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Известно [1], что различные характеристики полумарковского процесса (ПМП) с дискретным множеством состояний могут быть определены как решения уравнения марковского восстановления. Для достаточно больших $t \in [0, \infty)$ это решение может быть оценено с помощью известных предельных теорем [1, гл. 4]. В статье получено представление решения уравнения марковского восстановления в форме, удобной для вычисления его в произвольной точке $t \in [0, \infty)$.

Пусть $\eta(t)$ — неприводимый положительно возвратный ПМП со значениями в дискретном множестве состояний $E = \{1, 2, \dots\}$, заданный начальным распределением ρ_i, $i \in E$; вероятностями перехода вложенной цепи Маркова p_{ij}, $i, j \in E$; условными функциями распределения времени до перехода $F_{ij}(t)$, $i, j \in E$, $t \geqslant 0$, имеющими плотности.

Уравнение марковского восстановления в матричной форме для некоторой характеристики $\varphi(t)$ введенного процесса имеет вид

$$\varphi(t) = L(t) + \int_0^t Q(dx)\,\varphi(t-x), \tag{1}$$

где $Q(t)$ — полумарковская матрица; $L(t)$ — матрица (или вектор) известных измеримых, ограниченных в ограниченном интервале функций; $\varphi(t)$ — матрица (соответственно вектор) искомых характеристик ПМП.

Согласно теореме 3.2 [1] перечисленные условия обеспечивают существование единственного решения уравнения марковского восстановления, представимого в виде

$$\varphi(t) = \int_0^t R(dx)\,L(t-x), \quad R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{k^*}(t). \tag{2}$$

Задача состоит в оценке этого решения. Обозначим $\varphi_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$, $L_{ij}(t)$, $i, j \in E$ элементы соответствующих матричных функций

Предположим, что для всех $i, j \in E$ существуют производные