с непустой внутренностью $\mu(A) = +\infty$. Отсюда следует справедливость соотношений теоремы 2 без предположения конечности, но уже только для таких $A \subset \mathbb{R}^m$, для которых при почти всех p и z либо $A_0 \cap \{x : p(x) = z\} = \varnothing$, либо $\mathrm{int}_{p,z}(A \cap \{x : p(x) = z\}) \neq \varnothing$, где $\mathrm{int}_{p,z}$ — относительная внутренность на гиперплоскости $\{x : p(x) = z\}$. В частности, таковыми являются все открытые подмножества $A \subset \mathbb{R}^m$.

3. Если в условиях теоремы 2 кроме инвариантности относительно сдвигов предполагать и инвариантность относительно поворотов (т. е. однородность и изотропность), то величина $N_y(p)$ не будет зависеть от $p \in O^*(m, k)$, а (6), (7) примут соответственно следующий вид:

$$M[S_y^k(B)]^t \geqslant \left[\frac{N_y L^m(B)}{\beta_t(m, k)}\right]^t$$

и

$$S_y^k = \frac{1}{\beta_1(m, k)} N_y.$$

В силу соотношения между различными геометрическими мерами (см. неравенство (3) в [1]) все сказанное останется справедливым, если вместо сферической взять любую другую k-мерную меру $G^k(\cdot)$, для которой имеет место соответствующая измеримость функционала $G^k(x \in A : \xi(x, \omega) = y)$.

1. *Радченко А. Н.* Измеримость геометрической меры множества уровня случайной функции.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1984, вып. 31, с. 115—120. 2. *Радченко А. Н.* Математическое ожидание геометрической меры множества уровня случайной функции. Киев : Киев. ун-т, 1980. 27 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ № 4859-80 деп. 3. *Corrsin S.* A measure of the area of a homogeneous random surface in space.— Quart. Appl. Math., 1955, **12**, N 4, p. 404—408. 4. *Pawula R. F.* Comments on «Statistical properties of the contours of random surfaces».— IEEE Trans. Inform. Theory, 1963, **IT-9**, N 3, p. 208—209. 5. *Pawula R. F.* A proof of Corrsin's theorem, concerning stationary random surfaces.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1968, **IT-14**, N 5, p. 770—772. 6. *Switzer P.* Geometrical measure of smoothness of random functions.— J. Appl. Probab., 1976, **13**, N 1, p. 86—95. 7. *Радченко А. Н.* О геометрических мерах множества уровня случайного поля.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1981, вып. 25, с. 114—125. 8. *Халмош П.* Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 350 с.

Поступила в редколлегию 25.02.82

УДК 519.21

Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, д-р физ.-мат. наук, Г. ПЕЖИНЬСКА, асп.,
Киевский университет

О МАКСИМАЛЬНО СОВПАДАЮЩИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Пусть Y, B_Y — измеримое пространство, $L(P_1, P_2)$ — класс двумерных распределений P_{12} (случайных величин ξ_1 и ξ_2, определенных на одном вероятностном пространстве Ω, F, P со значениями в Y) с фиксированными одномерными проекциями $P_{12}(A, Y) = P_1(A)$, $P_{12}(Y, A) = P_2(A)$, $A \in B_Y$.

Пусть также $d(P_{12}) = P\{\xi_1 = \xi_2\}$ — вероятность совпадения случайных величин ξ_1 и ξ_2 с совместным распределением P_{12} и $d(P_1, P_2) = \sup (d(P_{12}), P_{12} \in L(P_1, P_2))$. Обозначим $\rho(P_1, P_2) = \sup (|P_1(A) - P_2(A)|, A \in B_Y)$ — расстояние по вариации между распределениями P_1 и P_2.

Известно [1, 2], что верхняя грань $d(P_1, P_2)$ достигается на некотором распределении $P_{12} \in L(P_1, P_2)$, причем имеет место равенство

$$d(P_1, P_2) = 1 - \rho(P_1, P_2). \tag{1}$$

В настоящей работе получено обобщение этого результата на случай семейств распределений, измеримых по некоторой дополнительной переменной.

Пусть $Q_i(z, A)$, $i = 1, 2$ — два переходных ядра, действующих из измеримого пространства Z, B_Z в пространство Y, B_Y (при фиксированных $A \in \to B_Y$ $Q_i(z, A)$, $i = 1, 2$ являются измеримыми функциями по $z \in Z$, а при фиксированных z — распределениями на B_Y).

Через $\mathrm{var}_A\, \varphi(\cdot)$ будем обозначать полную вариацию заряда $\varphi(\cdot)$ на множестве $A \in B_Y$.

Теорема. Пусть выполняется условие $A: \mathrm{var}_A (Q_1(z, \cdot) - Q_2(z, \cdot))$ — B_Z-измеримая функция для каждого $A \in B_Y$.

Тогда можно построить переходное ядро $Q(z, A \times B)$, действующее из Z, B_Z в $Y \times Y$, $B_Y \times B_Y$ и такое, что: 1) $Q(z, A \times Y) = Q_1(z, A)$, $A \in B_Y$; 2) $Q(z, Y \times B) = Q_2(z, B)$, $B \in B_Y$; 3) для случайных величин η_z^1 и η_z^2 с совместным распределением $Q(z, A \times B)$ справедливо равенство $P\{\eta_z^1 = \eta_z^2\} = 1 - \rho(Q_1(z, \cdot), Q_2(z, \cdot))$, $z \in Z$.

Замечание. Условие A не является в общем случае ограничительным. Оно выполняется, например, в следующих случаях:

а) борелевская σ-алгебра B_Y -сепарабельна (порождена счетным классом множеств из B_Y);

б) возможно представление $Q_i(z, A) = \int\limits_A p_i(z, u)\, \varphi(du)$, $z \in Z$, $i = 1, 2$, где $p_i(z, u)$ — неотрицательные функции, измеримые по совокупности переменных z, u; φ — некоторая σ-конечная мера на B_Y.

Доказательство теоремы. Обозначим $\varphi_z(A) = Q_1(z, A) - Q_2(z, A)$, $A \in B_Y$, $z \in Z$. По определению $\varphi_z^+(A) = \sup\limits_{B \subset A} \varphi_z(B)$, $\varphi_z^-(A) = -\inf\limits_{B \subset A} \varphi_z(B)$, $\mathrm{var}_A \varphi_z(\cdot) = \varphi_z^+(A) + \varphi_z^-(A)$, $A, B \in B_Y$ являются соответственно верхней, нижней и полной вариацией заряда $\varphi_z(\cdot)$ на множестве A.

Для заряда $\varphi_z(\cdot)$ запишем разложение Жордана—Хана [3]:

$$\varphi_z(A) = \varphi_z^+(A) - \varphi_z^-(A), \quad A \in B_Y, \tag{2}$$

где $\varphi_z^+(\cdot)$ и $\varphi_z^-(\cdot)$ — конечные сингулярные меры, $\varphi_z^+(A) = \varphi_z(D_z A)$, $\varphi_z^-(A) = -\varphi_z(\bar{D}_z A)$, D_z, $A \in B_Y$, D_z — множество положительности заряда $\varphi_z(\cdot)$.

Очевидно, заряд $\varphi_z(\cdot)$ является измеримой по z функцией, поэтому из (2) и условия A следует измеримость мер $\varphi_z^+(\cdot)$ и $\varphi_z^-(\cdot)$.

Известно, что $\varphi_z^+(Y) = \varphi_z^-(Y) = \rho(Q_1(z, \cdot), Q_2(z, \cdot)) = \rho_z$, ρ_z — измеримая по z функция.

Определим измеримую по $z \in Z$ при всех $A \in B_Y$ меру

$$P_z(A) = Q_2(z, A) - \varphi_z^-(A) = Q_1(z, \overline{D}_z A) + Q_2(z, D_z A) =$$
$$= Q_1(z, A) - \varphi_z^+(A).$$

Отметим, что $P_z(Y) = 1 - \rho_z = p_z$.

Для $z \in Z$ таких, что $0 < p_z < 1$, определим следующие вероятностные меры на B_Y:

$$\overline{P}_z(A) = P_z(A)/p_z,\ P_z^+(A) = \varphi_z^+(A)/(1 - p_z),\ P_z^-(A) = \varphi_z^-(A)/(1 - p_z).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$Q_1(z, A) = p_z \overline{P}_z(A) + (1 - p_z) P_z^+(A), \quad A \in B_Y,$$
$$Q_2(z, A) = p_z \overline{P}_z(A) + (1 - p_z) P_z^-(A), \quad A \in B_Y.$$

Определим теперь переходное ядро Q следующим образом:

$$Q(z, A \times B) = \begin{cases} p_z \overline{P}_z(AB) + (1 - p_z) P_z^+(A) P_z^-(B) & \text{при } 0 < p_z < 1, \\ Q_1(z, AB) & \text{при } p_z = 1, \\ Q_1(z, A) Q_2(z, A) & \text{при } p_z = 0. \end{cases}$$

Измеримость этого ядра по $z \in Z$ при фиксированных $A, B \in B_Y$ следует из измеримости по z переходных ядер $Q_i(z, A)$, $i = 1, 2$ мер $\varphi_z^+(A)$, $\varphi_z^-(A)$ и функции p_z.

В справедливости условий 1) — 3) для построенного ядра $Q(z, A \times B)$ можно убедиться непосредственной проверкой.

Теорема использована для получения оценок скорости сходимости распределений в эргодических теоремах для случайных процессов с полумарковскими переключениями методом синхронизации [4].

1. *Добрушин Р. Л.* Задание системы случайных величин при помощи условных распределений.— Теория вероятностей и ее применения, 1970, **15**, вып. 3, с. 469—496. 2. *Strassen V.* The existence of probability measures with given marginals.— Ann. Math. Statist., 1965, **36**, N 2, p. 423—439. 3. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 719 с. 4. *Сильвестров Д. С., Пежиньска Г.* Оценки скорости сходимости в эргодических теоремах для процессов с полумарковскими переключениями.— Abstracts of VIII International congress of mathematics. Warszawa, 1983, p. 24.

Поступила в редколлегию 13.10.83