где B_Λ — алгебра подмножеств Λ; $z(\cdot)$ — случайная функция множеств на $B_\Lambda \times \dots \times B_\Lambda$ такая, что $Mz(A)\overline{z(B)} = F(A, B)$, $(A, B \in B_\Lambda \times \dots \times B_\Lambda)$ — комплекснозначная функция множеств, аддитивная по всем аргументам, положительно-определенная, $\int\limits_{\Lambda^m}\int\limits_{\Lambda^m} |F(d\lambda, d\mu)| < \infty$.

1. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с. 2. *Папулис А.* Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с. 3. *Джери Дж. А.* Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения : Обзор.— Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1977, 65, № 11, с. 53—89. 4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1947. 240 с. 5. *Розанов Ю. А.* Спектральный анализ абстрактных функций.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, вып. 4, с. 48—56.

Поступила в редколлегию 13.09.83

УДК 519.21

А. Н. РАДЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МЕРЫ МНОЖЕСТВА УРОВНЯ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

В работе [1] были получены условия измеримости геометрической меры множества уровня случайной функции. В частности, была доказана измеримость сферической и интегральногеометрической мер множества уровня. В данной статье, являющейся продолжением [1], получены соотношения для математического ожидания геометрической меры множества уровня. Эти результаты были ранее депонированы [2].

1. Пусть (Ω, σ, P) — полное вероятностное пространство, $\xi : X \times \Omega \to Y$ — п. н. непрерывная на $X \subset \mathbb{R}^m$ случайная функция, Y — произвольное метрическое пространство; $S_y^k(B) = S^k(x \in B : \xi(x, \omega) = y)$ — k-мерная сферическая мера множества уровня, $N(B)$ — число точек множества B, $N_y(p, z, B) = N(x \in B : \xi(x, \omega) = y, p(x) = z)$ (см. [1]).

Из приведенных в статье [1] свойств геометрических мер вытекают следующие соотношения для k-мерной сферической меры (при произвольном $k = 1, \dots, m$):

а) при любом $t \in [1, +\infty)$ для всякого борелевского $A \subset \mathbb{R}^m$

$$S^k(A) \geqslant \frac{1}{\beta_t(m, k)} \left\{ \int\limits_{O^*(m,k)} dp \left[\int\limits_{\mathbb{R}^k} N\left(A \cap \{x : p(x) = z\}\right) dz \right]^t \right\}^{1/t}; \qquad (1)$$

б) если борелевское $A \subset \mathbb{R}^m$ счетно (S^k, k)-спрямляемо, то при этом k

$$S^k(A) = \frac{1}{\beta_1(m, k)} \iint\limits_{O^*(m,k)\times\mathbb{R}^k} N(A \cap \{x : p(x) = z\})\, dz dp. \qquad (2)$$

В случае $S^k(A) < +\infty$ равенство (2) выполняется тогда и только тогда, когда борелевское множество $A \subset \mathbb{R}^m$ (S^k, k)-спрямляемо. Выполнение равенства (2) равносильно эквивалентности любых определений k-мерной меры множества A [1].

Используя измеримость рассматриваемых функционалов [1] и неравенство Иенсена, из (1) и (2) получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\xi : X \times \Omega \to Y$ — п. н. непрерывная на $X \subset \mathbb{R}^m$ случайная функция, принимающая значения в произвольном метрическом пространстве Y. Тогда для любых σ-компактного $A \subset X$, $t \in [1, +\infty)$ и $k = 1, \ldots, m$ выполнено

$$M\,[S_y^k(A)]^t \beta_t^t(m, k) \geqslant \int\limits_{O^*(m,k)} dp \left[\int\limits_{\mathbb{R}^k} MN_y(p, z, A)\, dz \right]^t. \tag{3}$$

При $t = 1$ равенство в (3) для некоторых $A \subset X$ и $k \in \{1, \ldots, m\}$ будет выполнено тогда (а в случае $S_y^k(A) < +\infty$ п. н. и только тогда), когда множество уровня $\{x \in A : \xi(x, \omega) = y\}$ является п. н. счетно (S^k, k)-спрямляемым. При этом

$$MS_y^k(A) = \frac{1}{\beta_1(m, k)} \iint MN_y(p, z, A)\, dp dz, \tag{4}$$

где $\beta_1(m, k) = \left[\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right)\right] \Big/ \left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]$.

Соотношения (1), (2) и теорема 1 дают полную картину связи «естественного» определения k-мерной меры множества уровня (сферическая мера) и среднего числа пересечений ее всевозможными гиперплоскостями соответствующей размерности. Ранее [3—6] были получены только частные случаи равенства (4). При этом использовались различные рассуждения статистического характера, тогда как результат непосредственно следует из соотношения между различными определениями k-мерной меры. Отметим также, что при дополнительных предположениях о локальных свойствах случайной функции (например, локальная липшицевость) условие счетной (S^k, k)-спрямляемости множества заданного уровня приобретает простой и естественный вид [7].

2. Соотношения (3), (4) имеют особенно простой вид тогда, когда величины $MS_y^k(A)$ и $MN_y(p, z, A)$ инвариантны относительно сдвигов. Такая инвариантность заведомо имеет место для однородной в широком смысле случайной функции (условия, обеспечивающие инвариантность интересующих нас величин, рассмотрены в работе [2]).

Пусть п. н. непрерывная случайная функция $\xi(x, \omega)$ и уровень $y \in Y$ таковы, что величины $MN_y(p, z, B)$ инвариантны относительно сдвигов для σ-компактных $B \subset X$. Если при некоторых $k \in \{1, \ldots, m\}$ и $(p, z) \in O^*(m, k) \times \mathbb{R}^k$ эта величина конечна для любого компактного $B \subset X$ (что в силу инвариантности относительно сдвигов равносильно конечности, например, величины $MN_y(p, z, [0, 1]^m)$), то для этих p и z и всякого борелевского $B \subset X$ выполнено

$$MN_y(p, z, B) = N_y(p)\, L^{m-k}(B \cap \{x : p(x) = z\}), \tag{5}$$

где $L^{m-k}(\cdot)$ — $(m-k)$-мерная мера Лебега. Это следующим образом вытекает из общей теории инвариантных мер.

Конечность для любого компактного $K \subset X'$ величин $MN_y(p, z, K)$ при фиксированных $p \in O^*(m, k)$ и $z \in \mathbb{R}^k$ означает, что $MN_y(p, z, \cdot)$ является так называемой борелевской мерой на $(m-k)$-мерной гиперплоскости $\{x : p(x) = z\}$ [8, § 52]. В силу нашего предположения эта мера инвариантна относительно сдвигов, а потому [8, § 64, теорема 8] регулярна, т. е. $MN_y(p, z, \cdot)$ является мерой Хаара на $\{x : p(x) = z\}$. Осталось применить теорему единственности с точностью до постоянного множителя меры Хаара на локально компактном хаусдорфовом пространстве [8, § 60, теорема 3].

Из (5) и теорем об измеримости [1] следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^k} MN_y(p, z, B)\, dz = N_y(p) \int_{\mathbb{R}^k} L^{m-k}(B \cap \{x : p(x) = z\})\, dz = N_y(p)\, L^m(B),$$

так как $B \cap \{x : p(x) = z\}$ есть сечение σ-компактного $B \subset \mathbb{R}^m$ гиперплоскостью размерности $m-k$, ортогональной k-мерному подпространству $L_k = (\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ и проходящей через единственное $x \in L_k$, для которого $p(x) = z$. При различных $z \in R^k$ множества $\{x : p(x) = z\}$ представляют собой всевозможные параллельные гиперплоскости соответствующего направления.

Отсюда и из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\xi : X \times \Omega \to Y$ — п. н. непрерывная на $X \subset \mathbb{R}^m$ случайная функция, для которой при некоторых $k \geqslant 1$ и $y \in Y$ величина $MN_y(p, z, \cdot)$ инвариантна относительно сдвигов и конечна на компактах почти для всех $p \in O^*(m, k)$ и $z \in \mathbb{R}^k$. Тогда при этих k и y для любого σ-компактного $A \subset X$ и любого $t \geqslant 1$

$$M\,[S_y^k(A)]^t \geqslant \left[\frac{L^m(A)}{\beta_t(m, k)}\right]^t \int_{O^*(m,k)} [N_y(p)]^t\, dp. \tag{6}$$

При $t = 1$ равенство в (6) при некотором $A \subset X$ будет выполнено тогда (а в случае $S_y^k(A) < +\infty$ п. н. и только тогда), когда множество $\{x \in A : \xi(x, \omega) = y\}$ является п. н. счетно (S^k, k)-спрямляемым. При этом для любого борелевского $A' \subset A$

$$MS_y^k(A') = S_y^k L^m(A'),$$

где

$$S_y^k = \frac{1}{\beta_1(m, k)} \int_{O^*(m,k)} N_y(p)\, dp. \tag{7}$$

Замечания. 1. Дополнительные предположения об инвариантности распределения величины $S_y^k(A)$ ничего не добавляют к первому утверждению теоремы 2, так как $[S_y^k(A)]^t$ при $t > 1$ не является мерой.

2. Если $\mu(\cdot)$ — инвариантная относительно сдвигов мера на $\sigma(\mathbb{R}^m)$, то $\mu([0, 1]^m) = +\infty$ равносильно тому, что для любого $A \subset \mathbb{R}^m$

с непустой внутренностью $\mu(A) = +\infty$. Отсюда следует справедливость соотношений теоремы 2 без предположения конечности, но уже только для таких $A \subset \mathbb{R}^m$, для которых при почти всех p и z либо $A_0 \cap \{x : p(x) = z\} = \varnothing$, либо $\mathrm{int}_{p,z}(A \cap \{x : p(x) = z\}) \neq \varnothing$, где $\mathrm{int}_{p,z}$ — относительная внутренность на гиперплоскости $\{x : p(x) = z\}$. В частности, таковыми являются все открытые подмножества $A \subset \mathbb{R}^m$.

3. Если в условиях теоремы 2 кроме инвариантности относительно сдвигов предполагать и инвариантность относительно поворотов (т. е. однородность и изотропность), то величина $N_y(p)$ не будет зависеть от $p \in O^*(m, k)$, а (6), (7) примут соответственно следующий вид:

$$M[S_y^k(B)]^t \geqslant \left[\frac{N_y L^m(B)}{\beta_t(m, k)}\right]^t$$

и

$$S_y^k = \frac{1}{\beta_1(m, k)} N_y.$$

В силу соотношения между различными геометрическими мерами (см. неравенство (3) в [1]) все сказанное останется справедливым, если вместо сферической взять любую другую k-мерную меру $G^k(\cdot)$, для которой имеет место соответствующая измеримость функционала $G^k(x \in A : \xi(x, \omega) = y)$.

1. *Радченко А. Н.* Измеримость геометрической меры множества уровня случайной функции.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1984, вып. 31, с. 115—120. 2. *Радченко А. Н.* Математическое ожидание геометрической меры множества уровня случайной функции. Киев : Киев. ун-т, 1980. 27 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ № 4859-80 деп. 3. *Corrsin S.* A measure of the area of a homogeneous random surface in space.— Quart. Appl. Math., 1955, **12**, N 4, p. 404—408. 4. *Pawula R. F.* Comments on «Statistical properties of the contours of random surfaces».— IEEE Trans. Inform. Theory, 1963, **IT-9**, N 3, p. 208—209. 5. *Pawula R. F.* A proof of Corrsin's theorem, concerning stationary random surfaces.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1968, **IT-14**, N 5, p. 770—772. 6. *Switzer P.* Geometrical measure of smoothness of random functions.— J. Appl. Probab., 1976, **13**, N 1, p. 86—95. 7. *Радченко А. Н.* О геометрических мерах множества уровня случайного поля.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1981, вып. 25, с. 114—125. 8. *Халмош П.* Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 350 с.

Поступила в редколлегию 25.02.82

УДК 519.21

Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, д-р физ.-мат. наук, Г. ПЕЖИНЬСКА, асп.,
Киевский университет

О МАКСИМАЛЬНО СОВПАДАЮЩИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Пусть Y, B_Y — измеримое пространство, $L(P_1, P_2)$ — класс двумерных распределений P_{12} (случайных величин ξ_1 и ξ_2, определенных на одном вероятностном пространстве Ω, F, P со значениями в Y) с фиксированными одномерными проекциями $P_{12}(A, Y) = P_1(A)$, $P_{12}(Y, A) = P_2(A)$, $A \in B_Y$.