УДК 519.21

М. Е. ЗЮКОВ, асп.
Институт математики АН УССР

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ, ПОДЧИНЕННЫХ УСЛОВИЮ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ

1. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P^x) задан однородный сепарабельный, стохастически непрерывный случайный процесс с независимыми приращениями ξ_t, $t \geqslant 0$, у которого отсутствуют отрицательные скачки. Известно [1], что преобразование Лапласа этого процесса имеет вид

$$M^x \exp\{-\lambda\xi(t)\} = \exp\{t\psi(\lambda) - \lambda x\}.$$

Здесь $\psi(\lambda) = m\lambda + 0{,}5d^2\lambda^2 + \int\limits_0^\infty [(e^{-\lambda u} - 1 + \lambda u/(1+u^2))(1+u)^2/u^2]\, dN(u)$, где m, d^2 — коэффициенты сноса и диффузии винеровской составляющей процесса $\xi(t)$, а N — конечная мера на полупрямой $(0, \infty)$. Мы ограничимся тем случаем, когда кумулянта $\psi(\lambda)$ в правой окрестности нуля допускает разложение

$$\psi(\lambda) = -a\lambda + 0{,}5c\lambda^\alpha + o(\lambda^\alpha),\ 1 < \alpha \leqslant 2,\ a > 0,\ c \neq 0, \quad (1)$$

и не является убывающей функцией λ.

Пусть $\eta = \sup\{t : \inf\limits_{s \leqslant t} \xi(s) > 0\}$, а F — функция распределения η. Известно [1], что в нашем случае для любого $x > 0$ F — несобственная функция распределения с дефектом $0 < r < 1$.

Поскольку в наших условиях наблюдается снос процесса к $+\infty$, то естественно ожидать, что условие положительности не должно влиять на предельное поведение соответствующим образом нормированного процесса $\xi(t)$. Для случайных блужданий это явление было обнаружено в работе [2].

Введем следующие случайные функции: $X_{\alpha,n}(t) = \xi(nt)/(cn)^{1/\alpha}$, $Y_{\alpha,n}(t) = (\xi(nt) - ant)/(cn)^{1/\alpha}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n \geqslant 1$ со значениями в $D[0, 1]$ — пространстве действительных функций на $[0, 1]$, имеющих предел слева и непрерывных справа.

Если процесс $\xi(t)$ выходит из положительного состояния, то для $n \geqslant 1$ положим $A_n = \{\eta > n\}$ и обозначим $(A_n, A_n \cap F, P_n^x)$ след (Ω, F, P^x) на A_n, $P_n^x(B) = P^x(B/A_n)$, $B \in A_n \cap F$.

Пусть $Y_{\alpha,n}^+$ — сужение $Y_{\alpha,n}$ на A_n, а P_α — вероятностная мера на $D[0, 1]$, соответствующая устойчивому процессу без отрицательных скачков, выходящему из начала координат, с кумулянтой $0{,}5\lambda^\alpha$, $1<\alpha\leqslant 2$. Плотность распределения этого процесса обозначим через $p_\alpha(t, x)$, $0<t\leqslant 1$, $-\infty<x<\infty$.

Оказывается, что для любого $x>0$ последовательности вероятностных мер на $D[0, 1]$ $P_n^x(Y_{\alpha,n}^+)^{-1}$ и $P^xY_{\alpha,n}^{-1}$, порождаемых соответственно случайными функциями $Y_{\alpha,n}^+$ и $Y_{\alpha,n}$, слабо сходятся при $n\to\infty$ к одной и той же мере P_α.

2. Начнем с того, что докажем слабую сходимость вероятностных мер, соответствующих безусловным случайным функциям $Y_{\alpha,n}$.

Теорема 1. Если $\psi(\lambda)$ в правой окрестности нуля допускает разложение (1), то для любого x $P^xY_{\alpha,n}^{-1}\Rightarrow P_\alpha$ при $n\to\infty$.

Так как $Y_{\alpha,n}(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$ — однородный процесс с независимыми приращениями, то доказательство теоремы следует из теоремы 2.7 [3] и предельного соотношения

$$M^x\exp\{-\lambda Y_{\alpha,n}(t)\}=\exp\{\lambda atc^{-1/\alpha}n^{1-1/\alpha}\}M^x\exp\{-\lambda X_{\alpha,n}(t)\}=$$
$$=\exp\{nt\psi(\lambda/(cn)^{1/\alpha})+\lambda atc^{-1/\alpha}n^{1-1/\alpha}-$$
$$-\lambda x(cn)^{-1/\alpha}\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\exp\{0{,}5t\lambda^\alpha\},$$

которое имеет место для всех $0\leqslant t\leqslant 1$ ввиду (1).

Рассмотрим предельное поведение процесса $\xi(t)$, подчиненного условию положительности.

Лемма 1. В условиях теоремы 1 для всех $x>0$

$$\lim P^x\{\xi(t)\leqslant y(ct)^{1/\alpha}+at/\eta>t\}=G_\alpha(y),\quad -\infty<y<\infty,$$

где G_α, $1<\alpha\leqslant 2$ — функция распределения устойчивого закона с плотностью $p_\alpha(1,\cdot)$.

Доказательство. Считая $\xi(t)$ непрерывным слева и выполняя очевидные преобразования, находим

$$P^x\{\xi(t)\leqslant y(ct)^{1/\alpha}+at,\eta>t\}=P^x\{\xi(t)\leqslant y(ct)^{1/\alpha}+at\}-$$
$$-\int_0^t P\{\xi(t-u)\leqslant y(ct)^{1/\alpha}+at\}\,dF(u)=P^x\{\xi(t)\leqslant y(ct)^{1/\alpha}+$$
$$+at\}-G_\alpha(y)F(t^\rho)+\beta(t)-\gamma(t),\tag{2}$$

где $0<\rho<1/\alpha$, $\beta(t)=\int_0^{t^\rho}[G_\alpha(y)-P\{\xi(t-u)\leqslant y(ct)^{1/\alpha}+at\}]\,dF(u)$,

$$\gamma(t)=\int_{t^\rho}^t P\{\xi(t-u)\leqslant y(ct)^{1/\alpha}+at\}\,dF(u).$$

Так как разность двух первых выражений в правой части (2) сходится к $rG_\alpha(y)$ при $t\to\infty$, то для доказательства леммы достаточно показать, что разность двух последних выражений стремится к нулю. Очевидно, $\gamma(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Для того чтобы $\beta(t)\to 0$, достаточно, чтобы

$$\delta(t) = \sup_{0\leqslant u\leqslant t^\rho} |G_\alpha(y) - P\{\xi(t-u)\leqslant y(ct)^{1/\alpha}+at\}|$$

стремилось к нулю при $t\to\infty$. Для $\delta(t)$ имеем очевидную оценку

$$\delta(t)\leqslant \sup_{t-t^\rho\leqslant s\leqslant t} |G_\alpha(y) - P\{\xi(s)\leqslant y(cs)^{1/\alpha}+as\}| +$$

$$+ \sup_{t-t^\rho\leqslant s\leqslant t} |P\{\xi(s)\leqslant y(cs)^{1/\alpha}+as\} - P\{\xi(s)\leqslant y(ct)^{1/\alpha}+at\}|,$$

в которой первое слагаемое стремится к нулю в силу теоремы 1. Осталось показать, что и второе слагаемое в последней оценке для $\delta(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$. Пусть для определенности $y\geqslant 0$, тогда при $t-t^\rho\leqslant s\leqslant t$ $[y(ct)^{1/\alpha}+a(t-s)](cs)^{-1/\alpha}\leqslant (y+ac^{1/\alpha}t^{\rho-1/\alpha})(1-t^{\rho-1/\alpha})^{-1/\alpha}$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ в силу теоремы 1

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{t-t^\rho\leqslant s\leqslant t} P\{y(sc)^{1/\alpha}<\xi(s)-as\leqslant y(ct)^{1/\alpha}+a(t-s)\}\leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to\infty} P\{y(ct)^{1/\alpha}<\xi(t)-at\leqslant [y+\varepsilon](ct)^{1/\alpha}\} = G_\alpha(y+\varepsilon) - G_\alpha(y).$$

Так как G_α имеет плотность, то последняя разность может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно малого ε.

Аналогичные оценки имеют место и в случае $y<0$. Лемма доказана.

Обозначим $b_n(s) = a(s-1)c^{-1/\alpha}n^{1-1/\alpha}$.

Лемма 2. Для всех $0<t\leqslant s<1$, $-\infty<y_1z<\infty$

$$\lim_{n\to\infty} P^{z(cn)^{1/\alpha}}\{Y_{\alpha,n}(t)\leqslant y, \inf_{u\leqslant s} X_{\alpha,n}(u)>b_n(s)\} = \int_{-\infty}^{y-z} p_\alpha(t,x)\,dx; \quad (3)$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{z(cn)^{1/\alpha}}\{\inf_{n\leqslant s} X_{\alpha,n}(u)>b_n(s)\} = 1, \quad (4)$$

причем сходимость равномерна по z на компактных множествах.

Очевидна следующая оценка:

$$\left|P^{z(cn)^{1/\alpha}}\{Y_{\alpha,n}(t)\leqslant y, \inf_{u\leqslant s} X_{\alpha,n}(u)>b_n(s)\} - \int_{-\infty}^{y-z} p_\alpha(t,x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant \left|P^{z(cn)^{1/\alpha}}\{Y_{\alpha,n}(t)\leqslant y\} - \int_{-\infty}^{y-z} p_\alpha(t,x)\,dx\right| +$$

$$+ P^{z(cn)^{1/\alpha}} \{\inf_{u\leqslant s} X_{\alpha,n}(u) \leqslant b_n(s)\},$$

Так как

$$P^{z(cn)^{1/\alpha}} \{\inf_{u\leqslant s} X_{\alpha,n}(u) \leqslant b_n(s)\} = P\{\inf_{t\leqslant ns} \xi(t) \leqslant a(s-1)n -$$

$$- z(cn)^{1/\alpha}\} \leqslant P\{\inf_{t\geqslant 0} \xi(t) \leqslant a(s-1)n - z(cn)^{1/\alpha}\} \tag{5}$$

и $\inf\limits_{t\geqslant 0} \xi(t)$ при $a>0$ почти всюду конечная случайная величина, то для всех z из некоторого компакта K выбором достаточно большого n последнюю вероятность можно сделать сколь угодно малой. Теперь равномерная сходимость в (3) следует из равномерной сходимости на компактных множествах $P^{z(cn)^{1/\alpha}}\{Y_{\alpha,n}(t) \leqslant y\} \to \to \int\limits_{-\infty}^{y-z} p_\alpha(t,x)\,dx$, которую можно показать, используя теорему 1, аналогично тому, как это делалось в работе [4] для целочисленных случайных блужданий. Доказательство леммы для случая (4) содержится в оценке (5).

3. Здесь мы докажем слабую сходимость мер на $D[0, 1]$, соответствующих условным случайным функциям $Y^+_{\alpha,n}$, к мере P_α. Начнем с доказательства сходимости конечномерных распределений.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для любого $x>0$, $m\geqslant 1$, $-\infty<y_i<\infty$, $1\leqslant i\leqslant m$, $0<t_1<\ldots<t_m<1$

$$\lim_{n\to\infty} P_n^x\{Y^+_{\alpha,n}(t_i) \leqslant y_i,\ 1\leqslant i\leqslant m\} = P_\alpha\{x\in D : x(t_i)\leqslant y_i,$$

$$1 \leqslant i \leqslant m\}. \tag{6}$$

Доказательство проведем по индукции. Для $m=1$, $t=1$ доказательство теоремы следует из леммы 1, а для $0<t<1$

$$P_n^x\{Y^+_{\alpha,n}(t)\leqslant y\} = r_n^{-1}\int\limits_{-\infty}^{y} P^x\{Y_{\alpha,n}(t)\in dz,\ \inf_{s\leqslant t} X_{\alpha,n}(s) > 0\}\times$$

$$\times P^{z(cn)^{1/\alpha}}\{\inf_{s\leqslant 1-t} X_{\alpha,n}(s) > b_n(1-t)\} = (r_{nt}/r_n)\int\limits_{-\infty}^{y} P^x_{nt}\{Y^+_{\alpha,nt}(1)\in$$

$$\in dzt^{-1/\alpha}\}\, P^{z(cn)^{1/\alpha}}\{\inf_{s\leqslant 1-t} X_{\alpha,n}(s) > b_n(1-t)\},$$

где $r_t = 1-F(t)$, $t\geqslant 0$. По следствию из теоремы 5.5 [5] и леммам 1, 2 последний интеграл сходится к

$$t^{-1/\alpha}\int\limits_{-\infty}^{y} p_\alpha(1, zt^{-1/\alpha})\,dz = \int\limits_{-\infty}^{y} p_\alpha(t,z)\,dz.$$

Последнее равенство имеет место ввиду известного свойства плотностей устойчивого процесса [1].

Предположим, что (6) имеет место для $m = k$. Тогда, выполняя очевидные преобразования, находим

$$P_n^x\{Y_{\alpha,n}^+(t_i) \leqslant y_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k+1\} = r_n^{-1} \int_{-\infty}^{y_k} P^x\{Y_{\alpha,n}(t_i) \leqslant y_i,$$

$$1 \leqslant i \leqslant k-1,\ Y_{\alpha,n}(t_k) \in dz_k,\ \inf_{s \leqslant t_k} X_{\alpha,n}(s) > 0\} P^{z_k(cn)^{1/\alpha}}\{Y_{\alpha,n} \times$$

$$\times (t_{k+1} - t_k) \leqslant y_{k+1},\ \inf_{s \leqslant 1-t_k} X_{\alpha,n}(s) > b_n(1-t_k)\} =$$

$$= (r_{nt_k}/r_n) \int_{-\infty}^{y_k} P_{nt_k}^x\{Y_{\alpha,nt_k}^+(t_i/t_k) \leqslant y_i t_k^{-1/\alpha},\ 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$

$$Y_{\alpha,nt_k}^+(1) \in dz_k t_k^{-1/\alpha}\} P^{z_k(cn)^{1/\alpha}}\{Y_{\alpha,n}(t_{k+1} - t_k) \leqslant y_{k+1},$$

$$\inf_{s \leqslant 1-t_k} X_{\alpha,n}(s) > b_n(1-t_k)\}.$$

Рассуждая так же, как в случае $m = 1$, и применяя предположение индукции, видим, что последний интеграл сходится к

$$t_k^{-1/\alpha} \int_{-\infty}^{y_1 t_k^{-1/\alpha}} \cdots \int_{-\infty}^{y_{k-1} t_k^{-1/\alpha}} \int_{-\infty}^{y_k} \int_{-\infty}^{y_{k+1}} p_\alpha(t_1 t_k^{-1}, z_1) \ldots p_\alpha([t_{k-1} - t_{k-2}] t_k^{-1},$$

$$z_{k-1} - z_{k-2})\, p_\alpha([t_k - t_{k-1}] t_k^{-1},\ z_k t_k^{-1/\alpha} - z_{k-1})\, p_\alpha(t_{k+1} - t_k,$$

$$z_{k+1} - z_k)\, dz_1 \ldots dz_{k+1}.$$

Замена $x_1 = z_1 t_k^{1/\alpha}$, $x_i = (z_i - z_{i-1}) t_k^{1/\alpha}$, $2 \leqslant i \leqslant k-1$, $x_k = z_k t_k^{1/\alpha} - z_{k-1}$, $x_{k+1} = z_{k+1} - z_k$ приводит последний интеграл к виду

$$\int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_{k+1} - x_1 - \ldots - x_k} p_\alpha(t_1, x_1) \ldots p_\alpha(t_{k+1} - t_k, x_{k+1})\, dx_1, \ldots dx_{k+1} =$$

$$= P_\alpha\{x \in D : x(t_i) \leqslant y_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k+1\}.$$

Теорема доказана.

Для $\delta > 0$, следуя терминологии [5], определим модуль непрерывности для $x \in D[0, 1]$:

$$\Delta(\delta, x) = \sup_{t-\delta < t_1 \leqslant t \leqslant t_2 < t+\delta} \min\{|x(t - x(t_1)|;\ |x(t_2) - x(t)|\}.$$

Так как для всех ε, $\delta > 0$

$$P_n^x\{\Delta(\delta, Y_{\alpha,n}^+) > \varepsilon\} \leqslant r_n^{-1} P^x\{\Delta(\delta, Y_{\alpha,n}) \geqslant \varepsilon\}$$

и $\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P^x\{\Delta(\delta, Y_{\alpha,n}) \geqslant \varepsilon\} = 0$ в силу теоремы 1, то из теоремы 15.4 [5] и теоремы 2 следует, что справедлива теорема 3.

Теорема 3. Если $\psi(\lambda)$ в правой окрестности нуля допускает разложение (1), то для любого $x > 0$ $P_n^x(Y_{\alpha,n}^+)^{-1} \Rightarrow P_\alpha$ при $n \to \infty$.

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М., 1964. 2. *Iglehart D. L.* Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive.— Ann. Probab, 1974, 2, N 4. 3. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, вып. 2. 4. *Belkin B.* An ivariance principle for conditioned random walk attracted to stable law.— Z. Wahrsch. verw. Gebiete, 1972, 21, N 1. 5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

Поступила в редколлегию 23.12.79

M. E. Zyukov

LIMIT THEOREM FOR RANDOM PROCESSES WITH INDEPENDENT INCREMENTS CONDITIONED TO STAY POSITIVE

The process with stationary independent increments without negative jumps is considered. It is assumed that its cumulant in right neighbourhood of zero is represented as $\psi(\lambda) = a\lambda + 0{,}5\, c\lambda^\alpha + o(\lambda^\alpha)$, $1 < \alpha \leqslant 2$, $a > 0$, $c \neq 0$. It is shown that conditional (with the condition of positivity) and unconditional weak limits of this process are the same, namely, the stable process without negative jumps with the cumulant $0{,}5\lambda^\alpha$.

УДК 519.21

И. Ю. КАНИОВСКАЯ, асп.
Киевский университет

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ С НЕГЛАДКИМИ ФУНКЦИЯМИ РЕГРЕССИИ

Рассмотрим последовательность в R^N, заданную рекуррентно

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s + \beta_s u(s, x^s)\xi^s),\ s \geqslant 1,\ x^1 \in X,\ \mathbf{M}\|x^1\|^2 < \infty, \quad (1)$$

где $\pi_X(\cdot)$ — проектор на выпуклое замкнутое множество $X \subseteq R^N$, β_s — шаговый множитель, $u(s, x)$ — нормирующий множитель, $u(s, x) \geqslant u(r) > 0$ при $\|x\| \leqslant r$, ξ^s — случайное направление в R^N. Как неоднократно отмечалось [1—3], последовательностями (1) описываются разнообразные процессы автоматического регулирования, адаптации, рекуррентного оценивания, негладкой оптимизации. Будем предполагать, что $\forall s \geqslant 1$ $\xi^s = \xi(s, \beta_s, x^s)$, x^1 не зависит от $\xi(s, \cdot, \cdot)$, $s \geqslant 1$ и

$$\xi(s, \beta_s, x) = c_s f_s(x) + \alpha(\beta_s) w(s, \beta_s, x) + \psi(\beta_s) z(s, \beta_s, x), \quad (2)$$

где $\{c_s\}$ — последовательность неотрицательных чисел, $\alpha(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ — неотрицательные числовые функции, $\{f_s(\cdot)\}$, $\{w(s., \cdot, \cdot)\}$ — последовательности неслучайных вектор-функций, $\{z(s, \cdot, \cdot)\}$ — последовательность независимых случайных векторов с нулевым средним.