E. I. Ostrovsky

THE CHARACTERIZATION OF THE PROBABILITY MEASURES ON THE BANACH SPACE BY TWO-DIMENSIONAL CYLINDRICAL DISTRIBUTION

Let B be separable Banach space and ξ—weak probability measure on the B. The conditions on the two-dimensional distribution of ξ under which $P(\xi \in B) = 1$ are investigated.

УДК 519.21

А. И. ПОНОМАРЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СКОЛЬЗЯЩЕГО СУММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Условия представления одномерного обычного (необобщенного) однородного случайного поля на произвольной локально компактной абелевой группе G в виде скользящего суммирования были установлены в работе [1]. Несколько позднее, другими методами подобные условия были получены для дискретной группы G [2] и произвольной группы G [3]. В настоящей статье рассматриваются условия представимости в виде скользящего суммирования для обобщенных одномерных и многомерных однородных полей на G. В частности, такие условия приводятся и для многомерных обычных однородных полей на G (отметим, что эти условия для случая многомерного поля на дискретной группе G указывались в работе [4]).

Рассмотрим сначала одномерное обобщенное однородное в широком смысле случайное поле $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D(G)$ на группе G [1]. Ковариационное ядро $B(\varphi, \psi)$, $\varphi, \psi \in D(G)$ такого поля $\xi(\varphi)$ допускает спектральное представление

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\hat{G}} \varphi^{\wedge}(\chi)\, \overline{\psi^{\wedge}(\chi)}\, F(d\chi),$$

где $\hat{G}$ — группа характеров группы G, $\varphi^{\wedge}$ — преобразование Фурье основной функции $\varphi \in D(G)$, а F — положительная борелевская мера на $\hat{G}$ (спектральная мера поля ξ) такая, что ковариационную функцию $T(\varphi)$, $\varphi \in D(G)$ поля $\xi(\varphi)$ (напомним, что $B(\varphi, \psi) = T(\psi^0 * \varphi)$) можно единственным образом продолжить до медленно растущей обобщенной функции $\tilde{T}(\varphi)$, $\varphi \in S(G)$ (здесь $S(G)$ — основное пространство быстро убывающих функций на G).

Представлением скользящего суммирования (или среднего) поля $\xi(\varphi)$ будем называть представление $\xi(\varphi)$ стохастическим интегралом

$$\xi(\varphi) = \int_G C * \varphi(g)\, W(dg), \quad \varphi \in D(G), \tag{1}$$

где W — ортогональная случайная мера на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ борелевских множеств группы G, подчиненная мере Хаара μ на G,

$$MW(\Delta)\overline{W(\Delta')} = \mu(\Delta \cap \Delta'),\ \Delta,\ \Delta' \in \mathfrak{B},$$

а C — обобщенная случайная функция из $D'(G)$, которую можно продолжить до медленно растущей обобщенной функции из $S'(G)$ и для которой свертка $C*\varphi$ принадлежит пространству $L_2(G, \mu)$ при всех $\varphi \in D(G)$. Отметим, что в регулярном случае, т. е. когда поле $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D(G)$ порождается обычным однородным полем $\tilde{\xi}(g)$, $g \in G$,

$$\xi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\tilde{\xi}(g)\mu(dg),$$

равенство (1) означает, что поле $\tilde{\xi}(g)$ представимо в виде

$$\tilde{\xi}(g) = \int_G \tilde{c}(gs^{-1})W(ds),$$

где функция $\tilde{c} \in L_2(G, \mu)$ и

$$C(\varphi) = \int_G \tilde{c}(g^{-1})\varphi(g)\mu(dg).$$

Теорема 1. Поле $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D(G)$ допускает представление скользящего суммирования тогда и только тогда, когда его спектральная мера F абсолютно непрерывна относительно меры Хаара $\hat{\mu}$ на $\hat{G}$, т. е. когда $\xi(\varphi)$ имеет спектральную плотность $f(\chi)$ относительно $\hat{\mu}$.

Доказательство. Пусть поле $\xi(\varphi)$ имеет спектральную плотность $f(\chi)$, $\chi \in \hat{G}$ и функция $\gamma(\chi)$ удовлетворяет соотношению

$$|\gamma(\chi)|^2 = f(\chi) \tag{2}$$

$\hat{\mu}$-почти всюду ($\hat{\mu}$-п. в.) (существование $\gamma(\chi)$ следует из того, что $f(\chi) \geqslant 0$ $\hat{\mu}$-п. в). Очевидно, что γ определяется с точностью до множителя, равного по модулю единице, и $\hat{\varphi}(\chi)\gamma(\chi) \in L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Обозначим через Φ оператор Фурье—Планшереля на $L_2(G, \mu)$,

$$(\Phi u)(\chi) = \int_G \chi(g)u(g)\mu(dg),\ u \in L_2(G, \mu),$$

а через Φ^{-1} — обратный ему оператор на $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$,

$$(\Phi^{-1}v)(g) = \int_{\hat{G}} \overline{\chi(g)}v(\chi)\hat{\mu}(d\chi),\ v \in L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$$

(при этом считается, что мера $\hat{\mu}$ соответствующим образом нормирована). Введем обобщенную функцию $C \in D'(G)$ с помощью соотношения $C*\varphi(g) = \Phi^{-1}\varphi\hat{}\gamma$. Тогда $C*\varphi(g) \in L_2(G, \mu)$ и в силу обобщенной теоремы Планшереля [5, с. 168] имеет место равенство

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\hat{G}} [\varphi\hat{}(\chi)\gamma(\chi)]\,[\overline{\psi\hat{}(\chi)\gamma(\chi)}]\,\hat{\mu}(d\chi) =$$

$$= \int_{G} [C*\varphi(g)]\,[\overline{C*\psi(g)}]\,\mu(dg). \qquad (3)$$

Из этого равенства и приведенного выше утверждения о спектральном представлении $B(\varphi, \psi)$ следует, что функцию $C \in D'(G)$ можно продолжить до функции $\tilde{C} \in S'(G)$. Применяя к представлению (3) ковариационного ядра поля $\xi(\varphi)$ теорему Карунена, получаем представление поля $\xi(\varphi)$ в виде скользящего суммирования (1). Существование у поля $\xi(\varphi)$, допускающего представление скользящего суммирования, спектральной плотности вида (2) легко установить, проводя указанные выше рассуждения в обратной последовательности. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь n-мерное обобщенное однородное случайное поле $\xi(\varphi) = \{\xi_k(\varphi)\}_{k=\overline{1,n}}$, $n > 1$ со случайной спектральной мерой $Z = \{Z_k\}_{k=\overline{1,n}}$ и неслучайной спектральной мерой $F = \{F_{kl}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$ [1]. Будем говорить, что поле $\xi(\varphi) = \{\xi_k(\varphi)\}_{k=\overline{1,n}}$, рассматриваемое как вектор-столбец, допускает представление скользящего суммирования, если существуют такие векторная случайная мера $W = \{W_l\}_{l=\overline{1,m}}$ на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, удовлетворяющая условию $\mathbf{M}W(\Delta) \times W^*(\Delta') = \{\mathbf{M}W_i(\Delta)\overline{W_j(\Delta')}\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,m}} = \mu(\Delta \cap \Delta')\,E_m$ (E_m — единичная матрица порядка m), и матричная обобщенная функция $C = \{C_{kl}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}}$, $C_{kl} \in D'(G)$, элементы которой можно продолжить до обобщенных функций медленного роста на G, и для которой $C_{kl}*\varphi(g) \in L_2(G, \mu)$ при всех $\varphi \in D(G)$, что

$$\xi(\varphi) = \int_{G} C*\varphi(g)\,W(dg). \qquad (4)$$

Поле $\xi(\varphi) = \{\xi_k(\varphi)\}_{k=\overline{1,n}}$ имеет ранг m, если у него существует спектральная плотность $f(\chi) = \{f_{ki}(\chi)\}_{k=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$ относительно $\hat{\mu}$ и матрица $f(\chi)$ $\hat{\mu}$-почти всюду имеет один и тот же ранг m.

Следующее предложение обобщает теорему 9.1 гл. 1 [6], относящуюся к многомерным обычным стационарным случайным процессам.

Теорема 2. Обобщенное поле $\xi(\varphi) = \{\xi_k(\varphi)\}_{k=\overline{1,n}}$ допускает представление скользящего суммирования (4) тогда и только тогда, когда оно имеет ранг m.

Доказательство. Пусть поле $\xi(\varphi)$ имеет m. Тогда, как и в случае стационарных процессов [6], существуют такие матричные функции $\gamma(\chi)=\{\gamma_{ki}(\chi)\}_{k=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ и $\zeta(\chi)=\{\zeta_{ik}(\chi)\}_{i=\overline{1,m}}^{k=\overline{1,n}}$ на $\widehat{G}$, что $\widehat{\mu}$-почти всюду

$$f(\chi)=\gamma(\chi)\gamma^*(\chi),\ \zeta(\chi)\gamma(\chi)=E_m. \tag{5}$$

Отсюда

$$\zeta(\chi)f(\chi)\zeta^*(\chi)=E_m\ \widehat{\mu}\text{-п. в.} \tag{6}$$

Из соотношения (6) следует, что для любого борелевского множества Δ из $\widehat{G}$ с компактным замыканием существует интеграл

$$\Pi(\Delta)=\int_{\Delta}\zeta(\chi)Z(d\chi). \tag{7}$$

Интеграл (7) определяет векторную случайную меру $\Pi=\{\Pi_i\}_{i=\overline{1,m}}$ компоненты которой ортогональны между собой и подчинены мере $\widehat{\mu}$:

$$\mathbf{M}\Pi(\Delta)\Pi^*(\Delta')=\widehat{\mu}(\Delta\cap\Delta')E_m. \tag{8}$$

Определим теперь векторную случайную меру $W=\{W_i\}_{i=\overline{1,m}}$ на борелевских множествах $\Delta\in\mathfrak{B}$ с компактными замыканиями с помощью равенства

$$W(\Delta)=\int_{\widehat{G}}I_{\widehat{\Delta}}(\chi)\Pi(d\chi), \tag{9}$$

где $I_{\widehat{\Delta}}(\chi)$ — преобразование Фурье индикатора $I_\Delta(g)$ множества Δ,

$$I_{\widehat{\Delta}}(\chi)=\int_{\Delta}\chi(g)\mu(dg).$$

Используя (8), легко установить, что

$$\mathbf{M}W(\Delta)W^*(\Delta')=\left(\int_{\widehat{G}}I_{\widehat{\Delta}}(\chi)\overline{I_{\widehat{\Delta'}}(\chi)}\,\widehat{\mu}(d\chi)\right)E_m. \tag{10}$$

Учитывая, что $I_\Delta(g)\in L_2(G,\mu)$, и применяя к интегралу в равенстве (10) обобщенную теорему Планшереля, получаем

$$\mathbf{M}W(\Delta)W^*(\Delta')=\mu(\Delta\cap\Delta')E_m. \tag{11}$$

Меры W и Π можно продолжить на все измеримые относительно меры Хаара множества из G и $\widehat{G}$ соответственно.

Лемма. Для любой функции $u(g)\in L_2(G,\mu)$ имеет место равенство

$$\int_G u(g)W(dg)=\int_{\widehat{G}}(\Phi u)(\chi)\Pi(d\chi). \tag{12}$$

Для доказательства леммы заметим, что равенство (9) можно переписать в виде

$$\int_G I_\Delta(g)\,W(dg) = \int_{\widehat G} I_\Delta^{\wedge}(\chi)\,\Pi(d\chi).$$

Очевидно, что последнее равенство сохраняется и в том случае, если заменить $I_\Delta(g)$ любой простой функцией из $L_2(G, \mu)$. Отсюда, учитывая, что простые функции всюду плотны в $L_2(G, \mu)$, и используя предельный переход, а также свойство изометричности оператора Φ, получаем (12).

В частности, полагая $u(g) = (\Phi^{-1}I_V)(g)$, где V — борелевское множество в $\widehat G$ с компактным замыканием, получаем

$$\Pi(V) = \int_G (\Phi^{-1}I_V)(g)\,W(dg). \tag{13}$$

Меру W естественно называть преобразованием Фурье меры Π. Равенство (13) показывает, что случайная мера Π получается из меры W с помощью обратного преобразования Фурье.

Введем обобщенные функции $C_{kl} \in D'(G)$, $k=\overline{1,n}$, $l=\overline{1,m}$ с помощью равенств $C_{kl}*\varphi(g) = (\Phi^{-1}\varphi^{\wedge}\gamma_{kl})(g)$, $\varphi \in D(G)$, $k=\overline{1,n}$, $l=\overline{1,m}$ и матричную обобщенную функцию $C = \{C_{kl}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}}$. В силу соотношений (5) поле $\xi(\varphi)$ можно представить в виде стохастического интеграла

$$\xi(\varphi) = \int_{\widehat G} \varphi^{\wedge}(\chi)\,\gamma(\chi)\,\Pi(d\chi). \tag{14}$$

Действительно, из (5) следует, что

$$(\gamma\zeta - E_n)\,f\,(\zeta^*\gamma^* - E_n) = 0 \quad \hat\mu\text{-п. в.},$$

и поэтому

$$\xi(\varphi) = \int_{\widehat G} \varphi^{\wedge}(\chi)\,Z(d\chi) = \int_{\widehat G} \varphi^{\wedge}(\chi)\,\gamma(\chi)\,\zeta(\chi)\,Z(d\chi) = \int_{\widehat G} \varphi^{\wedge}(\chi)\,\gamma(\chi)\,\Pi(d\chi).$$

Используя (14) и лемму, получаем

$$\xi(\varphi) = \int_{\widehat G} \varphi^{\wedge}(\chi)\,\gamma(\chi)\,\Pi(d\chi) = \int_{\widehat G} \Phi(C*\varphi)(\chi)\,\Pi(d\chi) =$$

$$= \int_G C*\varphi(g)\,W(dg),$$

т. е. поле $\xi(\varphi)$ допускает представление скользящего суммирования.

Пусть теперь поле $\xi(\varphi) = \{\xi_k(\varphi)\}_{k=\overline{1,n}}$ допускает представление скользящего суммирования. Тогда его ковариационное ядро $B(\varphi, \psi) =$

$=\{\mathbf{M}\xi_k(\varphi)\overline{\xi_i(\psi)}\}_{k=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$ представимо в виде

$$B(\varphi, \psi) = \int_G (C*\varphi)(g)\overline{(C*\psi)(g)}\,\mu(dg).$$

Отсюда по обобщенной теореме Планшереля

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\hat{G}} \varphi^{\wedge}(\chi)\overline{\psi^{\wedge}(\chi)}\,\gamma(\chi)\gamma^*(\chi)\,\hat{\mu}(d\chi),$$

где $\varphi^{\wedge}(\chi)\gamma(\chi) = (\Phi(C*\varphi))(\chi)$, т. е. поле $\xi(\varphi)$ имеет спектральную плотность $f(\chi) = \gamma(\chi)\gamma^*(\chi)$. Как и в случае стационарных процессов, можно установить, что $\xi(\varphi)$ почти всюду имеет ранг m. Теорема доказана.

Следствие. Многомерное обычное однородное случайное поле $\xi(g) = \{\xi_k(g)\}_{k=\overline{1,n}}$, $n > 1$ допускает представление скользящего суммирования

$$\xi(g) = \int_G c(gs^{-1})\,W(ds),$$

где $c(g) = \{c_{ki}(g)\}_{k=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ — матричная функция, элементы которой принадлежат $L_2(G, \mu)$, и $W = \{W_i\}_{i=\overline{1,m}}$ — векторная случайная мера на $\mathfrak{B}$, для которой $\mathbf{M}W(\Delta)W^*(\Delta') = \mu(\Delta \cap \Delta')E_m$, тогда и только тогда, когда $\xi(g)$ имеет ранг m.

Замечание. Для применения метода доказательства прямой части теоремы 2 к одномерному полю $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D(G)$ необходимо, чтобы спектральная плотность $f(x)$ поля $\xi(\varphi)$ удовлетворяла условию $f(\chi) > 0$ $\hat{\mu}$-п. в. Однако это доказательство можно легко модифицировать так, чтобы избежать дополнительного требования к спектральной плотности. Для этого меру Π надо вводить с помощью соотношения

$$\Pi(\Delta) = \int_{\Delta \setminus A} (1/f(\chi))\,Z(d\chi) + Y(\Delta \cap A),$$

где $A = \{\chi \in \hat{G} : f(\chi) = 0\}$ и Y — ортогональная мере Z случайная мера, подчиненная мере $\hat{\mu}$. Отметим еще, что при выполнении условия $f(\chi) > 0$ $\hat{\mu}$-п. в. из сказанного выше следует, что меру W, фигурирующую в представлении скользящего суммирования однородного одномерного поля $\xi(\varphi)$, можно выбрать так, чтобы ее значения принадлежали пространству значений поля $\xi(\varphi)$.

1. *Пономаренко А. И.* Гармонический анализ обобщенных однородных в широком смысле случайных полей на коммутативной локально компактной группе.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1970, вып. 3. 2. *Bruckner L. A.* Moving averages of homogeneous random fields.— Ann. Math. Statist., 1971, **42**, N 6. 3. *Blum J.*, *Eisenberg B.* A note on random measures and moving averages on non-discrete groups.— Ann. Probab., 1973, N 2. 4. *Пономаренко А. И.* Об интерпо-

ляции многомерного однородного случайного поля на дискретной группе.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1974, вып. 10. 5. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. М., 1960. 6. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. М., 1963.

Поступила в редколлегию 21.12.79

A. I. Ponomarenko

MOVING AVERAGES REPRESENTATIONS FOR GENERALIZED HOMOGENEOUS RANDOM FIELDS ON LOCALLY COMPACT ABELIAN GROUPS

The conditions of the representations of moving averages for one-dimensional and multivariate generalized homogeneous random fields on locally compact abelian groups are considered.

УДК 519.21

Г. М. РАХИМОВ, канд. физ.-мат. наук
Ташкентский университет

ОБ ОЦЕНКЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ НА СФЕРЕ. I

В настоящей работе изучаются статистические оценки спектральных характеристик и корреляционной функции стационарного по времени, однородного и изотропного по пространству случайного поля на сфере в n-мерном евклидовом пространстве.

Пусть $\xi(P, t)$ — действительное непрерывное в среднем квадратическом случайное поле на $S_n \times R$, где S_n — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$ и R — числовая ось; $M\xi^2(P, t) < +\infty$. Предположим, что случайное поле $\xi(P, t)$ стационарно по времени, однородно и изотропно по пространственной переменной, т. е. $M\xi(P, t)$ постоянно относительно P, t (в дальнейшем будем считать, что $M\xi(P, t) = 0$) и $M\xi(P_1, t+s) \times \xi(P_2, s) = \mathbf{R}(\theta, t)$, где θ — угловое расстояние между P_1 и P_2.

Известно [1], что $\xi(P, t)$ допускает представление

$$\xi(P, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \xi_m^l(t) S_m^l(P),$$

где $S_m^l(P)$ — ортонормированные сферические гармоники степени m, $h(m, n) = (2m + n - 2)\frac{(m + n - 3)!}{(n - 2)!\, m!}$ — число линейно независимых сферических гармоник степени m,

$$M\xi_m^l(t)\, \xi_{m_1}^{l_1}(s) = \delta_m^{m_1}\delta_l^{l_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} dF_m(\lambda),$$

а $\{F_m(\lambda),\ m \geqslant 0\}$ — последовательность действительных неубывающих функций таких, что $\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) F_m(+\infty) < +\infty$. Корреляци-