Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 40–48

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 40–48

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ НЕАВТОНОМНОГО СТОХАСТИЧНОГО ЛОГІСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

О. Д. БОРИСЕНКО, Д. О. БОРИСЕНКО

Анотація. Досліджується неавтономне логістичне диференціальне рівняння зі збуренням коефіцієнтів білим шумом та центрованим і нецентрованим пуассонівськими шумами. Доведено існування єдиного глобального невід'ємного розв'язку. Одержано достатні умови вимирання популяції майже напевно, невиживання популяції у середньому майже напевно та слабкого виживання популяції майже напевно.

Ключові слова і фрази. Стохастичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння, центрований і нецентрований пуассонівські шуми, вимирання, невиживання у середньому, слабке виживання.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10; Secondary 60J75, 60G51, 92D25.

1. Вступ

Побудова логістичної моделі та її властивості представлено у роботі [1]. Класичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння має вигляд

$$dN(t) = N(t)(a(t) - b(t)N(t))dt,\ N(0) = N_0 > 0, \tag{1}$$

і моделює розмір N популяції, члени якої конкурують один з одним за обмежену кількість їжі та обмежений життєвий простір. Тут $a(t)$ — інтенсивність росту популяції; $a(t)/b(t)$ — ємність середовища у момент часу t. Результати досліджень детермінованої моделі (1) та її узагальнень представлено у роботі [2]. У [3] вивчалось, зокрема, стохастичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння вигляду

$$dN(t) = N(t)[(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)N(t)dw(t)], \quad N(0) = N_0, \tag{2}$$

де $w(t)$ — стандартний одновимірний вінерів процес. Оскільки модель (2) описує динаміку популяції, то важливим питанням є визначення умов, при яких популяція вимирає й умов, при яких виживає. У [3] одержано поріг виживання / вимирання популяції у моделі (2). У роботах [4, 5] вивчалися стохастичні логістичні диференціальні рівняння, які були одержані із класичного логістичного рівняння випадковим збуренням інтенсивності росту популяції білим шумом та центрованим пуассонівським шумом. У роботі [6] розглядалось стохастичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння вигляду

$$dN(t) = N(t)\Bigg[(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)dw(t) + \\ + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t,z)\tilde{\nu}_1(dt,dz) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t,z)\nu_2(dt,dz)\Bigg], \quad N(0) = N_0, \tag{3}$$

де $w(t)$ — стандартний одновимірний вінерів процес; $\tilde{\nu}_1(t,A) = \nu_1(t,A) - t\Pi_1(A)$, $\nu_1(t,A)$ і $\nu_2(t,A)$ — незалежні міри Пуассона, які є незалежними від $w(t)$; $N_0 > 0$, $E[\nu_i(t,A)] = t\Pi_i(A), i = 1,2$, $\Pi_i(A), i = 1,2,$ — скінченні міри на борелевих множинах A у $\mathbb{R}$.

Коефіцієнти рівняння (3) не задовольняють умову лінійної обмеженості, але задовольняють локальну умову Ліпшиця, тому (див. [7, теорема 6, с. 246]) існує локальний розв'язок рівняння (3). У [6] одержано явний вигляд глобального розв'язку рівняння (3) і достатні умови його стохастичної перманентності. У роботі [8] для рівняння (3) одержано достатні умови вимирання популяції майже напевно, невиживання популяції у середньому майже напевно, слабкого та сильного виживання популяції у середньому майже напевно.

Ми будемо вивчати асимптотичну поведінку розв'язку стохастичного диференціального рівняння вигляду

$$dN(t) = N(t)\bigg[(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)N(t)dw(t) + \\ + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t,z)N(t)\tilde{\nu}_1(dt,dz) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t,z)N(t)\nu_2(dt,dz)\bigg], \quad N(0) = N_0. \quad (4)$$

Як відомо авторам, питання виживання і невиживання у моделі популяційної динаміки, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням вигляду (4), ще не досліджувались. Тому таке дослідження є актуальним.

У цій роботі одержано достатні умови вимирання популяції, невиживання популяції в середньому і слабкого виживання. У другому розділі наведено допоміжні результати, зокрема, доведено існування невід'ємного глобального розв'язку рівняння (4). У третьому розділі доведено достатні умови вимирання, невиживання в середньому та слабкого виживання популяції, динаміка якої описується рівнянням (4).

2. Допоміжні результати

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — ймовірнісний простір і $w(t), t \geq 0$ — стандартний одновимірний вінерів процес на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$; $N_0 > 0$ — невипадкова початкова умова, $\nu_1(t, A)$ і $\nu_2(t, A)$ — незалежні міри Пуассона, визначені на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, які не залежать від $w(t)$; $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A), i = 1, 2$; $\Pi_i(A), i = 1, 2$ — скінченні міри на борелевих множинах A в $\mathbb{R}$. На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ задано потік σ-алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s), \nu_i(s, A), i = 1, 2, s \leq t\}$, який задовольняє звичні умови, а саме цей потік неперервний справа, зростаючий і $\mathcal{F}_0$ містить усі P-нуль події.

У цій статті ми використали ідеї і позначення з роботи [3]. Наведемо деякі означення, які потрібні у подальшому.

Означення 2.1. Популяція вимирає (extinction), якщо $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$ майже напевно (м. н.), де $N(t)$ — це розв'язок рівняння (4).

Означення 2.2. Популяція не виживає в середньому (non-persistence in the mean), якщо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(s)\,ds = 0 \quad \text{м. н.}$$

Означення 2.3. Популяція слабко виживає (weak persistence), якщо

$$\limsup_{t\to\infty} N(t) > 0 \quad \text{м. н.}$$

Будемо використовувати такі позначення:

$$\overline{f}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds, \quad f^* = \limsup_{t\to\infty} f(t).$$

Для неперервної, обмеженої функції $f(t)$, $t \in [0, +\infty)$, введемо позначення

$$f_{\sup} = \sup_{t\in[0,+\infty)} f(t), \qquad f_{\inf} = \inf_{t\in[0,+\infty)} f(t).$$

Надалі ми будемо використовувати таку умову на коефіцієнти рівняння (4):

(А). Коефіцієнти $a(t), b(t), \alpha(t)$ — це обмежені, неперервні функції, визначені на $[0, +\infty)$ і $b_{\inf} > 0$. Коефіцієнти $\gamma_i(t,z), i = 1, 2,$ — це обмежені, неперервні по t функції, й $\inf \gamma_1(t,z) > 0$, $\gamma_2(t,z) \geq 0$ і $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$.

Лема 2.1. *Для довільного невипадкового початкового значення $N(0) = N_0 > 0$ при виконанні умови (А) існує единий розв'язок $N(t)$ рівняння (4), який є глобальним і $\mathsf{P}\{N(t) \geq 0\} = 1$.*

Доведення. Коефіцієнти рівняння (4) не задовольняють умову лінійної обмеженості, але задовольняють локальну умову Ліпшиця. Тому (див. [7, теорема 6, с. 246]) для довільного невипадкового початкового значення $N_0 > 0$ існує єдиний локальний розв'язок $N(t), t \in [0, \tau_e)$, рівняння (4), де τ_e — це момент вибуху: $\sup_{t<\tau_e} |N(t)| = +\infty$. Покажемо, що $\tau_e = \infty$ м. н. Виберемо достатньо велике $n_0 \in \mathbb{N}$, так щоб $N_0 \in [1/n_0, n_0]$. Для кожного $n > n_0$ визначимо момент зупинки $\tau_n = \inf\{t \in [0, \tau_e] :\ N(t) \notin (1/n, n)\}$. Очевидно, що τ_n зростає при $n \to \infty$. Нехай $\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n$, тоді $\tau_\infty \leq \tau_e$ м. н. Достатньо показати, що $\mathsf{P}\{\tau_\infty = \infty\} = 1$. Проведемо доведення від супротивного. Якщо $\tau_\infty < \infty$ м. н., тоді існують такі $T > 0$ і $\varepsilon \in (0, 1)$, що $\mathsf{P}\{\tau_\infty < T\} > \varepsilon$. Тому існує $n_1 \geq n_0$ таке, що $\mathsf{P}\{\tau_n < T\} > \varepsilon$, $\forall n > n_1$. Розглянемо невід'ємну функцію $V(x) = \sqrt{x} - 1 - \ln\sqrt{x}, x > 0$. Застосуємо формулу Іто до процесу $V(N(t))$ й одержимо

$$\begin{aligned}
V(N(T\wedge\tau_n)) &= V(N_0) + \int_0^{T\wedge\tau_n} \bigg\{ -\frac{1}{8}\alpha^2(s)N^{5/2}(s) + \frac{1}{4}\alpha^2(s)N^2(s) - \frac{1}{2}b(s)N^{3/2}(s) + \\
&+ \frac{1}{2}b(s)N(s) + \frac{1}{2}a(s)N^{1/2}(s) - \frac{1}{2}a(s) + \int_{\mathbb{R}} \Big[N^{1/2}(s)\Big(\sqrt{1+N(s)\gamma_1(s,z)} - 1\Big) - \\
&- \ln\sqrt{1+N(s)\gamma_1(s,z)} - \frac{1}{2}N(s)\gamma_1(s,z)\Big(N^{1/2}(s) - 1\Big)\Big]\bigg\} ds + \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{T\wedge\tau_n} \alpha(s)N(s)\Big(N^{1/2}(s) - 1\Big) dw(s) + \\
&+ \int_0^{T\wedge\tau_n}\int_{\mathbb{R}} \Big[N^{1/2}(s)\Big(\sqrt{1+N(s)\gamma_1(s,z)} - 1\Big) - \ln\sqrt{1+N(s)\gamma_1(s,z)}\Big] \tilde{\nu}_1(ds,dz) + \\
&+ \int_0^{T\wedge\tau_n}\int_{\mathbb{R}} \Big[N^{1/2}(s)\Big(\sqrt{1+N(s)\gamma_2(s,z)} - 1\Big) - \ln\sqrt{1+N(s)\gamma_2(s,z)}\Big] \nu_2(ds,dz).
\end{aligned} \tag{5}$$

Зауважимо, що при $s \in [0, T\wedge\tau_n]$ маємо

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{8}\alpha^2(s)N^{5/2}(s) + \frac{1}{4}\alpha^2(s)N^2(s) - \frac{1}{2}b(s)N^{3/2}(s) + \frac{1}{2}b(s)N(s) + \\
&+ \frac{1}{2}a(s)N^{1/2}(s) - \frac{1}{2}a(s) \leq -\frac{1}{4}\alpha^2(s)N^2(s)\Big(\frac{1}{2}N^{1/2}(s) - 1\Big) - \frac{1}{2}b_{\inf}N^{3/2}(s) + \\
&+ \frac{1}{2}b_{\sup}N(s) + \frac{1}{2}|a|_{\sup}\Big(N^{1/2}(s) + 1\Big) \leq K_1,
\end{aligned} \tag{6}$$

де константа $K_1 > 0$ не залежить від s і $N(s)$. Ця оцінка випливає з умов на коефіцієнти рівняння (4) й обмеженості зверху функції

$$\phi(s,x) = -\frac{1}{4}\alpha^2(s)x^2\Big(\frac{1}{2}x^{1/2} - 1\Big) - \frac{1}{2}b_{\inf}x^{3/2} + \frac{1}{2}b_{\sup}x + \frac{1}{2}|a|_{\sup}\Big(x^{1/2} + 1\Big).$$

Із (5) і (6) маємо

$$V(N(T\wedge\tau_n)) \leq V(N_0) + K_1(T\wedge\tau_n) + \frac{1}{2}\int_0^{T\wedge\tau_n} \alpha(s)N(s)\Big(N^{1/2}(s) - 1\Big) dw(s) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^{T\wedge\tau_n}\int_{\mathbb{R}}\Big[N^{1/2}(s)\Big(\sqrt{1+N(s)\gamma_i(s,z)}-1\Big)-\ln\sqrt{1+N(s)\gamma_i(s,z)}\Big]\Pi_i(dz)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^{T\wedge\tau_n}\int_{\mathbb{R}}N(s)\gamma_1(s,z)\Big(N^{1/2}(s)-1\Big)\Pi_1(dz)ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^{T\wedge\tau_n}\int_{\mathbb{R}}\Big[N^{1/2}(s)\Big(\sqrt{1+N(s)\gamma_i(s,z)}-1\Big)-\ln\sqrt{1+N(s)\gamma_i(s,z)}\Big]\tilde{\nu}_i(ds,dz). \tag{7}$$

З умови $\Pi_i(\mathbb{R})<\infty, i=1,2,$ й умов на коефіцієнти $\gamma_i(s,z), i=1,2,$ випливає обмеженість зверху функції

$$\psi(x,s,z,u)=\frac{1}{\Pi_2(\mathbb{R})}\Big[x^{1/2}\Big(\sqrt{1+x\gamma_1(s,z)}-1\Big)-\ln\sqrt{1+x\gamma_1(s,z)}\Big]+$$
$$+\frac{1}{\Pi_1(\mathbb{R})}\Big[x^{1/2}\Big(\sqrt{1+x\gamma_2(s,u)}-1\Big)-\ln\sqrt{1+x\gamma_2(s,u)}\Big]-\frac{1}{2\Pi_2(\mathbb{R})}x\Big(x^{1/2}-1\Big)\gamma_1(s,z)$$

деякою константою $K_2>0$, яка не залежить від x,s,z,u. Тому із (7) маємо

$$\mathbb{E}[V(N(T\wedge\tau_n))]\le V(N_0)+K_1\mathbb{E}[T\wedge\tau_n]+K_2\Pi_1(\mathbb{R})\Pi_2(\mathbb{R})\mathbb{E}[T\wedge\tau_n]\le V(N_0)+KT \tag{8}$$

для деякої константи $K>0$.

Покладемо $\Omega_n=\{\omega\in\Omega:\tau_n\le T\}$. Тоді з нашого припущення $\mathsf{P}\{\tau_n<T\}>\varepsilon$, $\forall n>n_1$ випливає $\mathsf{P}(\Omega_n)>\varepsilon$. Зауважимо, що при $\omega\in\Omega_n$ маємо, $N(\tau_n,\omega)=n$ або $N(\tau_n,\omega)=1/n$. Отже із (8) одержимо

$$V(N_0)+KT\ge\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\Omega_n}(\omega)V(N(\tau_n))]\ge\varepsilon\min\{\sqrt{n}-1-\ln\sqrt{n},1/\sqrt{n}-1+\ln\sqrt{n}\}.$$

При $n\to\infty$ ми маємо суперечність $\infty>V(N_0)+KT=\infty$. □

Лема 2.2. *Нехай* $\Pi_i(\mathbb{R})<\infty, i=1,2,$ *для довільного* $T>0$ *і* $\mathcal{F}_t$*-узгоджених процесів* $g(t)$, $h_i(t,z), i=1,2,$ *майже напевно виконуються умови* $h_i(t,z)\ge 0, i=1,2,$

$$\int_0^T g^2(t)\,dt<\infty,\ \int_0^T\int_{\mathbb{R}}h_i^2(t,z)\,\Pi_i(dz)\,dt<\infty,\ \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\Big|e^{h_i(s,z)}-1\Big|^2\Pi_i(dz)ds<\infty,\ i=1,2.$$

Тоді для довільних $0<\delta\le 1,\beta>0$ *і випадкового процесу*

$$\zeta_\delta(t)=\int_0^t g(s)dw(s)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}h_1(s,z)\tilde{\nu}_1(ds,dz)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}h_2(s,z)\nu_2(ds,dz)-\frac{\delta}{2}\int_0^t g^2(s)ds-$$
$$-\frac{1}{\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big[e^{\delta h_1(s,z)}-1-\delta h_1(s,z)\Big]\Pi_1(dz)ds-\frac{1}{\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big[e^{\delta h_2(s,z)}-1\Big]\Pi_2(dz)ds$$

маємо експоненційну нерівність

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le T}\zeta_\delta(t)>\beta\Big\}\le e^{-\delta\beta}.$$

Доведення. Будемо вважати, що $\mathsf{P}\{\forall K>0,\exists t>0:\ |\zeta_\delta(t)|>K\}>0$. Якщо ця умова не виконується, тоді процес $\zeta_\delta(t)$, $t\ge 0$, буде обмеженим м. н. і наведені нижче аргументи спрощуються.

Для кожного цілого $n\ge 1$, визначимо момент зупинки

$$\tau_n=\inf\Big\{t\ge 0:\ \Big|\int_0^t g(s)dw(s)\Big|+\Big|\int_0^t\int_{\mathbb{R}}h_1(s,z)\tilde{\nu}_1(ds,dz)\Big|+$$
$$+\Big|\int_0^t\int_{\mathbb{R}}h_2(s,z)\nu_2(ds,dz)\Big|+\frac{\delta}{2}\int_0^t g^2(s)ds+\frac{1}{\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big[e^{\delta h_1(s,z)}-1\Big]^2\Pi_1(dz)ds+$$
$$+\frac{1}{\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big[e^{\delta h_2(s,z)}-1\Big]^2\Pi_2(dz)ds\ge n\Big\}.$$

Зрозуміло, що $\lim_{n\to\infty}\tau_n=+\infty$ м. н. В означенні процесу $\zeta_\delta(t)$ замінимо процеси $g(t),h_i(t,z),i=1,2,$ відповідно на процеси $g(t)\chi_{[0,\tau_n]}(t),h_i(t,z)\chi_{[0,\tau_n]}(t),i=1,2,$ й одержаний процесс позначимо $\zeta_\delta^{(n)}(t)$. Застосуємо до процесу $\exp\{\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)\}$ формулу Іто і будемо мати

$$e^{\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)}=1+\int_0^t e^{\delta\zeta_\delta^{(n)}(s)}\delta g(s)\chi_{[0,\tau_n]}(s)dw(s)+$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{\delta\zeta_\delta^{(n)}(s)}\Big(e^{\delta h_1(s,z)\chi_{[0,\tau_n]}(s)}-1\Big)\tilde\nu_1(ds,dz)+$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{\delta\zeta_\delta^{(n)}(s)}\Big(e^{\delta h_2(s,z)\chi_{[0,\tau_n]}(s)}-1\Big)\tilde\nu_2(ds,dz),$$

де $\tilde\nu_2(ds,dz)=\nu_2(ds,dz)-\Pi_2(dz)ds$. Оскільки процес $\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)$ буде обмеженим м. н., то в умовах леми процес $\exp\{\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)\}$ є мартингалом, траєкторії якого неперервні справа, мають границю зліва у кожній точці $t\ge 0$ і $\mathbb{E}[\exp\{\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)\}]=1$.

Із мартингальної нерівності маємо

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le T}\exp\{\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)\}\ge e^{\delta\beta}\Big\}\le e^{-\delta\beta}\mathbb{E}[\exp\{\delta\zeta_\delta^{(n)}(T)\}]=e^{-\delta\beta}.$$

Тому

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le T}\zeta_\delta^{(n)}(t)>\beta\Big\}\le e^{-\delta\beta}.$$

Граничним переходом при $n\to\infty$ одержимо твердження леми. □

Лема 2.3. *При виконанні умови (A) і* $\Delta=b_{\inf}-\sup_t\int_{\mathbb{R}}\gamma_2(t,z)\Pi_2(dz)>0$ *маємо*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln N(t)}{t}\le 0,\quad \textit{м. н.}\tag{9}$$

де $N(t)$ *— розв'язок рівняння (4).*

Доведення. Застосувавши формулу Іто до процесу $e^t\ln N(t)$, одержимо

$$e^t\ln N(t)-\ln N_0=\int_0^t e^s\Big\{\ln N(s)+a(s)-b(s)N(s)-\frac{1}{2}\alpha^2(s)N^2(s)+$$
$$+\int_{\mathbb{R}}[\ln(1+\gamma_1(s,z)N(s))-\gamma_1(s,z)N(s)]\Pi_1(dz)\Big\}ds+\psi(t),\tag{10}$$

де

$$\psi(t)=\int_0^t e^s\alpha(s)N(s)dw(s)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^s\ln(1+\gamma_1(s,z)N(s))\tilde\nu_1(ds,dz)+$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^s\ln(1+\gamma_2(s,z)N(s))\nu_2(ds,dz).$$

Застосуємо до процесу $\zeta_\delta(t)=\psi(t)-\tilde\psi_\delta(t),0<\delta<1$ лему 2.2, де

$$\tilde\psi_\delta(t)=\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{2s}\alpha^2(s)N^2(s)ds+\frac{1}{\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_1(s,z)N(s))^{\delta e^s}-1-$$
$$-\delta e^s\ln(1+\gamma_1(s,z)N(s))\Big]\Pi_1(dz)ds+\frac{1}{\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_2(s,z)N(s))^{\delta e^s}-1\Big]\Pi_2(dz)ds,$$

й одержимо оцінку

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le T}\zeta_\delta(t)>\beta\Big\}\le e^{-\delta\beta},\qquad\forall\ 0<\delta<1,\beta>0.\tag{11}$$

Покладемо $T = k\sigma, k \in \mathbb{N}, \sigma > 1$, $\delta = e^{-k\sigma}$, $\beta = \theta e^{k\sigma} \ln k$, $\theta > 1$. Тоді з (11) маємо

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le k\sigma}\Big[\psi(t) - \frac{1}{2}e^{-k\sigma}\int_0^t e^{2s}\alpha^2(s)N^2(s)ds - e^{k\sigma}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_1(s,z)N(s))^{e^{s-k\delta}} - \\ - 1 - e^{s-k\sigma}\ln(1+\gamma_1(s,z)N(s))\Big]\Pi_1(dz)ds - \\ - e^{k\sigma}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_2(s,z)N(s))^{e^{s-k\sigma}} - 1\Big]\Pi_2(dz)ds\Big] > \theta e^{k\sigma}\ln k\Big\} \le k^{-\theta}.$$

Тому за лемою Бореля–Кантеллі майже для всіх $\omega \in \Omega$ існує таке $k_0(\omega)$, що для всіх $k \ge k_0(\omega)$ і $0 \le t \le k\sigma$ будемо мати

$$\psi(t) \le \frac{1}{2}e^{-k\sigma}\int_0^t e^{2s}\alpha^2(s)N^2(s)ds + e^{k\sigma}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_1(s,z)N(s))^{e^{s-k\sigma}} - 1 - \\ - e^{s-k\sigma}\ln(1+\gamma_1(s,z)N(s))\Big]\Pi_1(dz)ds + \\ + e^{k\sigma}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_2(s,z)N(s))^{e^{s-k\sigma}} - 1\Big]\Pi_2(dz)ds\Big] + \theta e^{k\sigma}\ln k. \tag{12}$$

Із нерівності $x^r \le 1 + r(x-1)$ для $x \ge 0, 0 \le r \le 1$ одержимо при $0 \le t \le k\sigma$ оцінки

$$e^{k\sigma}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_1(s,z)N(s))^{e^{s-k\delta}} - 1 - e^{s-k\sigma}\ln(1+\gamma_1(s,z)N(s))\Big]\Pi_1(dz)ds \le \\ \le \int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} e^s[\gamma_1(s,z)N(s) - \ln(1+\gamma_1(s,z)N(s))]\Pi_1(dz)ds, \tag{13}$$

$$e^{k\sigma}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_2(s,z)N(s))^{e^{s-k\sigma}} - 1\Big]\Pi_2(dz)ds \le \int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} e^s\gamma_2(s,z)N(s)\Pi_2(dz)ds \tag{14}$$

майже для всіх $\omega \in \Omega$.

Із (10), використавши (12)–(14), одержимо

$$e^t\ln N(t) \le \ln N_0 + \int_0^t e^s\Big\{\ln N(s) + a(s) - N(s)\Big[b(s) - \int_{\mathbb{R}}\gamma_2(s,z)\Pi_2(dz)\Big] - \\ - \frac{1}{2}\alpha^2(s)N^2(s)\big[1 - e^{s-k\sigma}\big]\Big\}ds + \theta e^{k\sigma}\ln k. \tag{15}$$

Застосуємо нерівність $\ln x - cx \le -\ln c - 1, x > 0, c > 0$ й одержимо оцінку

$$\ln N(s) - N(s)\Big[b(s) - \int_{\mathbb{R}}\gamma_2(s,z)\Pi_2(dz)\Big] \le -\ln\Delta - 1 \quad \text{м. н.}$$

Тому з обмеженості зверху функції $\phi(s,x) = -\ln\Delta - 1 + a(s) - \alpha^2(s)x^2[1 - e^{s-k\sigma}]/2$ при $0 \le s \le t \le k\sigma$ й умов на коефіцієнти рівняння (4) маємо із (15)

$$\ln N(t) \le e^{-t}\ln N_0 + C(1 - e^{-t}) + \theta e^{k\sigma - t}\ln k \quad \text{м. н.},$$

де $C > 0$ — деяка константа, яка обмежує зверху функцію $\phi(s,x)$. Тому при $(k-1)\sigma \le t \le k\sigma$ і $k \ge k_0(\omega)$ одержимо

$$\frac{\ln N(t)}{t} \le \frac{\ln N_0}{te^t} + \frac{C}{t}(1 - e^{-t}) + \frac{\theta e^{k\sigma}\ln k}{e^{(k-1)\sigma}t}.$$

Отже $\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln N(t)}{t} \le 0$ м. н. □

3. Основні результати

У подальшому будемо вимагати виконання умов леми 2.3.

Теорема 3.1. *Якщо $\overline{a}^* < 0$, тоді популяція, динаміка якої описується рівнянням (4), вимирає майже напевно.*

Доведення. Застосувавши формулу Іто до процесу $\ln N(t)$, одержимо

$$\ln N(t) - \ln N_0 = \int_0^t \Big\{ a(s) - b(s)N(s) - \frac{1}{2}\alpha^2(s)N^2(s) + \\ + \int_{\mathbb{R}} [\ln(1+\gamma_1(s,z)N(s)) - \gamma_1(s,z)N(s)]\Pi_1(dz)\Big\} ds + \eta(t), \tag{16}$$

де

$$\eta(t) = \int_0^t \alpha(s)N(s)dw(s) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma_1(s,z)N(s))\tilde{\nu}_1(ds,dz) + \\ + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma_2(s,z)N(s))\nu_2(ds,dz).$$

Застосуємо до процесу

$$\zeta(t) = \eta(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha^2(s)N^2(s)ds - \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \gamma_2(s,z)N(s)\Pi_2(dz)ds - \\ - \int_0^t\int_{\mathbb{R}} [\gamma_1(s,z)N(s) - \ln(1+\gamma_1(s,z)N(s))]\Pi_1(dz)ds$$

лему 2.2 при $\delta = 1$, й одержимо експоненційну нерівність

$$\mathsf{P}\Big\{ \sup_{0\le t\le T} \zeta(t) \ge \beta \Big\} \le e^{-\beta}, \ \forall \beta > 0.$$

Звідси, при $T = n$, $\beta = \ln n^2$, $n \in \mathbb{N}$, маємо

$$\mathsf{P}\Big\{ \sup_{0\le t\le n} \zeta(t) \ge 2\ln n \Big\} \le \frac{1}{n^2}.$$

За лемою Бореля – Кантеллі для майже всіх $\omega \in \Omega$ існує $n_0 = n_0(\omega)$ таке, що $\forall n \ge n_0$

$$\sup_{0\le t\le n} \zeta(t) \le 2\ln n.$$

Тому для $\forall t \in [0,n], n \ge n_0$, одержимо із (16)

$$\ln N(t) \le \ln N_0 + \int_0^t a(s)ds - \int_0^t N(s)\Big[b(s) - \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(s,z)\Pi_2(dz)\Big]ds + 2\ln n, \tag{17}$$

а значить

$$\ln N(t) \le \ln N_0 + \int_0^t a(s)ds + 2\ln n \quad \text{м. н.}$$

Тут ми використали умову $\Delta > 0$ і те, що $N(t) \ge 0$ м. н. Таким чином, для $0 < n-1 \le t \le n$ маємо

$$\frac{\ln N(t)}{t} \le \frac{\ln N_0}{t} + \overline{a}(t) + \frac{2\ln n}{n-1},$$

а отже з умови $\overline{a}^* < 0$ випливає, що

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t)}{t} \le \overline{a}^* < 0.$$

Тому $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$ м. н. □

Теорема 3.2. *Якщо $\overline{a}^* = 0$, тоді популяція, динаміка якої описується рівнянням (4), не виживає в середньому.*

Доведення. З означення $\overline{a}^*$ випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке достатньо велике $t_1 > 0$, що в умовах теореми

$$\frac{1}{t}\int_0^t a(s)ds \le \overline{a}^* + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},\ \forall t > t_1.$$

Використавши цю нерівність й означення Δ, отримаємо із (17)

$$\ln N(t) - \ln N_0 \le \int_0^t a(s)ds - \int_0^t \left[b(s - \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(s,z)\Pi_2(dz)\right] N(s)ds + 2\ln n \le$$
$$\le \frac{\varepsilon t}{2} - \Delta \cdot \int_0^t N(s)ds + 2\ln n,\ \forall t \in (t_1, n],\quad n \ge n_0 \quad \text{м. н.}, \tag{18}$$

де n_0 визначено в доведенні теореми 3.1. Для $n \ge n_0$ виберемо t_0 так, щоб $t_1 < t_0 < n - 1 \le t \le n$. Тоді для $\forall t > t_0$ маємо $t^{-1}\ln n \le \varepsilon/4$ і з (18) дістанемо

$$\ln N(t) - \ln N_0 \le \varepsilon t - \Delta \cdot \int_0^t N(s)ds,\ \forall t > t_0,\quad \text{м. н.}$$

Нехай $n(t) = \int_0^t N(s)ds$, тоді із останньої нерівності отримаємо

$$\ln\left(\frac{dn(t)}{dt}\right) \le \varepsilon t - \Delta \cdot n(t) + \ln N_0 \Rightarrow \exp\{\Delta \cdot n(t)\}\frac{dn(t)}{dt} \le N_0 e^{\varepsilon t}\ \forall t \ge t_0,\quad \text{м. н.}$$

Тому

$$\int_{t_0}^t e^{\Delta \cdot n(s)}\frac{dn(s)}{ds}ds \le \frac{N_0}{\varepsilon}\left(e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon t_0}\right),\ \forall t \ge t_0,\quad \text{м. н.},$$

а значить

$$n(t) \le \frac{1}{\Delta}\ln\left[e^{\Delta \cdot n(t_0)} + \frac{\Delta \cdot N_0}{\varepsilon}(e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon t_0})\right],\ \forall t \ge t_0,\quad \text{м. н.} \tag{19}$$

Із (19) маємо

$$\overline{N}^* = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(s)ds \le \frac{\varepsilon}{\Delta},\qquad \text{м. н.}$$

Із довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що $\overline{N}^* \le 0$, а оскільки $N(t) \ge 0$, $\forall t \ge 0$, то маємо невиживання популяції $N(t)$ у середньому м. н. □

Теорема 3.3. *Якщо $\overline{a}^* > 0$, тоді популяція, динаміка якої описується рівнянням (4), слабко виживає.*

Доведення. Доведемо від супротивного, що $\mathsf{P}\{N^* = 0\} = 0$. Нехай $\mathsf{P}\{N^* = 0\} > 0$. Із (16) маємо

$$\ln N(t) - \ln N_0 = \int_0^t \Big\{a(s) - b(s)N(s) - \frac{1}{2}\alpha^2(s)N^2(s) + \int_{\mathbb{R}}[\ln(1+\gamma_1(s,z)N(s)) -$$
$$- \gamma_1(s,z)N(s)]\Pi_1(dz) + \int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma_2(s,z)N(s))\Pi_2(dz)\Big\}ds + M(t), \tag{20}$$

де

$$M(t) = \int_0^t \alpha(s)N(s)dw(s) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma_1(s,z)N(s))\tilde{\nu}_1(ds,dz) +$$
$$+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma_2(s,z)N(s))\tilde{\nu}_2(ds,dz).$$

Для $\forall\omega \in \{\omega \in \Omega : N^* = 0\}$ з обмеженості коефіцієнтів рівняння (4) й умови $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$, випливає, що квадратична характеристика мартингала $M(t)$

задовольняє умову $|\langle M, M\rangle(t)| \le Kt$. Тому за посиленним законом великих чисел для мартингалів [9, теорема 10, с. 119] маємо $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} M(t) = 0$.

Оскільки для $\forall\omega \in \{\omega \in \Omega : \ N^* = 0\}$ виконується $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$, то в умовах теореми із (20) отримаємо

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t)}{t} = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t a(s)ds = \overline{a}^* > 0.$$

Таким чином

$$\mathsf{P}\left\{\omega \in \Omega \middle| \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t)}{t} > 0 \right\} > 0.$$

Але за лемою 2.3 маємо

$$\mathsf{P}\left\{\omega \in \Omega \middle| \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t)}{t} \le 0 \right\} = 1.$$

Отже ми одержали суперечність. □

Список літератури

1. M. Iannelli, A. Pugliese, *An Introduction to Mathematical Population Dynamics*, Springer, 2014.
2. K. Golpalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992.
3. M. Liu, K. Wanga, *Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **375** (2011), 443–457.
4. J. Bao, Ch. Yuan, *Stochastic population dynamics driven by Levy noise*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **391** (2012), 363–375.
5. S. Wang, L. Wang, T. Wei, *A note on a competitive Lotka–Volterra model with Levy noise*, Filomat, **31** (2017), no. 12, 3741–3748.
6. O. D. Borysenko, D. O. Borysenko, *Non-autonomous stochastic logistic differential equation with non-centered Poisson measure*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics (2017), no. 4, 9–14.
7. I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, *Stochastic Differential Equations and their Applications*, Naukova Dumka, Kiev, 1982. (In Russian)
8. O. D. Borysenko, D. O. Borysenko, *Persistence and extinction in stochastic nonautonomous logistic model of population dynamics*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, **99** (2018), 63–70.
9. R. Sh. Liptser, A.N. Shiryayev, *Theory of Martingales*, Nauka, Moscow, 1986. (In Russian)

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: odb@univ.kiev.ua

Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: dima.borisenko.wrk@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 29.08.2019

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTION TO THE NON-AUTONOMOUS STOCHASTIC LOGISTIC DIFFERENTIAL EQUATION

O. D. BORYSENKO, D. O. BORYSENKO

Abstract. It is investigated the non-autonomous logistic differential equation with disturbance of coefficients by white noise, centered and non-centered Poisson noises. The existence of unique global nonnegative solution is proved. The sufficient conditions for the population extinction a.s., non-persistence of the population in the mean a.s., weak persistence of the population a.s. are obtained.