Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 189–202

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 189–202

УДК 519.21

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

І. К. МАЦАК

Анотація. У роботі досліджується асимптотика майже напевно для екстремальних значень дискретних випадкових величин. Наводяться застосування до процесів народження та загибелі і процесів, які задають довжину черги.

Ключові слова і фрази. Максимуми незалежних випадкових величин, асимптотика майже напевно, процеси народження та загибелі, системи масового обслуговування.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K25, 60F15, 60G70.

1. Вступ. Основні результати

Розглянемо послідовність $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ дискретних незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.) із розподілом $(i, p_i), i \geq 0$, точніше, далі будемо вважати, що

$$\mathbf{P}(\xi = i) = p_i > 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

Нехай також

$$z_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i.$$

Починаючи із класичної роботи B. V. Gnedenko [5], асимптотична поведінка z_n досліджувалася досить грунтовно (див. [4, 13] та наявні там посилання).

Якщо поставити питання про асимптотику z_n майже напевно (м. н.), то нам відомо небагато робіт, в яких розглядається дискретний випадок та отримано цікаві результати (наприклад, [1, 12]).

Досить давно стало зрозуміло, що асимптотика екстремальних значень в.в. у неперервному та дискретному випадках може істотно відрізнятися [1, 13, 14].

Так у статті [14] доведено, що для дискретних в.в., хвости розподілів яких досить швидко спадають, починаючи з деякого номера z_n м. н. попадає в невипадкові скінченні множини J_n, тісно пов'язані з послідовністю

$$a_n = \max\left(k \geq 0 : \sum_{i \geq k} p_i \geq \frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

У випадку розподілу Пуассона, $p_i = \frac{\lambda^i}{i!}\exp(-\lambda), i \geq 0$, у [14] установлена така рівність:

$$\mathbf{P}(\exists n_0, \forall n \geq n_0 \; z_n \in J_n = \{a_n + m, m = -1, 0, 1, 2\}) = 1. \tag{2}$$

Разом із тим багато близьких задач для дискретних в.в. залишались відкритими. Так, наприклад, у зв'язку з рівністю (2) виникає природне питання: за яких умов правильна рівність

$$\mathbf{P}(z_n = a_n + m \;\; \text{н. ч.}) = 1 \tag{3}$$

(н. ч. — скорочення нескінчено часто)?

Окрім того, для ряду застосувань (див. розділ 4 статті) буде цікавим узагальнення рівностей (2), (3) на в.в., хвости розподілів яких близькі до хвостів розподілу Пуассона.

Враховуючи роль, яку відіграє розподіл Пуассона в теорії ймовірностей та її застосуваннях, ми спробуємо знайти відповіді на ці питання.

Сформулюємо основні результати роботи. Для дискретної в.в. ξ з розподілом $(i, p_i), i \geq 0$, введемо позначення:

$$R(n) = -\ln \mathbf{P}(\xi \geq n) = -\ln\left(\sum_{i \geq n} p_i\right),$$
$$r(n) = R(n) - R(n-1).$$

Теорема 1. *Нехай $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — послідовність дискретних н.о.р.в.в., $\beta > 0$ — довільне число, a_n задається рівністю (1).*

(i) Якщо при $n \to \infty$

$$r(n) = \beta \ln n + o(L_2(n)), \tag{4}$$

то

$$\mathbf{P}(\exists n_0,\ \forall n \geq n_0\ z_n \in J_n = \{a_n + m, m \in I_\beta\}) = 1, \tag{5}$$
$$\forall m \in I_\beta \ \textit{правильна рівність}\ (3)$$

і

$$a_n = \frac{\ln n}{\beta L_2(n)}(1 + o(1), \tag{6}$$

тут і далі $I_\beta = \{-1, 0, 1, \ldots, [1 + 1/\beta]\}$,

$$L_2(t) = \ln\ln t, \quad L_3(t) = \ln\ln\ln t.$$

(ii) Якщо умову (4) посилити таким чином:
для деяких C, C_1 при $n \to \infty$

$$R(n) = \beta n(\ln n - C) + C_1 \ln n + O(1), \tag{7}$$

то a_n задовольняє асимптотичне співвідношення

$$a_n = \frac{\ln n}{\beta L_2(n)}\left(1 + \frac{L_3(n) + C + \ln\beta + o(1)}{L_2(n)}\right). \tag{8}$$

Цікаво відзначити, що в умовах теореми 1 при $\beta > 1$ $I_\beta = \{-1, 0, 1\}$, тобто не залежить від β.

Наслідок 1. *Якщо в теоремі 1 замість рівності (4) виконуються умови*

$$r(n) = o(\ln n), \tag{9}$$

$$\sum_{n \geq 1} \exp\left(-e^{r(n)}\right) < \infty, \tag{10}$$

то

$$\mathbf{P}(\exists n_0, \forall n \geq n_0 z_n \geq a_n - 1) = 1, \tag{11}$$

і

для будь-якого цілого $m \geq -1$ правильна рівність (3).

Наслідок 2. *Якщо в теоремі 1 в.в. ξ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, то справедливі рівності (2) та (3) при $m = -1, 0, 1, 2$, a_n задається рівністю (1) і при $n \to \infty$*

$$a_n = \frac{\ln n}{L_2(n)}\left(1 + \frac{L_3(n) + \ln\lambda + 1 + o(1)}{L_2(n)}\right). \tag{12}$$

У кінці роботи розглядаються приклади застосувань теореми 1 та наслідків до дослідження асимптотики екстремальних значень процесів народження й загибелі та процесів у системах масового обслуговування (СМО).

Подібні задачі вивчалися у багатьох роботах [1–3, 7, 9, 15, 17], проте досліджувався в основному випадок слабкої збіжності.

2. Допоміжні леми

Лема 1. *Нехай $A_1, A_2, \ldots$ — нескінчена послідовність випадкових подій. Тоді*

(i) якщо $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$*, то* $\mathbf{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0$*;*

(ii) якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty, \tag{13}$$

і для деякого $K > 0$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \mathbf{P}(A_j \bigcap A_l)}{(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(A_j))^2} \le K, \tag{14}$$

то

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \ge \frac{1}{K}.$$

Лема 1 — це певне узагальнення добре відомої леми Бореля – Кантеллі [16, гл. 6, § 26].

Лема 2. *Нехай $(\eta_n), n \ge 1,$ — послідовність н.в.в., $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}(\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots)$ — σ-алгебра, породжена в.в. $\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots$, $\mathfrak{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ — залишкова σ-алгебра. Якщо випадкові події A_n в лемі 1 залежать від в.в. (η_n) так, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathfrak{B}$ і виконуються умови (13), (14), то*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1.$$

Лема 2 безпосередньо випливає із леми 1. Дійсно, згідно закону 0 або 1 Колмогорова в умовах леми 2 величина $\mathbf{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$ може набувати лише два значення: 0 або 1, що разом з оцінкою леми 1 закінчує доведення.

Далі для послідовності дискретних н.о.в.в. $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots,$ із розподілом $(i, p_i), i \ge 0$, побудуємо випадкові події A_n таким чином:

$$A_n = \{\xi_n = z_n = a_n + m\}, \tag{15}$$

де a_n визначається за формулою (1), m — деяке ціле число.

Щоб застосувати леми 1, 2 до випадкових подій A_n спочатку знайдемо умови, достатні для виконання співвідношення (13).

Лема 3. *Нехай випадкові події A_n задаються рівністю (15), $m \ge 0$ фіксоване ціле число та*

$$r(k) \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{16}$$

Тоді

(i) при $m = 0$ або $m = 1$ ряд (13) розбігається;

(ii) при $m > 1$ розбіжність ряду (13) еквівалентна умові

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-R(k+m) + R(k+1)) = \infty; \tag{17}$$

(iii) *якщо умова (17) виконується при $m = m_0$ і не виконується при $m = m_0 + 1$, то*

$$\mathbf{P}(z_n > a_n + m_0 \quad \text{н. ч.}) = 0,$$
$$\mathbf{P}(z_n = a_n + m_0 \quad \text{н. ч.}) = 1.$$

Доведення леми 3. Почнемо з пункту (ii). Подамо подію A_n як

$$A_n = \{\xi_n = a_n + m, \xi_i \leq a_n + m, i = 1, \dots, n-1\}.$$

Звідси одержуємо

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\xi = a_n + m)\mathbf{P}(\xi \leq a_n + m)^{n-1}. \tag{18}$$

Безпосередньо з означення a_n випливає імплікація:

$$\forall k \geq 0 \quad \{a_n = k\} \Leftrightarrow \{n \in U_k\}, \tag{19}$$

де $U_k = \{n \geq 1 : \exp(R(k)) \leq n < \exp(R(k+1))\}$.

Далі, базуючись на співвідношеннях (18), (19), оцінимо ряд (13) знизу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = a_n + m)(1 - \mathbf{P}(\xi \geq a_n + m + 1))^{n-1} \geq$$
$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = k + m)(1 - \mathbf{P}(\xi \geq k + m + 1))^{\exp(R(k+1))} \sum_{n \in U_k} 1. \tag{20}$$

Запишемо різницю

$$\exp(R(k+1)) - \exp(R(k)) = \exp(R(k+1))(1 - \exp(-r(k+1)))$$

і, скориставшись співвідношенням (16), одержимо: при $k \to \infty$

$$\sum_{n \in U_k} 1 = \exp(R(k+1))(1 + o(1)). \tag{21}$$

Так само, згідно із (16), маємо

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \exp(-R(k)) - \exp(-R(k+1)) =$$
$$= \exp(-R(k))(1 - \exp(-r(k+1))) = \exp(-R(k))(1 - o(1)). \tag{22}$$

Збираючи співвідношення (20)–(22) разом, одержуємо при $m \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-R(k+m) + R(k+1)) \times$$
$$\times (1 - \exp(-R(k+m+1))^{\exp(R(k+1))}(1 + o(1)).$$

Як добре відомо,

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \uparrow \frac{1}{e} \text{ при } x \uparrow \infty. \tag{23}$$

Тому

$$(1 - \exp(-R(k+m+1)))^{\exp(R(k+1))} \geq (1 - \exp(-R(k+m+1)))^{\exp(R(k+m+1))} \geq$$
$$\geq (1 - \exp(-R(m+1)))^{\exp(R(m+1))}.$$

Останні оцінки і дають імплікацію (17) $\Rightarrow$ (13).

Навпаки, нехай ряд (13) розбігається. Тоді, так само як і в (20), маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = k + m)(1 - \mathbf{P}(\xi \geq k + m + 1))^{\exp(R(k))-1} \sum_{n \in U_k} 1 \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-R(k+m) + R(k+1)) \times$$
$$\times (1 - \exp(-R(k+m+1))^{\exp(R(k))-1}(1+o(1)). \quad (24)$$

Очевидно, що

$$(1 - \exp(-R(k+m+1))^{\exp(R(k))-1} \leq 1.$$

Звідси, враховуючи нерівність (24), робимо висновок: ряд (17) розбігається.

Відзначимо, що із наведених вище міркувань випливає також пункт (i) леми 3.

Пункт (iii) фактично міститься у доведенні теореми 1 та леми 4 статті [14] . □

Для послідовності випадкових подій (A_n), визначених у лемі 3, введемо такі позначення:

$$S_n^{'} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(A_j), \quad S_n^{''} = \sum_{1 \leq j < l \leq n} \mathbf{P}(A_j \cap A_l).$$

Лема 4. *Нехай $m \geq 0$ і виконуються умови (16), (17) леми 3. Тоді*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n^{''}}{|S_n^{'}|^2} < \infty. \quad (25)$$

Доведення леми 4. Почнемо із простої рівності

$$S_n^{''} = \sum_{1 \leq j < l \leq n} \mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(A_l / A_j). \quad (26)$$

Далі оцінимо зверху другий співмножник у (26). Оскільки a_n — неспадна послідовність і величини ξ_n незалежні, то

$$\mathbf{P}(A_l/A_j) = \mathbf{P}(\xi_l = a_l + m, \xi_i \leq a_l + m, i = 1, \ldots, l-1 \big/ \xi_j = a_j + m,$$
$$\xi_i \leq a_j + m, i = 1, \ldots, j-1) =$$
$$= \mathbf{P}(\xi_l = a_l + m, \xi_i \leq a_l + m, i = j+1, \ldots, l-1).$$

Останню рівність перепишемо таким чином:

$$\mathbf{P}(A_l/A_j) = \mathbf{P}(A_l) C_{j,l}, \quad (27)$$

де $C_{j,l} = (\mathbf{P}(\xi_i \leq a_l + m, i = 1, \ldots, j))^{-1}$.

Покажемо, що величина $C_{j,l}$ обмежена зверху. Припустимо, що $a_l = k$. Тоді

$$l < \exp(R(k+1)) \leq \exp(R(k+m+1))$$

та

$$C_{j,l} \leq (1 - \exp(-R(k+m+1)))^{-l} \leq$$
$$\leq (1 - \exp(-R(k+m+1)))^{-\exp(R(k+m+1))}.$$

Проте при $x > 1$ функція $(1 - 1/x)^{-x}$ спадає при зростанні x, а отже

$$C_{j,l} \leq C_2 = (1 - \exp(-R(1)))^{-\exp(R(1))}.$$

Звідси та з рівностей (26), (27) отримаємо

$$S_n^{''} \leq C_2 \sum_{1 \leq j < l \leq n} \mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(A_l).$$

За лемою 3 при $n \to \infty$ $S_n^{'} \to \infty$ і відповідно

$$|S_n^{'}|^2 = 2 \sum_{1 \leq j < l \leq n} \mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(A_l) + O(S_n^{'}).$$

Останні оцінки дають нерівність

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n^{''}}{|S_n'|^2} \le \frac{C_2}{2}.$$

Таким чином, (25) установлено. □

Далі введемо такі позначення:

$$\hat{A}_n = \{z_{n+1} = z_n = \xi_n = a_n + m\},$$

$$\hat{S}_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(\hat{A}_j), \quad \hat{\hat{S}}_n = \sum_{1\le j<l\le n} \mathbf{P}(\hat{A}_j \cap \hat{A}_l).$$

Лема 5. *Нехай $m \ge 0$ і виконуються умови (16), (17) леми 3. Тоді*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\hat{\hat{S}}_n}{|\hat{S}_n'|^2} < \infty. \tag{28}$$

Доведення леми 5. Якщо (A_n) — послідовність подій, визначених рівністю (15), то

$$\mathbf{P}(\hat{A}_n) = \mathbf{P}(\xi_{n+1} \le a_n + m)\mathbf{P}(A_n).$$

Але

$$\mathbf{P}(\xi_{n+1} \le a_n + m) \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

тому збіжність ряду $\sum_{n\ge1} \mathbf{P}(\hat{A}_n)$ еквівалентна збіжності ряду $\sum_{n\ge1} \mathbf{P}(A_n)$.

Подальші міркування близькі до доведення леми 4. Невелика різниця полягає в оцінці умовної ймовірності $\mathbf{P}(\hat{A}_l/\hat{A}_j)$. Так, якщо $1 \le j < l-1$, то

$$\mathbf{P}(\hat{A}_l/\hat{A}_j) = \mathbf{P}(\xi_{l+1} \le a_l + m, \xi_l = a_l + m, \xi_i \le a_l + m, j+1 < i \le l-1).$$

А у випадку $j = l-1$ маємо

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\hat{A}_l/\hat{A}_j) = \mathbf{P}(\xi_{l+1} \le a_l + m, \xi_l = a_l + m, \xi_i \le a_l + m, i = 1, \dots, l-1 \big/ \\ \xi_l \le a_{l-1} + m, \xi_{l-1} = a_{l-1} + m, \xi_i \le a_{l-1} + m, i = 1, \dots, l-2) = \\ = \frac{\mathbf{P}(\xi_{l+1} \le a_l + m, \xi_l = a_l + m)}{\mathbf{P}(\xi_l \le a_{l-1} + m)}.\end{aligned}$$

Наведені рівності в загальному випадку дозволяють записати оцінку

$$\mathbf{P}(\hat{A}_l/\hat{A}_j) \le \frac{\mathbf{P}(\hat{A}_l)}{\mathbf{P}(\xi_l \le a_{l-1} + m)} C_{j,l} \le \frac{C_{j,l}}{p_0} \mathbf{P}(\hat{A}_l),$$

де величини $C_{j,l}$ визначені у лемі 4.

Щоб отримати звідси (28), залишається повторити міркування із леми 4. □

3. Доведення теореми 1 та наслідків

Почнемо з теореми 1 (i). Із асимптотичної рівності (4) негайно випливає умова (16) леми 3. Ще раз застосуємо рівність (4) та підставимо її праву частину у формулу (17). Елементарні обчислення показують, що збіжність ряду (17) еквівалентна збіжності ряду

$$\sum_{k\ge l} \exp(-\beta(m-1)\ln k + o(L_2(k))).$$

Проте очевидно, що останній буде збігатися при $m > 1 + 1/\beta$ і розбігатися при $m \le 1 + 1/\beta$. Згідно з лемою 3 це означає, що для $m = 0, 1, \dots, m_0 = [1 + 1/\beta]$ матимемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty,$$

де A_n визначено у рівності (15). Причому

$$\mathbf{P}(z_n > a_n + [1 + 1/\beta] \quad \text{н. ч.}) = 0. \tag{29}$$

За лемою 4 для $\forall m \in I_\beta$ буде справедлива нерівність (25), а оскільки

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \mathbf{P}(A_j \cap A_l) = 2S_n^{''} + S_n^{'},$$

то правильна також і нерівність (14).

Залишається помітити, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathfrak{B}$, де $\mathfrak{B}$ — відповідна залишкова σ-алгебра. Таким чином можна застосувати лему 2, а отже $\mathbf{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1$ і $\forall m \in I_\beta$ правильна рівність (3).

Неважко перевірити, що із (4) випливає умова (10), з якої маємо

$$\mathbf{P}(z_n < a_n - 1 \quad \text{н. ч.}) = 0 \tag{30}$$

та

$$\mathbf{P}(z_n = a_n - 1 \quad \text{н. ч.}) = 1 \tag{31}$$

(див. теорему 2 статті [14]).

Збираючи разом (29)–(31), одержуємо властивість (3) для $m \in I_\beta$ та властивість (5).

(ii) Покажемо, що величина a_n задовольняє асимптотичне співвідношення (8). Згідно з означенням

$$a_n = \max(k \geq 0 : \exp(-R(k)) \geq \frac{1}{n}) = \max(k \geq 0 : R(k) \leq \ln n). \tag{32}$$

Величину $R(k)$ із формули (7) нам зручно переписати як

$$R(k) = \beta k \left(\ln k - C + O\left(\frac{\ln k}{k} \right) \right). \tag{33}$$

Далі для фіксованого z підберемо величину $\alpha_n(z)$, яка буде наближати a_n, у такому вигляді:

$$\alpha_n(z) = \frac{\ln n}{\beta L_2(n)} \left(1 + \frac{L_3(n) + C + \ln \beta + z}{L_2(n)} \right).$$

Якщо підставити $\alpha_n(z)$ замість k у рівність (33), то отримаємо

$$\begin{aligned} R(\alpha_n(z)) &= \beta \alpha_n(z) \left(L_2(n) - L_3(n) - C - \ln \beta + O\left(\frac{L_2^2(n)}{\ln n} \right) \right) = \\ &= d(n,z) \ln n, \end{aligned} \tag{34}$$

де

$$\begin{aligned} d(n,z) &= \left(1 - \frac{L_3(n) + C + \ln \beta + O(\frac{L_2^2(n)}{\ln n})}{L_2(n)} \right) \left(1 + \frac{L_3(n) + C + \ln \beta + z}{L_2(n)} \right) = \\ &= 1 + \frac{z L_2(n) - L_3^2(n) + O(L_3(n))}{L_2^2(n)}. \end{aligned} \tag{35}$$

Рівності (35) показують, що при досить великих n

$$d(n,z) > 1, \quad \text{якщо } z > 0,$$

та

$$d(n,z) < 1, \quad \text{якщо } z = 0.$$

Враховуючи додатково співвідношення (32), (34), робимо висновок:
якщо θ_n задовольняє рівність

$$a_n = \frac{\ln n}{\beta L_2(n)}\left(1 + \frac{L_3(n) + C + \ln\beta + \theta_n}{L_2(n)}\right), \tag{36}$$

то $\forall z > 0$ при досить великих n $0 \le \theta_n \le z$.

А отже $\theta_n = o(1)$ при $n \to \infty$.

Доведення рівності (6) міститься в наведених вище міркуваннях. □

Зауваження 1. Оцінку величини θ_n із формули (36) можна дещо уточнити:

$$\theta_n = \frac{L_3^2(n) + O(L_3(n))}{L_2(n)}.$$

Перейдемо до наслідку 1. Якщо функція $r(k)$ задовольняє умову (9), то фактично це означає, що у теоремі 1 розглядається випадок $\beta \to 0$. Тому, повторюючи міркування із теореми 1, отримаємо умови (16), (17), а з них і рівність (3) для будь-якого цілого $m \ge 0$.

Як було відзначено вище умова (10) достатня для виконання рівностей (30), (31), що і завершує доведення наслідку 1. □

Наслідок 2 безпосередньо випливає із теореми 1. Дійсно, як було установлено у статті [14], для розподілу Пуассона справджуються такі асимптотичні формули:

$$R(n) = (n + \frac{1}{2})\ln n - n(\ln\lambda + 1) + \frac{1}{2}\ln 2\pi - \lambda + o(1),$$

$$r(n) = \ln n + O(1).$$

Таким чином розподіл Пуассона задовольняє умову (7) теореми 1, якщо вибрати $\beta = 1$, $C = \ln\lambda + 1$, $C_1 = 1/2$. □

4. Приклади

Розглянемо приклади застосувань отриманих результатів до дослідження асимптотики екстремальних значень процесів народження та загибелі та процесів, які описують довжину черги у СМО.

Приклад 1 (процес народження та загибелі). Розглянемо процес народження й загибелі $X(t)$ з параметрами

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = \mu n^\beta, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \beta > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{37}$$

Такий процес назвемо процесом із степеневим ростом смертності та імміграцією. Якщо стан n описує розмір популяції в деякий момент часу, то ймовірність переходу в стан $n+1$ за малий проміжок часу δ дорівнює $\lambda\delta + o(\delta)$, а ймовірність переходу $n \to n-1$ задається рівністю $\mu n^\beta \delta + o(\delta)$. Коефіцієнт λ можна інтерпретувати як інфінітезімальну інтенсивність росту популяції за рахунок імміграції (див., наприклад, [10, глава 7, параграф 6], де вивчається процес народження та загибелі з лінійним ростом та імміграцією).

Будемо припускати, що $X(0) = 0$ м. н. Покладемо

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \frac{\rho^k}{(k!)^\beta}, \quad k \ge 1.$$

Неважко перевірити, що виконуються співвідношення

$$\sum_{k \ge 1} \theta_k < \infty, \tag{38}$$

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\lambda_k\theta_k}=\infty. \tag{39}$$

Умови (38), (39), як відомо з [10, 11], достатні для існування стаціонарних імовірностей станів

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(X(t)=k)=\lim_{t\to\infty}p_k(t)=p_k,$$

причому

$$p_k=\theta_k p_0,\quad p_0=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k\right)^{-1}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{(k!)^{\beta}}\right)^{-1}. \tag{40}$$

Окрім того, $X(t)$ буде регенеруючим процесом із моментами регенерації $S_0=0$, $S_1,S_2,\dots$, тут S_k — це перший момент попадання у стан 0 після k-го виходу із нього. Причому

$$\mathbf{E}T_k=d_T=\frac{1}{(\lambda_0+\mu_0)p_0}=\frac{1}{\lambda p_0},$$

де $T_k=S_k-S_{k-1}$ — тривалість k-го циклу регенерації [11, 17].

Тут нас буде цікавити асимптотична поведінка екстремальних значень популяції:

$$\bar{X}(t)=\sup_{0\leq s<t}X(s),\quad t\geq 0.$$

Щоб сформулювати відповідний результат, введемо такі позначення:

$$a(t)=\max(k\geq 0: R(k)\leq \ln t),\quad t>1, \tag{41}$$

де

$$R(n)=\ln\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k!)^{\beta}}{\rho^k}\right).$$

Твердження 1. *Нехай $X(t)$ — процес народження та загибелі з параметрами, які задаються рівностями (37). Тоді*

$$\mathbf{P}\left(\exists t_0,\forall t\geq t_0\quad \bar{X}(t)\in J_t=\left\{a\left(\frac{t}{d_T}\right)+m, m\in I_{\beta}^{+}\right\}\right)=1, \tag{42}$$

і $\forall m\in I_{\beta}$

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}(t)\in J_{t,m}=\left\{a\left(\frac{t}{d_T}\right)+l, l=m-1,m,m+1\right\}\ \textit{н. ч.}\right)=1, \tag{43}$$

де $I_{\beta}^{+}=I_{\beta}\bigcup(-2,[2+1/\beta])$, $a(t)$ *задається рівністю (41) і задовольняє асимптотичне співвідношення*

$$a(t)=\frac{\ln t}{\beta L_2(t)}\left(1+\frac{L_3(t)+1+\frac{\ln\rho}{\beta}+\ln\beta+o(1)}{L_2(t)}\right),\quad t\to\infty. \tag{44}$$

Доведення твердження 1. Для знаходження асимптотики $\bar{X}(t)$ ми будемо спиратися на теорему 1. Проте, щоб скористатися нею, спочатку необхідно досить точно оцінити розподіл екстремального значення популяції на одному циклі регенерації.

Позначимо через $N(t)$ лічильний процес для послідовності (S_k),

$$N(t)=\max(k\geq 0: S_k<t),\quad t\geq 0.$$

Нехай також

$$Y_k=\sup_{S_{k-1}\leq t<S_k}X(t),\quad Z_n=\max_{1\leq k\leq n}Y_k.$$

Оскільки (S_k) — це моменти регенерації процесу $X(t)$, то (Y_k) — послідовність н. о. р. в. в. Тоді покладемо

$$q(n) = \mathbf{P}(Y_k \geq n) = \exp(-R(n)).$$

Як відомо [2, 17], для процесу народження та загибелі правильна формула

$$q(n) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k}, \tag{45}$$

де $\alpha_0 = 1$, $\alpha_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{\lambda_i}$, $k \geq 1$.

Із рівностей (37), (45) маємо

$$q(n) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k!)^{\beta}}{\rho^k} \right)^{-1}. \tag{46}$$

Ґрунтуючись на останній рівності покажемо, що величина $R(n)$, яка задає хвіст розподілу екстремального значення популяції на одному циклі регенерації, задовольняє формулу (7) теореми 1. Дійсно

$$\begin{aligned} R(n) &= -\ln q(n) = \ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k!)^{\beta}}{\rho^k} \right) = \\ &= \ln\Big(((n-1)!)^{\beta} / \rho^{n-1} \Big) + \ln\left(1 + \frac{\rho}{(n-1)^{\beta}} + \frac{\rho^2}{(n-1)^{\beta}(n-2)^{\beta}} + \ldots \right) = \\ &= \beta \ln(n-1)! - (n-1)\ln\rho + O(1), \end{aligned} \tag{47}$$

тут була використана оцінка

$$1 + \frac{\rho}{(n-1)^{\beta}} + \frac{\rho^2}{(n-1)^{\beta}(n-2)^{\beta}} \ldots \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{(n!)^{\beta}} < \infty.$$

Згідно із формулою Стірлінга

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + O(1).$$

Звідси та із (47) отримуємо потрібну оцінку

$$R(n) = \beta n \left(\ln n - 1 - \frac{\ln\rho}{\beta} \right) - \frac{\beta}{2} \ln n + O(1), \tag{48}$$

тобто виконується рівність (7) із $C = 1 + (\ln\rho)/\beta$, $C_1 = -\beta/2$.

Таким чином послідовність в.в. (Y_n) задовольняє умови теореми 1. А отже, для (Z_n) виконується рівність (5), а при $m \in I_\beta$ правильна також і рівність (3).

Зрозуміло, що коли t пробігає числову вісь $(0, \infty)$, то процес $N(t)$ пробігає усі додатні цілі числа м. н. Тоді

$$\mathbf{P}(\exists t_0, \forall t \geq t_0 \quad Z_{N(t)} \in J_{N(t)} = \{a_{N(t)} + m, m \in I_\beta\}) = 1 \tag{49}$$

і $\forall m \in I_\beta$

$$\mathbf{P}(Z_{N(t)} = a_{N(t)} + m \quad \text{н. ч.}) = 1. \tag{50}$$

Із цих рівностей та леми 5 ми виведемо співвідношення (42), (43) твердження 1.

Почнемо із доведення імплікації: (49) $\Rightarrow$ (42).

Для лічильного процесу $N(t)$ добре відома [8] рівність

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{d_T} \quad \text{м. н.}$$

Із неї випливає: при $t \to \infty$

$$\ln N(t) = \ln \frac{t}{d_T} + o(1) \quad \text{м. н.} \tag{51}$$

Зафіксуємо довільне ціле число $l \geq 0$ і покладемо

$$a(t) = \max(k \geq 0 : R(k) \leq \ln t), \quad t > 1.$$

Далі ми спробуємо оцінити асимптотичну поведінку величини $a_{N(t)+l} = a(N(t)+l)$.

Зразу зазначимо, що при $t \to \infty$

$$\ln(N(t)+l) \in \left(\ln \frac{t}{d_T} - 1, \ln \frac{t}{d_T} + 1\right) \quad \text{м. н.}, \tag{52}$$

а при $k \to \infty$

$$R(k) - R(k-1) = r(k) = \beta \ln k + O(1) > 1 \tag{53}$$

(див. (48), (51)).

Нехай $a(\frac{t}{d_T}) = k$ і вибране таке велике t, що виконуються співвідношення (52), (53). Елементарні міркування переконують, що можливі лише такі варіанти:

(i) якщо $\ln(N(t)+l) \leq \ln \frac{t}{d_T}$ і $R(k) \leq \ln(N(t)+l)$, то

$$a(N(t)+l) = a\left(\frac{t}{d_T}\right) = k;$$

(ii) якщо $\ln(N(t)+l) \leq \ln \frac{t}{d_T}$ і $R(k) > \ln(N(t)+l)$, то

$$a(N(t)+l) = a\left(\frac{t}{d_T}\right) - 1 = k - 1;$$

(iii) якщо $\ln(N(t)+l) > \ln \frac{t}{d_T}$ і $R(k+1) > \ln(N(t)+l)$, то

$$a(N(t)+l) = a\left(\frac{t}{d_T}\right) = k;$$

(iv) якщо $\ln(N(t)+l) > \ln \frac{t}{d_T}$ і $R(k+1) \leq \ln(N(t)+l)$, то

$$a(N(t)+l) = a\left(\frac{t}{d_T}\right) + 1 = k + 1.$$

Тому

$$\mathbf{P}\left(\exists t_0, \forall t \geq t_0 \quad a(N(t)+l) \in \left\{a\left(\frac{t}{d_T}\right) + j, j = -1, 0, 1\right\}\right) = 1. \tag{54}$$

Якщо вибрати $l = 0$, то із (49) та (54) будемо мати

$$\mathbf{P}\left(\exists t_0, \forall t \geq t_0 \quad Z_{N(t)} \in J(t) = \left\{a\left(\frac{t}{d_T}\right) + m, m \in I_\beta^+\right\}\right) = 1, \tag{55}$$

де $I_\beta^+ = I_\beta \bigcup \{-2, [2 + 1/\beta]\}$.

Якщо ж вибрати $l = 1$ і розглянути процес $Z_{N(t)+1}$, то так само переконуємось, що і він задовольняє рівність (55).

Проте очевидно, що

$$Z_{N(t)} \leq \bar{X}(t) \leq Z_{N(t)+1}. \tag{56}$$

Звідси негайно випливає рівність (42) твердження 1.

Установимо рівність (43). Окремо розглянемо випадок $m = -1$. Для нього згідно із (50) та (54)

$$\mathbf{P}\left(Z_{N(t)+1} \in \left\{a\left(\frac{t}{d_T}\right) + l, l = -2, -1, 0\right\} \quad \text{н. ч.}\right) = 1.$$

Водночас із рівності (55) маємо

$$\mathbf{P}\left(\exists t_0,\, \forall t \geq t_0 \quad Z_{N(t)} \geq a\left(\frac{t}{d_T}\right) - 2\right) = 1.$$

Ще раз застосовуючи нерівності (56), отримуємо (43) при $m = -1$.

Перейдемо до випадку $m \geq 0, m \in I_\beta$. Із доведення теореми 1 зрозуміло, що коли функція $R(n)$ задається формулою (48), то умови (16), (17) виконуються. А отже, за лемою 5 маємо нерівність (28). Із лем 1, 2 та нерівності (28) приходимо до рівності

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \hat{A}_k\right) = 1.$$

Фактично це означає, що

$$\forall m \in I_\beta \quad \mathbf{P}(Z_n = Z_{n+1} = a_{n+m} \quad \text{н. ч.}) = 1. \tag{57}$$

Так само, як і вище, переходимо в рівності (57) від n до $N(t)$:

$$\forall m \in I_\beta \quad \mathbf{P}(Z_{N(t)} = Z_{N(t)+1} = a_{N(t)+m} \quad \text{н. ч.}) = 1.$$

Щоб отримати звідси співвідношення (43), залишається застосувати формули (54), (56).

Доведення формули (44) практично не відрізняється від доведення її дискретного варіанта (8) із теореми 1. □

Приклад 2 (СМО $M/M/\infty$). Розглянемо систему масового обслуговування з необмеженою кількістю каналів обслуговування, на яку поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ, а час обслуговування η має експоненційний розподіл

$$\mathbf{P}(\eta < x) = 1 - \exp(-\mu x), \quad x \geq 0.$$

Нехай у момент $S_0 = 0$ система порожня, а $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ — послідовні моменти звільнення системи після відповідного періоду зайнятості (фактично — це моменти регенерації системи). Нехай також $T_k = S_k - S_{k-1}$ — тривалість k-го циклу регенерації.

Під довжиною черги тут і далі будемо розуміти загальну кількість заявок, які є на обслуговуванні. Через $Q(t)$ позначаємо довжину черги в момент часу t,

$$\bar{Q}(t) = \sup_{0 \leq s < t} Q(s), \bar{Q}_n = \bar{Q}(S_n).$$

Тут, ґрунтуючись на наведених вище результатах, ми дослідимо асимптотичну поведінку екстремальних значень $\bar{Q}_n$ та $\bar{Q}(t)$ м. н.

Для СМО $M/M/\infty$ при довільних $\lambda > 0, \mu > 0$ $Q(t)$ буде процесом народження та загибелі з параметрами $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu n$, $n \geq 0$, тобто він задовольняє умови (37). Тому зрозуміло, що для $\bar{Q}_n$ виконуються рівності (3), (5) при $\beta = 1$ та $m \in I_1$.

Окрім того, для СМО $M/M/\infty$ існують стаціонарні ймовірності (p_k), і відомі такі формули:

$$p_0 = \exp(-\rho), \rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

$$ET_k = d_T = \frac{1}{\lambda p_0} = \frac{\exp(\rho)}{\lambda} \tag{58}$$

(див. [6, 10, 17]).

Звідси та із твердження 1 маємо таке.

Твердження 2. *Нехай $Q(t)$ — довжина черги в момент часу t у СМО $M/M/\infty$. Тоді*

$$\mathbf{P}\left(\exists t_0, \forall t \ge t_0 \quad \bar{Q}(t) \in \left\{a\left(\frac{t}{d_T}\right) + m, m \in (-2,-1,0,1,2,3)\right\}\right) = 1, \tag{59}$$

і $\forall m \in (-1,0,1,2)$

$$\mathbf{P}\left(\bar{Q}(t) \in \left\{a\left(\frac{t}{d_T}\right) + l, l = m-1, m, m+1\right\} \quad \text{н. ч.}\right) = 1, \tag{60}$$

де d_T визначено у формулі (58), $a(t)$ задається рівністю (41) і задовольняє асимптотичне співвідношення

$$a(t) = \frac{\ln t}{L_2(t)}\left(1 + \frac{L_3(t) + \ln\rho + 1 + o(1)}{L_2(t)}\right), \quad t \to \infty.$$

Зауваження 2. Наскільки нам відомо, вперше асимптотична поведінка м. н. екстремальних значень довжини черги для СМО $M/M/m$ вивчалась у статті [7]. На жаль, у випадку $m = \infty$ (нескінченна кількість каналів обслуговування) ця стаття містить одну неточність (лема 4 в [7] не правильна). Тому, крім усього іншого, цю роботу слід розглядати і як виправлення попереднього результату.

Приклад 3 (СМО $M/D/\infty$). Розглянемо систему масового обслуговування з необмеженою кількістю каналів обслуговування, на яку поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ. Різниця від попереднього прикладу полягає лише в тому, що час обслуговування $\eta = b = \text{const}$ м. н.

Як і вище через $Q(t)$ позначаємо довжину черги в момент часу t. Нехай (s_n) деяка зростаюча числова послідовність, для якої $s_{n+1} - s_n \ge b$ і

$$Q_n = Q(s_n), \quad \bar{Q}_n = \max_{1 \le k \le n} Q_n. \tag{61}$$

Якщо через $\nu(t)$ позначимо пуассонівський потік заявок, а $\nu(t_1, t_2)$ — кількість заявок, які надійшли на інтервалі (t_1, t_2), то

$$Q_n = \nu(s_n - b, s_n) \quad \text{м. н.}$$

Тоді

$$\mathbf{P}(Q_n = i) = \frac{(\lambda b)^i}{i!}\exp(-\lambda b), \quad i \ge 0,$$

тобто маємо розподіл Пуассона з параметром λb.

Оскільки інтервали $(s_n - b, s_n)$ та $(s_{n+1} - b, s_{n+1})$ не перетинаються, то (Q_n) — послідовність н.о.р.в.в. з розподілом Пуассона. Застосовуючи наслідок 2, отримаємо таке твердження.

Твердження 3. *Нехай для СМО $M/D/\infty$ максимальна довжина черги $\bar{Q}_n$ визначається формулою (61). Тоді*

$$\mathbf{P}\big(\exists n_0, \forall n \ge n_0 \quad \bar{Q}_n \in J_n = \{a_n + m, m = -1,0,1,2\}\big) = 1$$

і $\forall m \in (-1,0,1,2)$

$$\mathbf{P}(z_n = a_n + m \quad \text{н. ч.}) = 1$$

де a_n задається рівністю (1) і задовольняє асимптотичне співвідношення

$$a_n = \frac{\ln n}{L_2(n)}\left(1 + \frac{L_3(n) + \ln(\lambda b) + 1 + o(1)}{L_2(n)}\right).$$

Автор вдячний анонімному рецензенту, зауваження та пропозиції якого дозволили покращити формулювання основної теореми.

Список літератури

1. C.W. Anderson, *Extreme value theory for a class of discrete distribution with application to some stochastic processes,* J. Appl. Prob., **7** (1970), 99–113.
2. S. Asmussen, *Extreme value theory for queues via cycle maxima*, Extremes, **1** (1998), 137–168.
3. J.W. Cohen, *Extreme values distribution for the M/G/1 and GI/M/1 queueing systems*, Ann. Inst. H. Poincare., Sect.B, **4** (1968), 83–98.
4. J. Galambos, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1978.
5. B.V. Gnedenko, *Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie aleatoire*, Ann. Math., **44** (1943), no. 3, 423–453.
6. B.V. Gnedenko, I.N. Kovalenko, *Introduction to Queueing Theory*, Birkhauser, Boston, 1989.
7. B.V. Dovgay, I.K. Matsak, *The asymptotic behavior of extreme values of queue lengths in M/M/m systems*, Cybernetics and systems analysis, **55** (2019), no. 2, 171–179. (In Ukrainian)
8. H. Hatori, *Some theorems in an extended reneval theory I*, Kodai Math. semin. Repts, **11** (1959), 139–146.
9. D.L. Iglehart, *Extreme values in the GI/G/1 gueue*, Ann. Math. Statist., **43** (1972), 627–635.
10. S. Karlin, *A first course in stochastic processes*, Academic Press, New York, 1968.
11. S. Karlin, J. McGregor, *The clasification of birth and death processes*, Trans. Amer. Math. Soc., **86** (1957), 366–400.
12. M.J. Klass, *The Robbins-Siegmund criterion for partial maxima*, Ann. Probab., **13** (1985), 1369–1370.
13. M. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1983.
14. I.K. Matsak, *Asymptotic behaviour of random variables extreme values. Discrete case*, Ukrainian Math. J., **68** (2016), 945–956. (In Ukrainian)
15. R.F. Serfozo, *Extreme values of birdh and death processes and queues*, Stochastic processes and their applications, **27** (1988), 291–306.
16. F. Spitzer, *Principles of random walk*, Princeton, Toronto, New York, London, 1964.
17. O.K. Zakusylo, I.K. Matsak, *On extreme values of some regenerative processes*, Theory Probab. Math. Statist., **97** (2017), 58–71. (In Ukrainian)

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: `i.m.k@ukr.net`

Стаття надійшла до редколегії 20.06.2019

LIMIT THEOREM FOR EXTREME VALUES OF DISCRETE RANDOM VARIABLES AND ITS APPLICATION

I. K. MATSAK

Abstract. Almost surely asymptotic of extreme values of discrete random variables is obtained in the paper. Applications to birth and death processes and processes specifying queue length are given.