Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 169–188

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 169–188

УДК 519.21

МІНІМІЗАЦІЯ ЕНТРОПІЇ ДЛЯ СУМІШІ СТАНДАРТНОГО І ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКИХ РУХІВ

В. І. МАКОГІН, Ю. С. МІШУРА, Г. С. ЖЕЛЕЗНЯК

Анотація. Розглянуто функціонал ентропійного типу для суми вінерівського процесу та дробового броунівського руху зі зносом. Знайдено розв'язок задачі мінімізації такого функціонала на просторі L_2-функцій. Досліджено властивості норми розв'язку, а також розглянуто варіант задачі мінімізації на просторі сталих функцій. Внаслідок доведеної неперервності зважених інтегральних операторів Рімана – Ліувілля, показано L_2-неперервність розв'язку задачі мінімізації як функції індексу Хюрста.

Ключові слова і фрази. Вінерівський процес, дробовий броунівський рух, похідна Радона – Нікодима, ентропійний функціонал, мінімізація, максимізація.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G22, 60J65; Secondary 94A17.

1. Вступ

Нехай $T > 0$ — фіксоване число, та нехай $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$ — імовірнісний простір із фільтрацією, що задовольняє стандартні умови, і на якому визначено всі об'єкти, що далі розглядаються. Нехай також Q — інша ймовірнісна міра на $(\Omega, \mathcal{F})$.

Означення 1.1. Якщо міра Q абсолютно неперервна відносно міри P, то ентропія міри Q відносно міри P визначається як

$$\mathsf{H}(Q|\mathsf{P}) := \mathsf{E}\left[\frac{dQ}{d\,\mathsf{P}}\log\frac{dQ}{d\,\mathsf{P}}\right].$$

Властивостям ентропії та її застосуванням присвячено багато робіт, відзначимо лише [1, розділ 3, параграф 3.2, с. 121–130] і [2, розділ 6, с. 117–131] та посилання в цих книгах. Наступне майже очевидне твердження є корисним при визначенні інших функціоналів ентропійного типу.

Лема 1.1. *Ентропія* $\mathsf{H}(Q|\mathsf{P}) \ge 0$ *(можливий і випадок* $\mathsf{H}(Q|\mathsf{P}) = +\infty$*), причому* $\mathsf{H}(Q|\mathsf{P}) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $Q = \mathsf{P}$.

Доведення. Дійсно, функція $h(x) = x\log x$ є строго опуклою, звідки за нерівністю Йєнсена

$$\mathsf{H}(Q|\mathsf{P}) = \mathsf{E}\left[h\left(\frac{dQ}{d\,\mathsf{P}}\right)\right] \ge h\left(\mathsf{E}\left[\frac{dQ}{d\,\mathsf{P}}\right]\right) \ge h(1) = 0.$$

Рівність справджується тоді й тільки тоді, коли $Q = \mathsf{P}$. □

Тепер припустимо, що на просторі $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$ задано два незалежні випадкові процеси, а саме, вінерівський процес $W = \{W(t), t\in[0,T]\}$ та дробовий броунівський рух (ДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, $B^H = \left\{B^H(t), t\in[0,T]\right\}$ із середнім $\mathsf{E}B^H(t) = 0$ та коваріацією $\mathsf{E}B^H(t)B^H(s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$. Обидва процеси, таким чином, узгоджені з фільтрацією. Усюди далі у статті розглядається лише випадок $H \in (0, 1/2)$. Розглянемо суму вінерівського процесу та дробового броунівського руху зі зносом, а саме випадковий процес вигляду

$$Z(t) = B^H(t) + W(t) + \int_0^t f(s)ds, \quad t\in[0,T], \tag{1}$$

де $f \in L_2[0,T]$ — невипадкова вимірна функція, що не дорівнює нулю в жодній точці. Нашою першою задачею є усунути зсув, тобто перейти до іншої ймовірнісної міри $\widetilde{Q}$, відносно якої сумарний процес Z з (1) матиме вигляд

$$Z(t) = \widetilde{B}^H(t) + \widetilde{W}(t), \quad t \in [0,T],$$

де $\widetilde{B}^H$ та $\widetilde{W}$ — два незалежні процеси відносно міри $\widetilde{Q}$, $\widetilde{B}^H$ — ДБР, $\widetilde{W}$ — вінерівський процес. Зокрема, можна вважати, що міру замінено таким чином, що зсув $\int_0^t f(s)ds$ усувається за допомогою перетворень

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t f_1(s)ds,$$
$$\widetilde{B}^H(t) = B^H(t) + \int_0^t f_2(s)ds,$$
$$f_1(t) + f_2(t) = f(t).$$

Тепер нашою задачею є оптимальний вибір функцій f_1 та f_2, де оптимальність справджуватиметься в тому розумінні, що буде мінімізовано певний функціонал ентропійного типу. Для суми двох вінерівських процесів відповідну задачу було розглянуто в статтях [3] і [4], а взагалі, задача мінімізації ентропії та ентропійних функціоналів виникає у багатьох застосуваннях, зокрема, у фінансовій математиці, див., наприклад, [6]. За деяких обмежень, ми розглянемо і в яких точках досягається максимум (без всяких обмежень максимум не досягається, і супремум дорівнює нескінченності).

У статті показано, що функціонал $\mathsf{H}(\widetilde{Q}|\mathsf{P})$ можна зобразити як

$$\mathsf{H}_1 = \frac{1}{2}\|(1-\alpha)f\|^2_{L_2[0,T]} + \frac{1}{2}\|(K_0^{H,*}\alpha f)\|^2_{L_2[0,T]},$$

де α — деяка обмежена функція, а $K_0^{H,*}$ — зважений інтегральний оператор Рімана–Ліувілля на $L_2[0,T]$, що буде введено далі.

Основною метою статті є пошук функції α_0, що мінімізує функціонал H_1. У теоремі 3.1 доведено, що мінімізатор α_0 є розв'язком інтегрального рівняння Фредгольма вигляду $\alpha_0(t)f(t) + \mathrm{const}\int_0^T \varkappa_H(t,v)\alpha_0(v)f(v)dv = f(t)$. Ядро $\varkappa_H$ та саме рівняння було розглянуто у [8], де доведено існування розв'язку. У цій статті ми показали, що у розумінні інтегральної норми α_0 лежить між нулем і одиницею. Важливим результатом статті є також неперервність за параметром H зважених інтегральних операторів Рімана–Ліувілля (леми 3.7 та 3.8), і, як наслідок, у теоремі 3.3 доведено неперервність розв'язку α_0 як функції параметра H.

Статтю організовано таким чином. У розділі 2 наведено модифікацію теореми Гірсанова для дробового броунівського руху та означення зважених інтегральних операторів Рімана–Ліувілля. У розділі 3 отримано мінімум ентропійного функціонала. Зокрема, розв'язок задачі мінімізації обчислено як розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма (підрозділ 3.1), а також досліджено L_2-норму розв'язку (підрозділ 3.2). У підрозділі 3.3 розв'язано задачу мінімізації з обмеженнями і знайдено сталу точку мінімуму, яка є правильним поділом. Досліджено також точки максимуму, за наявності обмежень. У підрозділі 3.4 доведено неперервність зважених інтегральних операторів Рімана–Ліувілля, а також неперервність розв'язку задачі мінімізації як функції параметра H.

2. Теорема Гірсанова та її варіанти

Нагадаємо класичну теорему Гірсанова для вінерівського процесу та її модифікацію для дробового броунівського руху.

Теорема 2.1. *Розглянемо випадковий процес $Y = \{Y(t), t \in [0,T]\}$ вигляду*

$$Y(t) = W(t) + \int_0^t a(s)ds, \quad 0 \le t \le T,$$

де $T > 0$, $W = \{W(t), \mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ — вінерівський процес, та $a = a(t) \in L^2([0,T])$ — вимірна невипадкова функція. Покладемо

$$M_t = \exp\biggl(-\int_0^t a(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s)ds\biggr), \quad 0 \le t \le T.$$

Визначимо міру Q_1 на $\mathcal{F}_T$ як $Q_1(\omega) = M_T(\omega)d\,\mathsf{P}(\omega)$. Тоді Q_1 — імовірнісна міра на $\mathcal{F}_T$ та Y — вінерівський процес відносно Q_1.

Отже, відношення вірогідностей для міри, що «усуває» зсув для вінерівського процесу, має вигляд

$$\frac{dQ_W}{d\,\mathsf{P}} = \exp\biggl\{-\int_0^T f_1(t)dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T f_1^2(t)dt\biggr\}.$$

Щоб записати зображення для похідної $\frac{dQ_2}{d\,\mathsf{P}}$, де міра Q_2 «усуватиме» зсув для дробового броунівського руху, введемо такі означення та позначення.

Означення 2.1. Лівосторонній (правосторонній) дробовий інтегральний оператор Рімана – Ліувілля порядку μ, на інтервалі $[0,T]$, від функції φ, визначається для $\mu > 0$ як

$$\bigl(I_{0+}^{\mu}\varphi\bigr)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t (t-z)^{\mu-1}\varphi(z)dz, \quad t \in [0,T],$$

$$\bigl(I_{T-}^{\mu}\varphi\bigr)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_t^T (z-t)^{\mu-1}\varphi(z)dz, \quad t \in [0,T],$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера.

Позначимо далі через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2[0,T]}$ та $\|\cdot\|_{L_2[0,T]}$ скалярний добуток та норму в $L_2[0,T]$. Згідно з оцінками (2.72) і (2.73) з [10], справедливі такі нерівності:

$$\|I_{0+}^{\mu}\varphi\|_{L_2[0,T]} \le \frac{T^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\|\varphi\|_{L_2[0,T]}, \quad \mu > 0, \tag{2}$$

$$\|I_{T-}^{\mu}\varphi\|_{L_2[0,T]} \le \frac{T^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\|\varphi\|_{L_2[0,T]}, \quad \mu > 0. \tag{3}$$

Використовуючи позначення із [7] та [8], визначимо також зважені інтегральні оператори Рімана – Ліувілля

$$\begin{aligned}(K_0^{H,*}\varphi)(t) &= C_1(H)t^{H-\frac{1}{2}}\Bigl(I_{0+}^{\frac{1}{2}-H}\cdot^{\frac{1}{2}-H}\varphi(\cdot)\Bigr)(t) = C_1(H)t^{H-\frac{1}{2}}\Bigl(I_{0+}^{\frac{1}{2}-H}u^{\frac{1}{2}-H}\varphi(u)\Bigr)(t),\\ (K_T^{H,*}\varphi)(t) &= C_1(H)t^{\frac{1}{2}-H}\Bigl(I_{T-}^{\frac{1}{2}-H}\cdot^{H-\frac{1}{2}}\varphi(\cdot)\Bigr)(t) = C_1(H)t^{\frac{1}{2}-H}\Bigl(I_{T-}^{\frac{1}{2}-H}u^{H-\frac{1}{2}}\varphi(u)\Bigr)(t),\end{aligned} \tag{4}$$

де $C_1(H) = \left(\frac{\Gamma(2-2H)}{2H\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-H)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Використовуючи очевидну нерівність $u^{\frac{1}{2}-H} \le t^{\frac{1}{2}-H}$ для всіх $0 \le u \le t$, першу формулу з (4) та нерівність (2), дуже легко побачити, що оператор $K_0^{H,*}$ переводить $L_2[0,T]$ в $L_2[0,T]$. Аналогічно, за допомогою нерівностей

$$|[K_T^{H,*}\varphi](t)| \le \frac{C_1(H)}{\Gamma\bigl(\frac{1}{2}-H\bigr)}\int_t^T \frac{(t/z)^{\frac{1}{2}-H}}{(z-t)^{H+\frac{1}{2}}}|\varphi(z)|dz \le C_1(H)[I_{T-}^{\frac{1}{2}-H}|\varphi|](t), t \in (0,T),$$

та (3), одержуємо, що оператор $K_T^{H,*}$ переводить $L_2[0,T]$ в $L_2[0,T]$. Застосовуючи деякі з означених вище фактів, сформулюємо теорему Гірсанова для дробового броунівського руху.

Теорема 2.2 [8, 9]. *Нехай $B^H = \{B^H(t), t \geq 0\}$ — дробовий броунівський рух, та нехай функція $\varphi \in L_1([0,T])$ задовольняє умову $(K_0^{H,*}\varphi) \in L_2([0,T])$. Тоді процес $\widetilde{B}^H = \widetilde{B}_t^H, t \in [0,T]$ визначений як*

$$\widetilde{B}_t^H = B_t^H + \int_0^t \varphi(s)ds$$

є дробовим броунівським рухом відносно міри Q_H, похідна Радона–Нікодима якої має вигляд

$$\frac{dQ_{B^H}}{d\mathsf{P}} = \exp\left\{-\int_0^T (K_0^{H,*}\varphi)(t)dB(t) - \frac{1}{2}\int_0^T ((K_0^{H,*}\varphi)(t))^2 dt\right\}, \tag{5}$$

де $B = \{B(t), t \geq 0\}$ — той вінерівський процес, який має зображення

$$B(t) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2})}\int_0^t (K_T^{H,*}\mathbb{1}_{[0,t]})(s)dB^H(s) =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - H\right)C_1(H)\Gamma\left(\frac{3}{2} - H\right)\int_0^t s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t u^{H-\frac{1}{2}}(u-s)^{-\frac{1}{2}-H}du\, dB^H(s).$$

Оскільки процеси W та B^H незалежні, то при «усуненні» зсуву ми можемо розглядати лише такі нові міри Q, для яких відношення вірогідностей розпадається в добуток:

$$\frac{dQ}{d\mathsf{P}} = \frac{dQ_W}{d\mathsf{P}} \times \frac{dQ_{B^H}}{d\mathsf{P}},$$

де міра Q_W відповідає вінерівському процесу $\widetilde{W}$, а міра Q_{B^H} — дробовому броунівському руху $\widetilde{B}^H$.

Тепер наша мета — підібрати функції f_1 та f_2 таким чином, щоб вони мінімізували *або максимізували* певні функціонали вигляду

$$\mathsf{E}\left[F\left(\frac{dQ_W}{d\mathsf{P}}, \frac{dQ_{B^H}}{d\mathsf{P}}\right)\right], \tag{6}$$

де $F(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ — деяка невід'ємна вимірна функція. Введемо позначення $f_1(t) = (1-\alpha(t))f(t)$, де α — обмежена вимірна функція. При цьому $f_2(t) = \alpha(t)f(t)$. Оскільки $f \in L_2([0,T])$, то і $f_i \in L_2([0,T]), i = 1,2$. Задача оптимізації функціонала вигляду (6) є досить широкою, тому звузимо її до задачі оптимізації такого функціонала ентропійного типу:

$$\mathsf{H}_1(\mathsf{P}, Q_W, Q_{B^H}) = \mathsf{E}\left[\left(\frac{dQ_W}{d\mathsf{P}}\log\frac{dQ_W}{d\mathsf{P}}\right)\right] + \mathsf{E}\left[\left(\frac{dQ_{B^H}}{d\mathsf{P}}\log\frac{dQ_{B^H}}{d\mathsf{P}}\right)\right]. \tag{7}$$

Лема 2.1. *Функціонал $\mathsf{H}_1(\mathsf{P}, Q_W, Q_{B^H})$ можна звести до вигляду*

$$\mathsf{H}_1(\mathsf{P}, Q_W, Q_{B^H}) = \frac{1}{2}\|(1-\alpha)f\|^2_{L_2[0,T]} + \frac{1}{2}\|(K_0^{H,*}\alpha f)\|^2_{L_2[0,T]}. \tag{8}$$

Доведення. Використовуючи стандартну теорему Гірсанова (теорема 2.1), отримуємо такий вираз для першого доданка правої частини (7):

$$\mathsf{E}\left[\left(\frac{dQ_W}{d\mathsf{P}}\log\frac{dQ_W}{d\mathsf{P}}\right)\right] = \mathsf{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T f_1(t)dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T f_1^2(t)dt\right\} \times \right.$$
$$\left. \times \left\{-\int_0^T f_1(t)dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T f_1^2(t)dt\right\}\right].$$

Застосуємо формулу Іто до стохастичної експоненти

$$P_t := \exp\left\{-\int_0^t f_1(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t f_1^2(s)ds\right\},$$

для якої $\mathsf{E}P_t = 1$, й одержимо, що

$$P_T = 1 - \int_0^T P_t f_1(t) dW(t).$$

Отже,

$$\mathsf{E}\left[\left(1 - \int_0^T P_t f_1(t) dW(t)\right) \times \left\{-\int_0^T f_1(t) dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T f_1^2(t) dt\right\}\right] = \\ = \mathsf{E}\left[\int_0^T P_t f_1^2(t) dt\right] - \frac{1}{2}\int_0^T f_1^2(t) dt = \frac{1}{2}\int_0^T f_1^2(t) dt.$$

Другий доданок із (7) перетворюється повністю аналогічно, із застосуванням теореми Гірсанова (теорема 2.2) для дробового броунівського руху, та відповідної стохастичної експоненти (5). □

3. Мінімізація та максимізація функціоналів ентропійного типу

Мінімізацію чи максимізацію інтегральних функціоналів можна проводити різними методами, у тому числі шляхом зведення до більш або менш стандартних задач варіаційного числення. Ми застосуємо прямий метод диференціювання функціонала за параметром, щоб знайти інтегральне рівняння для мінімізуючої функції, а потім скористаємось тим фактом, що це рівняння було вивчене у статті [8] при дослідженні малих відхилень для змішаного процесу, який є сумою вінерівського і дробового броунівського процесів, як і в нашій статті.

3.1. **Знаходження розв'язку задачі мінімізації як розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма.** Із метою спрощення позначень, праву частину формули (8) позначимо $\mathbf{H}(\alpha)$. Таким чином,

$$\mathbf{H}(\alpha) := \frac{1}{2}\|(1-\alpha)f\|^2_{L_2[0,T]} + \frac{1}{2}\|K_0^{H,*}(\alpha f)\|^2_{L_2[0,T]}. \tag{9}$$

Розглянемо значення функціонала $\mathbf{H}$ від функції $\alpha(t) + \varepsilon\beta(t)$, де $\varepsilon \in \mathbb{R}$, β — довільна обмежена вимірна функція:

$$\mathbf{H}(\alpha + \varepsilon\beta) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\left(K_0^{H,*}((\alpha + \varepsilon\beta) f)\right)(t)\right)^2 dt + \\ + \frac{1}{2}\int_0^T ((1 - \alpha - \varepsilon\beta) f)(t))^2 dt =: \mathsf{K}_1(\varepsilon) + \mathsf{K}_2(\varepsilon).$$

Лема 3.1. *Похідна функціонала $\mathbf{H}(\alpha + \varepsilon\beta)$ в точці $\varepsilon = 0$ для довільної обмеженої вимірної функції β така:*

$$\mathbf{H}'_\varepsilon(\alpha + \varepsilon\beta)\big|_{\varepsilon=0} = \int_0^T \left(K_0^{H,*}(\beta f)\right)(t)\left(K_0^{H,*}(\alpha f)\right)(t) dt + \int_0^T ((\alpha - 1)\beta f^2)(t) dt, \tag{10}$$

причому обидва інтеграли у правій частині (10) *коректно означені.*

Доведення. Подамо перший доданок у вигляді

$$\mathsf{K}_1(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\left(K_0^{H,*}((\alpha + \varepsilon\beta) f)\right)(t)\right)^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^T \left[\left(\left(K_0^{H,*}(\alpha f)\right)(t)\right)^2 + \\ + 2\varepsilon\left(K_0^{H,*}(\alpha f)\right)(t)\left(K_0^{H,*}(\beta f)\right)(t) + \varepsilon^2\left(\left(K_0^{H,*}(\beta f)\right)(t)\right)^2\right] dt.$$

Тому похідну від першого доданка по ε запишемо як

$$\mathsf{K}'_1(\varepsilon) = \int_0^T \left(K_0^{H,*}(\alpha f)\right)(t)\left(K_0^{H,*}(\beta f)\right)(t) dt + \varepsilon\int_0^T \left(\left(K_0^{H,*}(\beta f)\right)(t)\right)^2 dt,$$

а похідну від другого доданка по ε, відповідно як

$$\mathsf{K}_2'(\varepsilon) = \int_0^T ((\alpha - 1)\beta f^2)(t)dt + \varepsilon \int_0^T (\beta^2 f^2)(t)dt.$$

Покладемо $\varepsilon = 0$ в обох доданках і отримаємо шуканий вигляд похідної (10). Коректна означеність всіх інтегралів випливає з обмеженості α і β та того факту, що оператор $K_0^{H,*}$ переводить $L_2[0,T]$ в $L_2[0,T]$. □

Зауваження 3.1. Таким чином, якщо функціонал $\mathbf{H}(\alpha)$ досягає мінімуму або максимуму на деякій обмеженій функції α, то для будь-якої обмеженої функції β справедливе рівняння

$$\int_0^T \Big(K_0^{H,*}(\beta f)\Big)(t)\Big(K_0^{H,*}(\alpha f)\Big)(t)dt + \int_0^T \big((\alpha - 1)\beta f^2\big)(t)dt = 0. \tag{11}$$

Більше того, оскільки друга похідна

$$\mathbf{H}_\varepsilon''(\alpha + \varepsilon\beta) = \int_0^T (\beta^2 f^2)(t)dt + \int_0^T \Big(\Big(K_0^{H,*}(\beta f)\Big)(t)\Big)^2 dt > 0,$$

для функцій β, не рівних нулю тотожно, то максимуму в таких точках бути не може.

Лема 3.2. *Якщо для довільної обмеженої вимірної функції* β *похідна функціонала* $\mathbf{H}(\alpha+\varepsilon\beta)$ *в точці* $\varepsilon = 0$ *дорівнює нулю, то функція* α *задовольняє таке інтегральне рівняння:*

$$\begin{gathered}(\alpha(t) - 1)f(t) + C_1(H)t^{\frac12 - H} I_{T-}^{\frac12 - H}\Big(K_0^{H,*}(\alpha f)(v)v^{H-\frac12}\Big)(t) = 0,\\ \textit{або}\\ (\alpha(t) - 1)f(t) + K_T^{H,*}\Big[K_0^{H,*}(\alpha f)\Big](t) = 0,\end{gathered} \tag{12}$$

майже скрізь відносно міри Лебега.

Доведення. Звернемось до рівняння (11) і зауважимо, що для $0 < \gamma < 1$, $f \in L_p[a,b]$ та $g \in L_q[a,b]$, $p, q > 1$, $\frac1p + \frac1q \le 1 + \gamma$, згідно із [10], справедлива наступна формула інтегрування частинами дробових інтегралів:

$$\int_a^b g(x)(I_{0+}^{\alpha} f)(x)dx = \int_a^b f(x)(I_{b-}^{\alpha} g)(x)dx. \tag{13}$$

Використовуючи формулу (13) при $p = q = 2, \gamma = 1/2 - H$, перепишемо перший доданок (11) у вигляді

$$\begin{aligned}\int_0^T &\Big(K_0^{H,*}(\beta f)\Big)(t)\Big(K_0^{H,*}(\alpha f)\Big)(t)dt = \\ &= C_1(H)\int_0^T t^{H-\frac12}\Big(I_{0+}^{\frac12 - H}(u^{\frac12 - H}(\beta f)(u))\Big)(t)\Big(K_0^{H,*}(\alpha f)\Big)(t)dt = \\ &= C_1(H)\int_0^T \Big(I_{0+}^{\frac12 - H}(u^{\frac12 - H}(\beta f)(u))\Big)(t)t^{H-\frac12}\Big(K_0^{H,*}(\alpha f)\Big)(t)dt = \\ &= C_1(H)\int_0^T t^{\frac12 - H}(\beta f)(t)\Big(I_{T-}^{\frac12 - H}\Big(\Big(K_0^{H,*}(\alpha f)\Big)(v)v^{H-\frac12}\Big)(t)\Big)dt = \\ &= C_1(H)\int_0^T \beta(t)\Big(t^{\frac12 - H}f(t)I_{T-}^{\frac12 - H}\Big(\Big(K_0^{H,*}(\alpha f)\Big)(v)v^{H-\frac12}(t)\Big)(t)\Big)dt.\end{aligned} \tag{14}$$

Після цих перетворень рівняння (11) набуває вигляду

$$\int_0^T \beta(t)f(t)\Big[(\alpha(t)-1)f(t)+ \\ + C_1(H)\Big(t^{\frac{1}{2}-H}I_{T-}^{\frac{1}{2}-H}\Big(\Big(K_0^{H,*}(\alpha f)\Big)(v)v^{H-\frac{1}{2}}(t)\Big)(t)\Big)\Big]dt=0. \quad (15)$$

Позначимо

$$\delta(t)=f(t)\Big[(\alpha(t)-1)f(t)+C_1(H)t^{\frac{1}{2}-H}I_{T-}^{\frac{1}{2}-H}\Big(\Big(K_0^{H,*}(\alpha f)\Big)(v)v^{H-\frac{1}{2}}(t)\Big)(t)\Big],$$

і для кожного $C>0$ розглянемо таку функцію $\beta(t)$:

$$\beta(t)=\beta_C(t)=\delta(t)1\{|\delta(t)|\le C\}.$$

Очевидно, всі ці функції є вимірними та обмеженими. Тоді з (15) випливає, що

$$\int_0^T \delta^2(t)1\{|\delta(t)|\le C\}dt=0.$$

У силу довільного вибору $C>0$, а також того припущення, що функція f не дорівнює нулю в жодній точці, ми одержуємо рівняння (12). □

Позначимо $\alpha(t)f(t)=g(t)$, тоді рівняння (12) запишемо як

$$g(t)+C_1(H)t^{\frac{1}{2}-H}I_{T-}^{\frac{1}{2}-H}\Big(K_0^{H,*}(g)(v)v^{H-\frac{1}{2}}\Big)(t)=f(t),$$

або (16)

$$g(t)+K_T^{H,*}\Big[K_0^{H,*}g\Big](t)=f(t)$$

майже скрізь відносно міри Лебега. Якщо використати означення дробового інтеграла та позначити $C_2(H)=\left(\frac{C_1(H)}{\Gamma(1/2-H)}\right)^2$, то ліва частина рівняння (16) дорівнюватиме

$$g(t)+C_1(H)\frac{t^{\frac{1}{2}-H}}{\Gamma(\frac{1}{2}-H)}\int_t^T(z-t)^{-\frac{1}{2}-H}\Big(K_0^{H,*}g\Big)(z)z^{H-\frac{1}{2}}dz= \\ =g(t)+C_2(H)t^{\frac{1}{2}-H}\int_t^T(z-t)^{-\frac{1}{2}-H}z^{2H-1}\Big(\int_0^z(z-v)^{-\frac{1}{2}-H}v^{\frac{1}{2}-H}g(v)dv\Big)dz= \\ =g(t)+C_2(H)t^{\frac{1}{2}-H}\Big(\int_0^t g(v)v^{\frac{1}{2}-H}dv\int_t^T(z-t)^{-\frac{1}{2}-H}z^{2H-1}(z-v)^{-\frac{1}{2}-H}dz+ \\ +\int_t^T v^{\frac{1}{2}-H}g(v)\int_v^T(z-t)^{-\frac{1}{2}-H}z^{2H-1}(z-v)^{-\frac{1}{2}-H}dz\Big). \quad (17)$$

Тепер визначимо інтегральне ядро $\varkappa_H(t,v)$ за формулою

$$\varkappa_H(t,v)=(tv)^{1/2-H}\int_t^T(z-t)^{-1/2-H}z^{2H-1}(z-v)^{-1/2-H}\,dz1_{\{0\le v<t\le T\}}+ \\ +(tv)^{1/2-H}\int_v^T(z-t)^{-1/2-H}z^{2H-1}(z-v)^{-1/2-H}\,dz1_{\{0\le t<v\le T\}}. \quad (18)$$

З урахуванням вигляду цього інтегрального ядра, рівняння (16) перетвориться на інтегральне рівняння Фредгольма другого роду:

$$g(t)+C_2(H)\int_0^T\varkappa_H(t,v)g(v)dv=f(t) \quad (19)$$

майже скрізь відносно міри Лебега. Рівняння (19) розглянуто у статті [8], де було доведено, що для будь якої функції $f=f(t)\in L_2([0,T])$ воно має єдиний розв'язок

$g = g(t) \in L_2([0,T])$, причому ця функція g є розв'язком задачі мінімізації функціонала (8), якщо позначити в ньому $g = \alpha f$. Із цього безпосередньо випливає наступний результат.

Теорема 3.1. *Нехай $H < 1/2$, функція $f \in L_2([0,T])$, і при цьому функція g/f, де g — єдиний розв'язок рівняння* (19), *є обмеженою. Тоді існує єдина вимірна обмежена функція $\alpha_0 = \alpha_0(t)$, що є розв'язком задачі мінімізації функціонала* (8), *причому ця функція $\alpha_0(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$.*

Зауваження 3.2. Якщо розглядати розв'язок задачі мінімізації як функцію g, що задовольняє рівняння (19), то умови існування мінімізатора очевидним чином спрощуються до умови $f \in L_2[0,T]$.

3.2. **Властивості L_2-норми мінімізатора.** У цьому розділі знайдемо верхню й нижню межу інтегральної норми розв'язку рівняння (12).

Лема 3.3. *Нехай виконуються умови теореми 3.1. Тоді*

$$0 < \|\alpha_0 f\|^2_{L_2[0,T]} < \langle \alpha_0, f^2 \rangle_{L_2[0,T]} < \|f\|^2_{L_2[0,T]}. \tag{20}$$

Доведення. Позначимо через A_H інтегральний оператор $A_H : L_2[0,T] \to L_2[0,T]$, що задається ядром $\varkappa_H$ (18), тобто

$$A_H x(t) = C_2(H) \int_0^T \varkappa_H(t,s) x(s) ds, t \in [0,T],\ x \in L_2[0,T].$$

Тоді розв'язок α_0 рівняння (12) задовольняє рівність $f = (A_H + I)(\alpha_0 f)$, де I — тотожний оператор. Із формул (14)–(15) та (17) випливає, що

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\alpha) &= \frac{1}{2}\|(1-\alpha)f\|^2_{L_2[0,T]} + \frac{1}{2}\|K_0^{H,*}(\alpha f)\|^2_{L_2[0,T]} = \\
&= \frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2[0,T]} + \frac{1}{2}\langle \alpha f, \alpha f - 2f \rangle_{L_2[0,T]} + \frac{1}{2}\langle \alpha f, A_H(\alpha f) \rangle_{L_2[0,T]} = \\
&= \frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2[0,T]} - \frac{1}{2}\langle \alpha f, f \rangle_{L_2[0,T]} + \frac{1}{2}\langle \alpha f, (A_H + I)(\alpha f) - f \rangle_{L_2[0,T]}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Тому мінімальне значення функціонала, тобто $\mathbf{H}(\alpha_0)$, можна подати у вигляді

$$\mathbf{H}(\alpha_0) = \frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2[0,T]} - \frac{1}{2}\langle \alpha_0 f, f \rangle_{L_2[0,T]} = \frac{1}{2}\int_0^T f^2(t)(1 - \alpha_0(t)) dt.$$

З очевидної нерівності $\mathbf{H}(\cdot) > 0$ маємо

$$\langle \alpha_0, f^2 \rangle_{L_2[0,T]} < \|f\|^2_{L_2[0,T]}.$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_0, f^2 \rangle_{L_2[0,T]} &= \langle \alpha_0 f, f \rangle_{L_2[0,T]} = \langle \alpha_0 f, A_H \alpha_0 f + \alpha_0 f \rangle_{L_2[0,T]} = \\
&= \|\alpha_0 f\|^2_{L_2[0,T]} + \langle \alpha_0 f, A_H \alpha_0 f \rangle_{L_2[0,T]} > \|\alpha_0 f\|^2_{L_2[0,T]},
\end{aligned}$$

оскільки оператор A_H — додатно визначений. □

3.3. **Задача мінімізації з обмеженнями.** Зауважимо, що нерівності (20) означають, що мінімізатор α_0 задовольняє таке обмеження: у розумінні інтегральної норми α_0 лежить між нулем і одиницею. Поставимо відповідну задачу мінімізації з поточковим обмеженням, а саме, нехай треба знайти мінімум функціонала $\mathbf{H}(\alpha)$ з (9) за додаткового обмеження $0 \le \alpha(t) \le 1$. Таку функцію назвемо правильним поділом. Знайдемо правильний поділ лише серед сталих функцій, тобто у випадку, коли $\alpha = \alpha(t)$ є сталою. Але, якщо такий правильний поділ міститься між нулем і одиницею, то можна поставити питання, в якій крайній точці — в нулі чи в одиниці, досягається максимум функціонала $\mathbf{H}(\cdot)$. У наступній лемі нам знадобиться позначення $C_3(H,T) = \frac{\sqrt{C_2(H)}}{1/2-H}T^{1/2-H}$.

Лема 3.4. *1) Серед усіх сталих функцій мінімум функціонала* (9) *досягається в точці*

$$\alpha_0 = \frac{\|f\|^2_{L_2[0,T]}}{\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]} + \|f\|^2_{L_2[0,T]}} \tag{22}$$

і дорівнює $\frac{1}{2}\frac{\|f\|^2_{L_2[0,T]}\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}}{\|f\|^2_{L_2[0,T]}+\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}}$, *причому точка* α_0 *є правильним поділом.*

2) Якщо $C_3(H,T) < 1$, *то для будь-якої функції* $f \in L_2[0,T]$ *максимум функціонала* (9) *досягається в точці* $\alpha = 0$ *і дорівнює* $\frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2[0,T]}$.

3) Якщо $C_3(H,T) \geq 1$, *то залежно від значення параметра* H *та функції* f, *максимум функціонала* (9) *може досягатися як у точці* $\alpha = 0$, *так і в точці* $\alpha = 1$. *Зокрема:*

(i) Якщо $C_3(H,T) = 1$, *а функція* $f = 1$ *та* $H = 1/4$, *то максимум функціонала* (9) *досягається в точці* $\alpha = 0$.

(ii) Якщо значення T *є достатньо великим, а функція* f *степенева, то для будь-яких* $H \in (0, \frac{1}{2})$ *максимум функціонала* (9) *досягається в точці* $\alpha = 1$.

Доведення. 1) Якщо розглядати лише сталі функції α, то функціонал (9) можна переписати у вигляді

$$\mathbf{H}(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]} + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2\|f\|^2_{L_2[0,T]},$$

тобто ми одержуємо квадратичну функцію від α. Знайдемо точки максимуму та мінімуму цієї функції. Очевидно,

$$\mathbf{H}^{'}(\alpha) = \alpha\Big[\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]} + \|f\|^2_{L_2[0,T]}\Big] - \|f\|^2_{L_2[0,T]},$$

звідки єдина точка мінімуму визначається рівнянням (22). Очевидно, що ця точка одночасно задовольняє умову $\alpha_0 \in (0,1)$, тобто точка, в якій досягається мінімум серед усіх сталих, є правильним поділом. Знайдемо відповідне значення мінімуму:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\alpha_0) &= \frac{\alpha_0^2}{2}\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]} + \frac{(1-\alpha_0)^2}{2}\|f\|^2_{L_2[0,T]} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\|f\|^2_{L_2[0,T]}}{\|f\|^2_{L_2[0,T]} + \|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}}\right)^2\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\|f\|^2_{L_2[0,T]}}{\|f\|^2_{L_2[0,T]} + \|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}}\right)^2\|f\|^2_{L_2[0,T]} = \\
&= \frac{\|f\|^4_{L_2[0,T]}\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}}{2\Big(\|f\|^2_{L_2[0,T]} + \|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}\Big)^2} + \frac{\|K_0^{H,*}f\|^4_{L_2[0,T]}\|f\|^2_{L_2[0,T]}}{2\Big(\|f\|^2_{L_2[0,T]} + \|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}\Big)^2} = \\
&= \frac{\|f\|^2_{L_2[0,T]}\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}\Big(\|f\|^2_{L_2[0,T]} + \|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}\Big)}{2\Big(\|f\|^2_{L_2[0,T]} + \|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}\Big)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{\|f\|^2_{L_2[0,T]}\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}}{\|f\|^2_{L_2[0,T]} + \|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}}.
\end{aligned}$$

2) Тепер порівняємо значення функціонала (9) у крайніх сталих точках правильного поділу, тобто при $\alpha = 0$ і $\alpha = 1$:

$$\mathbf{H}(0) = \frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2[0,T]}, \quad \mathbf{H}(1) = \frac{1}{2}\|K_0^{H,*}f\|^2_{L_2[0,T]}.$$

Оскільки

$$\left(K_0^{H,*}f\right)(t) = \sqrt{C_2(H)}t^{H-\frac{1}{2}}\int_0^t \frac{z^{\frac{1}{2}-H}}{(t-z)^{H+\frac{1}{2}}}f(z)dz$$

та

$$\left|t^{H-\frac{1}{2}}\int_0^t \frac{z^{\frac{1}{2}-H}}{(t-z)^{H+\frac{1}{2}}}f(z)dz\right| \le \int_0^t |f(z)|(t-z)^{-H-1/2}dz = \Gamma(1/2-H)(I_{0+}^{1/2-H}|f|)(t),$$

то норму оператора $\left(K_0^{H,*}f\right)(t)$ оцінимо за допомогою нерівності (2.72) з [10] таким чином:

$$\|K_0^{H,*}f\|\|_{L_2[0,T]} \le C_3(H,T)\|f\|_{L_2[0,T]}, \quad C_3(H,T) = \frac{\sqrt{C_2(H)}}{1/2-H}T^{1/2-H}. \tag{23}$$

Якщо $C_3(H,T) \le 1$, то максимум функціонала (9) досягається в точці $\alpha = 0$ і дорівнює $\frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2[0,T]}$.

3) (i) Нехай $f(t) = 1$. Тоді

$$\left[K_0^{H,*}1\right](t) = \frac{C_1(H)t^{H-1/2}}{\Gamma(1/2-H)}\int_0^t (t-u)^{-1/2-H}u^{1/2-H}du =$$
$$= \frac{C_1(H)}{\Gamma(1/2-H)}B\left(\frac{1}{2}-H, \frac{3}{2}-H\right)t^{1/2-H} = \frac{C_1(H)\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(2-2H)}t^{1/2-H}.$$

Тому в цьому випадку

$$\mathbf{H}(1) = \frac{1}{2}\|K_0^{H,*}f\|\|^2_{L_2[0,T]} = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1(H)\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(2-2H)}\right)^2\frac{T^{2-2H}}{2-2H}.$$

Очевидно, $\mathbf{H}(0) = T/2$. Отже,

$$\frac{\mathbf{H}(1)}{\mathbf{H}(0)} = T^{1-2H}\frac{C_1^2(H)\Gamma^2(3/2-H)}{\Gamma^2(2-2H)}.$$

Якщо $C_3(H,T) = 1$, тобто $T^{1/2-H} = \frac{1/2-H}{\sqrt{C_2(H)}}$, то

$$\frac{\mathbf{H}(1)}{\mathbf{H}(0)} = \frac{(1/2-H)^2C_1^2(H)\Gamma^2(3/2-H)\Gamma^2(1/2-H)}{C_1^2(H)\Gamma^2(2-2H)} = \frac{\Gamma^4(3/2-H)}{\Gamma^2(2-2H)}.$$

Нехай $H = 1/4$, тоді $\Gamma^4(\frac{3}{2}-H) = \Gamma^4(\frac{5}{4}) = 0.6750$, а $\Gamma^2(\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{4} = 0.7853$. Отже, справедлива нерівність $\mathbf{H}(1) < \mathbf{H}(0)$, тому максимум функціонала досягається в точці $\alpha = 0$.

(ii) Нехай значення $\nu > 0$ фіксовано. Розглянемо степеневу функцію $f(t) = t^\nu$, $t \in (0,T)$. Для цієї функції виконуються такі рівності.

$$\mathbf{H}(0) = \frac{1}{2}\int_0^T t^{2\nu}dt = \frac{T^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)},$$

$$\mathbf{H}(1) = \frac{1}{2}\|K_0^{H,*}t^\nu\|\|^2_{L_2[0,T]} = \frac{C_2(H)}{2}\int_0^T\left(t^{H-1/2}\int_0^t u^{\nu+1/2-H}(t-u)^{-1/2-H}du\right)^2dt =$$
$$= \frac{C_2(H)}{2}\int_0^T\left(t^{\nu+1/2-H}B\left(\nu+\frac{3}{2}-H, \frac{1}{2}-H\right)\right)^2dt =$$
$$= \frac{C_2(H)}{2}\left(\frac{\Gamma(\nu+3/2-H)\Gamma(1/2-H)}{\Gamma(\nu+2-2H)}\right)^2\int_0^T t^{2\nu-2H+1}dt = C_\nu\frac{T^{2(\nu-H+1)}}{2(\nu-H+1)},$$

де $C_\nu = \frac{C_2(H)}{2}\left(\frac{\Gamma(\nu+3/2-H)\Gamma(1/2-H)}{\Gamma(\nu+2-2H)}\right)^2$.
Знайдемо границю

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\mathbf{H}(1)}{\mathbf{H}(0)} = \frac{C_\nu(2\nu+1)}{\nu-H+1}T^{1-2H} = +\infty.$$

Це означає, що для всіх досить великих $T>0$ значення $\mathbf{H}(1) > \mathbf{H}(0)$. □

Тепер будемо шукати мінімум серед правильних поділів, що не є сталими. Оскільки такі функції невід'ємні, позначимо їх як x^2.

Лема 3.5.

1) *Нехай функція* $\alpha_0(t) = x^2(t), t \in [0,T]$, *така, що* $\mathbf{H}(\alpha_0) \le \mathbf{H}(\alpha)$ *для всіх обмежених вимірних функцій* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. *Тоді* x *задовольняє таке рівняння:*
$$x(t)[(A_H+I)x^2f - f](t) = 0, t \in [0,T]. \tag{24}$$
2) *Нехай функція* x_0 *задовольняє рівняння* (24)*. Якщо додатково*
$$[(A_H+I)x_0^2f](t) \ge f(t), t\in[0,T], \tag{25}$$
то $\alpha_0(t) = x_0^2(t), t \in [0,T]$, *є мінімізатором функціонала* $\mathbf{H}$ *на просторі всіх правильних поділів.*

Доведення. Нехай $\alpha(t) = x^2(t)$, $t \in [0,T]$, де x — деяка обмежена функція. Нехай h — довільна обмежена функція. Аналогічно до леми 3.3, запишемо різницю $\mathbf{H}((x+h)^2) - \mathbf{H}(x^2)$ у вигляді

$$\begin{aligned}\mathbf{H}((x+h)^2) - \mathbf{H}(x^2) &= \frac{1}{2}\langle (x^2+2xh+h^2)f, (A_H+I)((x^2+2xh+h^2)f) - 2f\rangle_{L_2[0,T]} - \\ &- \frac{1}{2}\langle x^2f, (A_H+I)(x^2f) - 2f\rangle_{L_2[0,T]} = \frac{1}{2}\langle x^2f, (A_H+I)((2xh+h^2)f)\rangle_{L_2[0,T]} + \\ &+ \frac{1}{2}\langle (2xh+h^2)f, (A_H+I)((2xh+h^2)f)\rangle_{L_2[0,T]} + \\ &+ \frac{1}{2}\langle (2xh+h^2)f, (A_H+I)x^2f\rangle_{L_2[0,T]} - \langle (2xh+h^2)f, f\rangle_{L_2[0,T]} = \\ &= 2\langle xhf, (A_H+I)x^2f - f\rangle_{L_2[0,T]} + \langle h^2f, (A_H+I)x^2f - f\rangle_{L_2[0,T]} + \\ &+ \frac{1}{2}\langle (2xh+h^2)f, (A_H+I)((2xh+h^2)f)\rangle_{L_2[0,T]}.\end{aligned} \tag{26}$$

Із виразу (26) випливає, що

$$\mathbf{H}'_\varepsilon((x+\varepsilon h)^2)\big|_{\varepsilon=0} = 2\langle xhf, (A_H+I)x^2f - f\rangle_{L_2[0,T]}.$$

Тому локальний мінімум функціонала $\mathbf{H}$ задовольняє рівняння

$$x(t)[(A_H+I)x^2f - f](t) = 0, t\in[0,T].$$

Якщо при цьому $[(A_H+I)x^2f](t) \ge f(t)$, то права частина рівності (26) обмежена знизу виразом $\frac{1}{2}\langle (2xh+h^2)f, (A_H+I)((2xh+h^2)f)\rangle_{L_2[0,T]}$, що є невід'ємним у силу невід'ємної визначеності оператора A_H+I.

Це означає, що функція x^2 є глобальним мінімумом функціонала $\mathbf{H}$ на просторі додатних обмежених функцій. Більше того, x^2 є правильним поділом. Дійсно, поділимо відрізок $[0,T] = T_0 \cup T_1$, де $T_0 = \{t \in [0,T], x(t) = 0\}$ та $T_1 = \{t \in [0,T], x(t) \ne 0\}$. Тоді $x(t) = 0, t \in T_0$, та $[(A_H+I)x^2f](t) = f(t), t \in T_1$. Звідси маємо $x^2(t)f(t) = f(t) - [A_Hx^2f](t) \le f(t), t\in T_1$. □

Очевидно, що необхідну й достатню умови леми 3.5 задовольняє невід'ємний розв'язок рівняння

$$[(A_H+I)yf](t) = f(t), t\in[0,T].$$

Однак для певних функцій f такого розв'язку не існує, що підтверджується таким прикладом.

Приклад 3.1. Розглянемо функцію

$$f(t) = \left(C_2(H) \int_0^{T/2} \varkappa_H(t,s) ds + 1 \right) \mathbb{1}\left\{ t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \right\} \in L_2[0,T].$$

Необхідна умова (24) набуває вигляду

$$x(t) \left[C_2(H) \int_0^{T/2} \varkappa_H(t,s) x^2(s) f(s) ds + (x^2(t) f(t) - f(t)) \mathbb{1}\left\{ t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \right\} \right] = 0$$

або

$$x(t) \left[C_2(H) \int_0^{T/2} \varkappa_H(t,s) \big(x^2(s) f(s) - 1\big) ds + x^2(t) f(t) - 1 \right] = 0, t \in \left[0, \frac{T}{2}\right],$$

$$x(t) \int_0^{T/2} \varkappa_H(t,s) x^2(s) f(s) ds = 0,\ t \in \left(\frac{T}{2}, 1\right].$$

Достатню умову (25) запишемо як

$$C_2(H) \int_0^{T/2} \varkappa_H(t,s) \big(x^2(s) f(s) - 1\big) ds + x^2(t) f(t) - 1 \geq 0, t \in \left[0, \frac{T}{2}\right],$$

$$\int_0^{T/2} \varkappa_H(t,s) x^2(s) f(s) ds \geq 0,\ t \in \left(\frac{T}{2}, 1\right].$$

Таким чином, знаходимо розв'язок, що задовольняє умови леми 3.5:

$$x_0^2(t) = \frac{1}{C_2(H) \int_0^{T/2} \varkappa_H(t,s) ds + 1} \mathbb{1}\left\{ t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \right\}, t \in [0,T].$$

Очевидно, що x_0^2 є правильним поділом.

Тепер розглянемо рівняння $[(A_H + I) y f](t) = f(t), t \in [0,T]$, що в даному прикладі набуває вигляду

$$C_2(H) \int_0^{T/2} \varkappa_H(t,s) (y(s) f(s) - 1) ds + y(t) f(t) - 1 = 0, t \in \left[0, \frac{T}{2}\right],$$

$$\int_0^{T/2} \varkappa_H(t,s) y(s) f(s) ds = 0,\ t \in \left(\frac{T}{2}, 1\right].$$

Із другої рівності випливає, що у випадку, коли $y(s) \geq 0, s \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$, то $y(s) = 0$, $s \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$. А це суперечить першій рівності. Таким чином, не існує для даної функції f правильного поділу α, що задовольняє рівняння $[(A_H + I)\alpha f](t) = f(t), t \in [0,T]$.

3.4. **Неперервність розв'язку як функції індексу Хюрста.** У цьому підрозділі покажемо неперервність розв'язку задачі мінімізації функціонала як функції параметра H, причому приділимо увагу також і «крайній» точці $H = 1/2$. Із метою доведення наступних результатів нагадаємо узагальнену нерівність Мінковського.

Лема 3.6 [10, формула (1.33)]. *Нехай (S_1, μ_1) та (S_2, μ_2) — два σ-скінченні вимірні простори та $F : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ є вимірною. Тоді для $p \geq 1$*

$$\left[\int_{S_2} \left| \int_{S_1} F(x,y)\, \mu_1(dx) \right|^p \mu_2(dy) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_{S_1} \left(\int_{S_2} |F(x,y)|^p \mu_2(dy) \right)^{\frac{1}{p}} \mu_1(dx). \tag{27}$$

Доведемо спочатку неперервність операторів $K_0^{H,*}$ та $K_T^{H,*}$.

Лема 3.7. *Інтегральні оператори* $K_0^{H,*}$ *та* $K_T^{H,*}$ *є неперервними за нормою відносно* H *на інтервалі* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. *Тобто,*

$$\|K_0^{H\pm\delta,*} - K_0^{H,*}\| \ \to 0, \ \textit{якщо} \ \ \delta \downarrow 0, \ H \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \tag{28}$$

та

$$\|K_T^{H\pm\delta,*} - K_T^{H,*}\| \ \to 0, \ \textit{якщо} \ \ \delta \downarrow 0, \ H \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{29}$$

Доведення. Доведемо неперервність $K_0^{H,*}$ за нормою як функції від H на інтервалі $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Нехай $x \in L_2[0,T]$ і розглянемо, наприклад, границю зліва. При цьому для всіх $0 < \delta < H$ правильні такі рівності:

$$\begin{aligned}
K_0^{H-\delta,*}x(t) - K_0^{H,*}x(t) &= \sqrt{C_2(H-\delta)}t^{H-1/2}\int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}\frac{z^\delta (t-z)^\delta}{t^\delta}x(z)dz - \\
&- \sqrt{C_2(H)}t^{H-1/2}\int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}x(z)dz = \\
&= \left(\sqrt{C_2(H-\delta)} - \sqrt{C_2(H)}\right)t^{H-1/2}\int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}x(z)dz + \\
&+ \sqrt{C_2(H-\delta)}t^{H-1/2}\int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}\left(\frac{z^\delta (t-z)^\delta}{t^\delta} - (t-z)^\delta\right)x(z)dz + \\
&+ \sqrt{C_2(H-\delta)}t^{H-1/2}\int_0^t \frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}\left((t-z)^\delta - 1\right)x(z)dz = \\
&=: \left(\sqrt{C_2(H-\delta)} - \sqrt{C_2(H)}\right)J_1(\delta,x) + \sqrt{C_2(H-\delta)}J_2(\delta,x) + \sqrt{C_2(H-\delta)}J_3(\delta,x).
\end{aligned} \tag{30}$$

Легко бачити, що $\sqrt{C_2(H-\delta)} - \sqrt{C_2(H)} \to 0$, при $\delta \to 0$ та $H \in (0, 0.5)$. Норму інтеграла $J_1(\delta,x)$ оцінимо за допомогою нерівності (23) так:

$$\|J_1(\delta,x)\|_{L_2[0,T]} \le \frac{T^{1/2-H}}{1/2-H}\|x\|_{L_2[0,T]}. \tag{31}$$

Далі, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $x(t) = 0$ за межами інтервалу $[0,T]$. Тоді інтеграл $J_3(\delta,x)$ подамо як

$$\begin{aligned}
J_3(\delta,x) &= \int_0^t \left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H}\left(\frac{1}{(t-z)^{H+1/2-\delta}} - \frac{1}{(t-z)^{H+1/2}}\right)x(z)dz = \\
&= \int_0^T \left(\frac{t-s}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H}\frac{s^\delta - 1}{s^{H+1/2}}x(t-s)ds.
\end{aligned}$$

Застосовуючи узагальнену нерівність Мінковського (27) із $S_1 = S_2 = [0,T]$, маємо

$$\begin{aligned}
\|J_3(\delta,x)\|_{L_2[0,T]} &\le \left[\int_0^T \left(\int_0^T \frac{s^\delta - 1}{s^{H+1/2}}x(t-s)ds\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \overset{(27)}{\le} \\
&\overset{(27)}{\le} \int_0^T \left(\int_0^T \left(\frac{s^\delta - 1}{s^{H+1/2}}\right)^2 x^2(t-s)dt\right)^{\frac{1}{2}} ds \le \int_0^T \frac{|s^\delta - 1|}{s^{H+1/2}}ds\|x\|_{L_2[0,T]}.
\end{aligned} \tag{32}$$

причому $\int_0^T \frac{|s^\delta - 1|}{s^{H+1/2}}ds \to 0$, якщо $\delta \to 0$. До інтеграла $J_2(\delta,x)$ застосуємо наступну нерівність.

$$|J_2(\delta,x)| \le \int_0^t \frac{1}{(t-z)^{H+1/2-\delta}}\left|\frac{z^\delta}{t^\delta} - 1\right||x(z)|dz = |\ (\text{Заміна } z = ty)| =$$

$$= \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{(1-y)^{H+1/2-\delta} t^{H-1/2-\delta}} |x(yt)| dy \le T^{1/2-H+\delta} \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{(1-y)^{H+1/2-\delta}} |x(yt)| dy.$$

Далі знову застосуємо узагальнену нерівність Мінковського (27) із $S_1 = [0,1]$, $S_2 = [0,T]$ до норми $J_2(\delta, x)$:

$$\begin{aligned} \|J_2(\delta,x)\|_{L_2[0,T]} &\le T^{1/2-H+\delta} \left[\int_0^T \left(\int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{(1-y)^{H+1/2-\delta}} |x(yt)| dy \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \overset{(27)}{\le} \\ &\overset{(27)}{\le} T^{1/2-H+\delta} \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{(1-y)^{H+1/2-\delta}} \left(\int_0^T x^2(yt) dt \right)^{1/2} dy \le \\ &\le T^{1/2-H+\delta} \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{(1-y)^{H+1/2-\delta}} \left(\int_0^T x^2(yt) dt \right)^{1/2} dy = \\ &= T^{1/2-H+\delta} \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{y^{1/2}(1-y)^{H+1/2-\delta}} dy \|x\|_{L_2[0,T]}, \end{aligned} \tag{33}$$

причому $\int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{y^{1/2}(1-y)^{H+1/2-\delta}} dy \to 0$, якщо $\delta \to 0$. Твердження леми щодо $K_0^{H-\delta,*}$ тепер безпосередньо випливає із (31), (32) та (33). Наведений спосіб доведення (28) працює також для випадку неперервності справа. Дійсно, нехай $\delta \in \left(0, \frac{1-2H}{4}\right)$, тоді справджуються перетворення

$$\begin{aligned} &K_0^{H+\delta,*}x(t) - K_0^{H,*}x(t) = \\ &= \left(\sqrt{C_2(H+\delta)} - \sqrt{C_2(H)}\right) t^{H+\delta-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H-\delta}}{(t-z)^{H+\delta+1/2}} x(z) dz - \\ &\quad - \sqrt{C_2(H)} t^{H+\delta-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H-\delta}}{(t-z)^{H+\delta+1/2}} \left(\frac{z^\delta (t-z)^\delta}{t^\delta} - (t-z)^\delta \right) x(z) dz - \\ &\quad - \sqrt{C_2(H)} t^{H+\delta-1/2} \int_0^t \frac{z^{1/2-H-\delta}}{(t-z)^{H+\delta+1/2}} \left((t-z)^\delta - 1 \right) x(z) dz = \\ &= \left(\sqrt{C_2(H+\delta)} - \sqrt{C_2(H)}\right) U_1(\delta,x) - \sqrt{C_2(H)} U_2(\delta,x) - \sqrt{C_2(H)} U_3(\delta,x). \end{aligned} \tag{34}$$

Нерівність (3) також забезпечує оцінку

$$\|U_1(\delta,x)\|_{L_2[0,T]} \le \frac{T^{1/2-H-\delta}}{1/2-H-\delta} \|x\|_{L_2[0,T]}. \tag{35}$$

Аналогічно до (32) та (33), доводяться такі нерівності для $\|U_2(\delta,x)\|_{L_2[0,T]}$ та $\|U_3(\delta,x)\|_{L_2[0,T]}$:

$$\|U_2(\delta,x)\|_{L_2[0,T]} \le T^{1/2-H} \int_0^1 \frac{|y^\delta - 1|}{y^{1/2}(1-y)^{H+1/2}} dy \|x\|_{L_2[0,T]}, \tag{36}$$

$$\|U_3(\delta,x)\|_{L_2[0,T]} \le \int_0^T \frac{|s^\delta - 1|}{s^{H+\delta+1/2}} ds \|x\|_{L_2[0,T]}. \tag{37}$$

У підсумку, із нерівностей (35)–(37) випливає твердження (28). Неперервність функціонала $K_T^{H,*}$ отримуємо за схемою, схожою на попереднє доведення цього факту для

$K_0^{H,*}$. Аналогами зображень (30) та (34) є такі рівності:

$$\begin{aligned}
&K_T^{H-\delta,*}x(t) - K_T^{H,*}x(t) = \\
&= \Big(\sqrt{C_2(H-\delta)} - \sqrt{C_2(H)}\Big) t^{1/2-H} \int_t^T \frac{z^{H-1/2}}{(z-t)^{H+1/2}} x(z)dz + \\
&\quad + \sqrt{C_2(H-\delta)} t^{1/2-H} \int_t^T \frac{z^{H-1/2}}{(z-t)^{H+1/2}} \left(\frac{t^\delta (z-t)^\delta}{z^\delta} - (z-t)^\delta \right) x(z)dz + \\
&\quad + \sqrt{C_2(H-\delta)} t^{1/2-H} \int_t^T \frac{z^{H-1/2}}{(z-t)^{H+1/2}} \big((z-t)^\delta - 1\big) x(z)dz =: \\
&=: \Big(\sqrt{C_2(H-\delta)} - \sqrt{C_2(H)}\Big) \tilde{J}_1(\delta, x) + \sqrt{C_2(H-\delta)} \tilde{J}_2(\delta, x) + \sqrt{C_2(H-\delta)} \tilde{J}_3(\delta, x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K_T^{H+\delta,*}x(t) - K_T^{H,*}x(t) = \\
&= \Big(\sqrt{C_2(H+\delta)} - \sqrt{C_2(H)}\Big) t^{1/2-H-\delta} \int_t^T \frac{z^{H+\delta-1/2}}{(z-t)^{H+\delta+1/2}} x(z)dz - \\
&\quad - \sqrt{C_2(H)} t^{1/2-H-\delta} \int_t^T \frac{z^{H+\delta-1/2}}{(z-t)^{H+\delta+1/2}} \left(\frac{t^\delta (z-t)^\delta}{z^\delta} - (z-t)^\delta \right) x(z)dz - \\
&\quad - \sqrt{C_2(H)} t^{1/2-H-\delta} \int_t^T \frac{z^{H+\delta-1/2}}{(z-t)^{H+\delta+1/2}} \big((z-t)^\delta - 1\big) x(z)dz =: \\
&=: \Big(\sqrt{C_2(H+\delta)} - \sqrt{C_2(H)}\Big) \tilde{U}_1(\delta, x) + \sqrt{C_2(H)} \tilde{U}_2(\delta, x) + \sqrt{C_2(H)} \tilde{U}_3(\delta, x).
\end{aligned}$$

Із використанням аргументів, аналогічних до наведених при оцінюванні норм операторів $K_0^{H,*}$, норми інтегралів $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_2$ та $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3$ обмежимо зверху наступними виразами:

$$\|\tilde{J}_1(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} \le \frac{T^{1/2-H}}{1/2-H} \|x\|_{L_2[0,T]}, \quad \|\tilde{U}_1(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} \le \frac{T^{1/2-H-\delta}}{1/2-H-\delta} \|x\|_{L_2[0,T]}$$

та

$$\begin{aligned}
\|\tilde{J}_3(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} &\le \int_0^T \frac{|s^\delta - 1|}{s^{H+1/2}} ds \|x\|_{L_2[0,T]}, \\
\|\tilde{U}_3(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} &\le \int_0^T \frac{|s^\delta - 1|}{s^{H+\delta+1/2}} ds \|x\|_{L_2[0,T]}.
\end{aligned}$$

Застосування узагальненої нерівності Мінковського забезпечує таку оцінку норми інтеграла $\tilde{J}_2(\delta, x)$. Припустимо знову, що $x(t) = 0$ поза інтервалом $(0, T)$, тоді

$$\begin{aligned}
\|\tilde{J}_2(\delta, x)\|_{L_2[0,T]} &= \left[\int_0^T \left(\int_t^T \frac{x(z)}{(z-t)^{H+1/2-\delta}} \left(\frac{t}{z}\right)^{1/2-H} \left(1 - \left(\frac{t}{z}\right)^\delta\right) dz \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left[\int_0^T \left(\int_0^T \frac{x(t+s)}{s^{H+1/2-\delta}} \left(\frac{t}{t+s}\right)^{1/2-H} \left(1 - \left(\frac{t}{t+s}\right)^\delta\right) ds \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \overset{(27)}{\le} \\
&\overset{(27)}{\le} \int_0^T \frac{ds}{s^{H+1/2-\delta}} \left[\int_0^T x^2(t+s) \left(\frac{t}{t+s}\right)^{1-2H} \left(1 - \left(\frac{t}{t+s}\right)^\delta\right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \le \\
&\le \left(\sup_{y \in (0,1)} y^{1-2H} \big(1 - y^\delta\big)^2 \right) \int_0^T \frac{ds}{s^{H+1/2-\delta}} \left[\int_0^T x^2(t+s) dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (38)
\end{aligned}$$

В останньому виразі супремум досягається при $y^\delta = \frac{1-2H}{1-2H+2\delta}$. Тому праву частину (38) оцінимо зверху виразом

$$\left(\frac{1-2H}{1-2H+2\delta}\right)^{\frac{1-2H}{\delta}}\left(\frac{2\delta}{1-2H+2\delta}\right)^2\int_0^T\frac{ds}{s^{H+1/2-\delta}}\left[\int_0^T x^2(t+s)dt\right]^{\frac{1}{2}}\leq$$
$$\leq\frac{4\delta^2}{(1-2H)^2}\int_0^T\frac{ds}{s^{H+1/2-\delta}}\|x\|_{L_2[0,T]}.$$

Застосовуючи аналогічні міркування до оцінки інтеграла $\|\tilde{U}_2(\delta,x)\|_{L_2[0,T]}$, отримаємо

$$\|\tilde{U}_2(\delta,x)\|_{L_2[0,T]}\leq\frac{4\delta^2}{(1-2H)^2}\int_0^T\frac{ds}{s^{H+1/2}}\|x\|_{L_2[0,T]}.$$

У підсумку, неперервність (29) операторів $K_T^{H,*}$ також справджується. □

Тепер розглянемо поведінку операторів $K_0^{H,*}$ та $K_T^{H,*}$ в точці $H=1/2$. Неперервності за нормою не очікуємо, оскільки її нема і для дробових інтегралів, згідно з теоремою 2.6 із [10], тому доведемо поточкову збіжність. Нагадаємо, що оператори $K_0^{\frac{1}{2},*}$ та $K_T^{\frac{1}{2},*}$ є тотожними.

Лема 3.8. *Для будь-якого* $x\in L_2[0,T]$

$$\|K_0^{H,*}x-x\|_{L_2[0,T]}\ \to 0,\ \text{та}\ \|K_T^{H,*}x-x\|_{L_2[0,T]}\ \to 0,\ \text{якщо}\ \ H\uparrow 1/2.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що $C_1(H)\to 1$ при $H\uparrow\frac{1}{2}$. Далі,

$$|K_0^{H,*}x(t)-x(t)|=\left|\sqrt{C_2(H)}t^{H-1/2}\int_0^t\frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}x(z)dz-x(t)\right|\leq$$
$$\leq\frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}t^{H-1/2}\left|\int_0^t\frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}(x(z)-x(t))dz\right|+$$
$$+|x(t)|\left|\sqrt{C_2(H)}t^{H-1/2}\int_0^t\frac{z^{1/2-H}}{(t-z)^{H+1/2}}dz-1\right|\leq$$
$$\leq\frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}\int_0^t\frac{|x(z)-x(t)|}{(t-z)^{H+1/2}}dz+$$
$$+|x(t)|\left|t^{\frac{1}{2}-H}\frac{C_1(H)B\left(\frac{3}{2}-H,\frac{1}{2}-H\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}-1\right|.\tag{39}$$

Норма першого інтеграла $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}\int_0^t\frac{|x(z)-x(t)|}{(t-z)^{H+1/2}}dz$ прямує до нуля при $H\uparrow\frac{1}{2}$, як показано у доведенні теореми 2.6 із [10]. Оскільки

$$\frac{C_1(H)B\left(\frac{3}{2}-H,\frac{1}{2}-H\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}=C_1(H)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}{\Gamma(2-2H)}\to 1, H\uparrow\frac{1}{2},$$

то норма другого доданка у (39) прямує до нуля внаслідок теореми Лебега про мажоровану збіжність.

Аналогічна до (39) нерівність для $K_T^{H,*}$ має вигляд

$$|K_T^{H,*}x(T-t)-x(T-t)|=\left|\sqrt{C_2(H)}\int_{T-t}^T\frac{((T-t)/z)^{\frac{1}{2}-H}x(z)}{(z-T+t)^{H+\frac{1}{2}}}dz-x(T-t)\right|=$$
$$=\left|\sqrt{C_2(H)}(T-t)^{\frac{1}{2}-H}\int_0^t\frac{(T-y)^{H-\frac{1}{2}}x(T-y)}{(t-y)^{H+\frac{1}{2}}}dy-x(T-t)\right|\leq$$

$$\leq \frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}\left|\int_0^t \frac{(T-t)^{\frac{1}{2}-H}}{(T-y)^{\frac{1}{2}-H}} \frac{x(T-y)-x(T-t)}{(t-y)^{H+1/2}} dy\right| +$$
$$+|x(T-t)|\left|\sqrt{C_2(H)}(T-t)^{\frac{1}{2}-H}\int_0^t \frac{(T-y)^{H-\frac{1}{2}}}{(t-y)^{H+\frac{1}{2}}} dy-1\right| \leq$$
$$\leq \frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}\int_0^t \frac{|x(T-z)-x(T-t)|}{(t-z)^{H+1/2}} dz +$$
$$+|x(t)|\left|C_1(H)(T-t)^{\frac{1}{2}-H} I_{0+}^{\frac{1}{2}-H}[(T-y)^{H-\frac{1}{2}}](t)-1\right|. \tag{40}$$

$L_2[0,T]$ — норма першого інтеграла із (40) прямує до нуля, аналогічно до норми першого інтеграла правої частини (39). Позначимо через $\mathbf{1}(\cdot)$ сталу функцію зі значенням 1. Щодо другого доданка правої частини (40) запишемо нерівність

$$\left|C_1(H)(T-t)^{\frac{1}{2}-H} I_{0+}^{\frac{1}{2}-H}[(T-y)^{H-\frac{1}{2}}](t)-1\right| \leq \left|C_1(H) I_{0+}^{\frac{1}{2}-H}[\mathbf{1}](t)-1\right| +$$
$$+C_1(H)\left|(T-t)^{\frac{1}{2}-H} I_{0+}^{\frac{1}{2}-H}[(T-y)^{H-\frac{1}{2}}](t)-I_{0+}^{\frac{1}{2}-H}[\mathbf{1}](t)\right|. \tag{41}$$

Перший доданок прямує до нуля поточково, оскільки $I_{0+}^{\frac{1}{2}-H}[\mathbf{1}](t)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)} t^{1/2-H}$. Другий доданок можна обмежити зверху виразом

$$\frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}\int_0^t\left|\left(\frac{T-t}{T-y}\right)^{\frac{1}{2}-H}-1\right| \frac{dy}{(t-y)^{H+\frac{1}{2}}} =$$
$$=\frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}\int_0^t\left(1-\left(\frac{T-t}{T-y}\right)^{\frac{1}{2}-H}\right) \frac{dy}{(t-y)^{H+\frac{1}{2}}} \leq$$
$$\leq \frac{C_1(H)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-H\right)}\int_0^t\left(1-\frac{(T-t)^{\frac{1}{2}-H}}{T^{\frac{1}{2}-H}}\right) \frac{dy}{(t-y)^{H+\frac{1}{2}}} =$$
$$=\frac{C_1(H) t^{\frac{1}{2}-H}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}\left(1-\frac{(T-t)^{\frac{1}{2}-H}}{T^{\frac{1}{2}-H}}\right),$$

що збігається до нуля при $H \uparrow \frac{1}{2}$. Таким чином, $L_2[0,T]$-норма лівої частини (41) прямує до 0 за теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Підсумовуючи викладені оцінки, отримуємо справедливість твердження леми. □

Теорема 3.2.

1) *Оператор $A_H=K_T^{H,*} K_0^{H,*}$ є неперервним за нормою відносно H на інтервалі $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Тобто,*

$$\lim_{\delta \to 0}\|A_H-A_{H \pm \delta}\|=0, H \in\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

2) *Крім того для будь-якого $x \in L_2[0,T]$*

$$\lim_{H \to 1/2-}\|A_H x-x\|_{L_2[0,T]}=0. \tag{42}$$

Доведення. 1) Нехай $H \in\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Тоді для $x \in L_2[0,T]$ маємо

$$\|A_H x-A_{H+\delta} x\|_{L_2[0,T]}=\|K_T^{H+\delta,*} K_0^{H+\delta,*} x-K_T^{H,*} K_0^{H,*} x\|_{L_2[0,T]} \leq$$
$$\leq\|K_T^{H+\delta,*} K_0^{H+\delta,*} x-K_T^{H,*} K_0^{H+\delta,*} x\|_{L_2[0,T]}+$$
$$+\|K_T^{H,*} K_0^{H+\delta,*} x-K_T^{H,*} K_0^{H,*} x\|_{L_2[0,T]}.$$

Згідно з лемою 3.7 справедлива наступна оцінка.

$$\|K_T^{H+\delta,*}K_0^{H+\delta,*}x - K_T^{H,*}K_0^{H+\delta,*}x\|_{L_2[0,T]} \le \|K_T^{H+\delta,*} - K_T^{H,*}\|\|K_0^{H+\delta,*}x\|_{L_2[0,T]} =$$

$$= \|K_T^{H+\delta,*} - K_T^{H,*}\|\sqrt{C_2(H+\delta)}\left[\int_0^T\left(\int_0^t \frac{t^{H+\delta-1/2}z^{1/2-H-\delta}}{(t-z)^{H+\delta+1/2}}x(s)ds\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \|K_T^{H+\delta,*} - K_T^{H,*}\|\sqrt{C_2(H+\delta)}\Gamma\left(\frac{1}{2}-H-\delta\right)\left\|I_{0+}^{\frac{1}{2}-H-\delta}|x|\right\|_{L_2[0,T]} \overset{(2)}{\le}$$

$$\overset{(2)}{\le} \|K_T^{H+\delta,*} - K_T^{H,*}\|\sqrt{C_2(H+\delta)}\frac{T^{1/2-H-\delta}}{1/2-H-\delta}\|x\|_{L_2[0,T]},$$

Аналогічно за допомогою (3) отримуємо, що

$$\|K_T^{H,*}K_0^{H+\delta,*}x - K_T^{H,*}K_0^{H,*}x\|_{L_2[0,T]} =$$

$$= \sqrt{C_2(H)}\left[\int_0^T\left(\int_t^T \frac{t^{1/2-H-\delta}z^{H+\delta-1/2}}{(z-t)^{H+\delta+1/2}}\left(K_0^{H+\delta,*}x - K_0^{H,*}x\right)(s)ds\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{C_2(H)}\frac{T^{1/2-H}}{1/2-H}\left\|K_0^{H+\delta,*}x - K_0^{H,*}x\right\|_{L_2[0,T]} \le$$

$$\le \left\|K_0^{H+\delta,*} - K_0^{H,*}\right\|\sqrt{C_2(H)}\frac{T^{1/2-H}}{1/2-H}\|x\|_{L_2[0,T]}.$$

Тому на підставі результатів леми 3.7

$$\frac{\|A_Hx - A_{H+\delta}x\|_{L_2[0,T]}}{\|x\|_{L_2[0,T]}} \to 0, \delta \to 0.$$

2) Розглянемо тепер неперервність у точці $H = 1/2$. Маємо оцінки

$$\|A_Hx - x\|_{L_2[0,T]} = \|K_T^{H,*}K_0^{H,*}x - x\|_{L_2[0,T]} \le$$
$$\le \|K_T^{H,*}K_0^{H,*}x - K_T^{H,*}x\|_{L_2[0,T]} + \|K_T^{H,*}x - x\|_{L_2[0,T]}.$$

Доданок $\|K_T^{H,*}x - x\|_{L_2[0,T]}$ збігається до нуля за лемою 3.8. Внаслідок нерівності $|[K_T^{H,*}\varphi](t)| \le C_1(H)[I_{T-}^{\frac{1}{2}-H}|\varphi|](t), t \in (0,T)$, для будь-якого φ та оцінки (3), маємо

$$\|K_T^{H,*}K_0^{H,*}x - K_T^{H,*}x\|_{L_2[0,T]} = \|K_T^{H,*}(K_0^{H,*}x - x)\|_{L_2[0,T]} \le$$
$$\le C_1(H)\left\|I_{T-}^{\frac{1}{2}-H}|K_0^{H,*}x - x|\right\|_{L_2[0,T]} \le \frac{C_1(H)T^{\frac{1}{2}-H}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}\|K_0^{H,*}x - x\|_{L_2[0,T]}.$$

Останній вираз прямує до нуля при $H \uparrow 1/2$ завдяки твердженню леми 3.8. Отже, збіжність (42) доведено. □

Зауваження 3.3. Нехай $H = 1/2$, тоді $\alpha_0(t) = 1/2, t \in [0,T]$, є мінімізатором функціонала $\mathbf{H}(\cdot)$ на просторі $L_2[0,T]$.

Справді, у цьому випадку $K_0^{\frac{1}{2},*}x = x$, та $K_T^{\frac{1}{2},*}x = x, x \in L_2[0,T]$. Тоді рівняння (11) набуває вигляду $(\alpha(t)-1)f(t)+[K_T^{\frac{1}{2},*}K_0^{\frac{1}{2},*}(\alpha f)](t) = 0$, або $(\alpha(t)-1)f(t)+\alpha(t)f(t) = 0$. Маємо очевидний розв'язок $\alpha_0(t) = \frac{1}{2}, t \in [0,T]$.

Теорема 3.3. *Нехай α_H є мінімізатором функціонала $\mathbf{H}(\cdot)$ для індексу Хюрста H. Якщо $H \in (0, 0.5)$, то $\|\alpha_{H+\delta}f - \alpha_Hf\|_{L_2[0,T]} \to 0$, при $\delta \to 0$, та $\|\alpha_Hf - \frac{1}{2}f\|_{L_2[0,T]} \to \to 0$, при $H \uparrow \frac{1}{2}$.*

Доведення. Нехай $H+\delta, H<\frac{1}{2}$, тоді $g_H(t)=\alpha_H(t)f(t), t\in[0,T]$, є розв'язком рівняння (11), а A_H — інтегральний оператор $A_H: L_2[0,T]\to L_2[0,T]$, що задається ядром $\varkappa_H$ (18). Доведемо, що $g_{H+\delta}\to g_H$ в $L_2[0,T]$ при $\delta\to 0$. Оскільки для довільної $f\in L_2[0,T]$ існує єдиний розв'язок g_H, то визначимо обернений оператор $(I+A_H)^{-1}$ такий, що $g_H=(I+A_H)^{-1}f$. При цьому

$$\|f\|^2_{L_2[0,T]}=\langle g_H+A_H g_H, g_H+A_H g_H\rangle_{L_2[0,T]}\geq \|g_H\|^2_{L_2[0,T]}$$

в силу нерівності $\langle A_H g_H, g_H\rangle_{L_2[0,T]}\geq 0$. Тому $\|(I+A_H)^{-1}\|\leq 1$. Тепер

$$g_{H+\delta}+A_{H+\delta}g_{H+\delta}=f$$

та

$$\begin{aligned}\|g_{H+\delta}-g_H\|_{L_2[0,T]}&=\|(I+A_{H+\delta})^{-1}f-(I+A_H)^{-1}f\|_{L_2[0,T]}\leq\\&\leq\|(I+A_{H+\delta})^{-1}-(I+A_H)^{-1}\|\|f\|_{L_2[0,T]}=\\&=\|(I+A_{H+\delta})^{-1}(A_{H+\delta}-A_H)(I+A_H)^{-1}\|\|f\|_{L_2[0,T]}\leq\\&\leq\|A_{H+\delta}-A_H\|\|f\|_{L_2[0,T]}\to 0\end{aligned}$$

при $\delta\to 0$ згідно з теоремою 3.2.

Друге твердження доводиться аналогічно, також із використанням теореми 3.2. Справді,

$$\begin{aligned}\left\|\alpha_H f-\frac{1}{2}f\right\|_{L_2[0,T]}&=\frac{1}{2}\|(I+A_H)^{-1}[2f]-f\|_{L_2[0,T]}=\\&=\frac{1}{2}\|(I+A_H)^{-1}(2f-(I+A_H)f)\|_{L_2[0,T]}=\\&=\frac{1}{2}\|(I+A_H)^{-1}(f-A_H f)\|_{L_2[0,T]}\leq\frac{1}{2}\|A_H f-f\|_{L_2[0,T]}\to 0\end{aligned}$$

при $H\uparrow\frac{1}{2}$. □

Щодо неперервності норми розв'язку α_0 маємо очевидний наслідок з теореми 3.3.

Наслідок 3.1. *Нехай α_H є мінімізатором функціонала $\mathbf{H}(\cdot)$ для індексу Хюрста H та $\inf_{t\in(0,T)}|f(t)|>0$. Якщо $H\in(0,0.5)$, то $\|\alpha_{H+\delta}-\alpha_H\|_{L_2[0,T]}\to 0$, при $\delta\to 0$, та $\|\alpha_H-\frac{1}{2}\|_{L_2[0,T]}\to 0$, при $H\uparrow\frac{1}{2}$.*

Список літератури

1. H. Föllmer, A. Schied, *Stochastic finance: an introduction in discrete time*, Walter de Gruyter, Berlin, 2002.
2. G. G. Judge, R. C. Mittelhammer, *An Information Theoretic Approach to Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
3. Y. Mishura, H. Zhelezniak, *Extreme measures for entropy functionals*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, (2017), no. 4, 15–20.
4. Y. S. Mishura, H. S. Zhelezniak, *Calculation of extremums of entropy functionals*, Theor. Probability and Math. Statist., **99** (2019), 177–186.
5. M. Avellaneda, C. Friedman, R. Holmes, D. Samperi, *Calibrating volatility surfaces via relative entropy minimization*, Applied Mathematical Finance, (1997), 7–64.
6. C. Leonard, *Minimization of entropy functionals*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier, **346** (2008), no. 1, 183–204.
7. C. Jost, *Transformation formulas for fractional Brownian motion*, Stochastic Processes and their Applications, **116** (2006), no. 10, 1341–1357.
8. A. MacKay, A. Melnikov, Y. Mishura, *Optimization of small deviation for mixed fractional Brownian motion with trend*, Stochastics, **90** (2018), no. 7, 1087–1110.
9. Yu. Mishura, *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*, Springer Science & Business Media, 2008.

10. S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.*, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

Institute of Stochastics, Ulm University, Ulm 89069, Germany
Адреса електронної пошти: vitalii.makogin@uni-ulm.de

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: hanna.zhelezniak@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 12.06.2019

ENTROPY MINIMIZATION FOR A MIXTURE OF STANDARD AND FRACTIONAL BROWNIAN MOTIONS

V. I. MAKOGIN, YU. S. MISHURA, H. S. ZHELEZNIAK

Abstract. In this paper, we consider an entropy-type functional for the sum of the Wiener process and the fractional Brownian motion with a trend. The solution of the minimization problem of such a functional in the space of L_2 -functions is found. The properties of the solution norm are investigated, and also the variant of the minimization problem on the space of constant functions is considered. As a result of the proved continuity of weighted integral Riemann-Liouville operators, L_2 -continuity of the minimization problem solution as a function of the Hurst index is shown.