Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 134–146

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 134–146

УДК 519.21

УМОВИ ВИБІРКОВОЇ НЕПЕРЕРВНОСТІ З ІМОВІРНІСТЮ ОДИНИЦЯ ДЛЯ КВАДРАТИЧНО-ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Ю. В. КОЗАЧЕНКО, І. В. РОЗОРА

Анотація. Розглядаються квадратично-гауссові випадкові процеси. Знайдено достатні умови вибіркової рівномірної неперервності таких процесів з імовірністю одиниця на компакті. Отримано оцінку розподілу для модуля неперервності квадратично-гауссового випадкового процесу.

Ключові слова і фрази. Вибіркова неперервність, модуль неперервності, квадратично-гауссові випадкові процеси.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G17; Secondary 60E05.

1. Вступ

Дослідження аналітичних властивостей траєкторій випадкових процесів, таких як неперервність, є, без сумніву, актуальним у теорії випадкових процесів.

Класичним результатом для гауссових випадкових процесів є теорема Дадлі [2], яка стверджує, що траєкторії гауссового процесу $X(t)$, $t \in \mathbf{T}$, є майже напевно (рівномірно) неперервні, якщо збігається ентропійний інтеграл Дадлі:

$$\int_0^\infty \sqrt{\ln N_{\mathbf{T}}(\varepsilon)}d\varepsilon < \infty,$$

де $N_{\mathbf{T}}(\varepsilon)$ — метрична масивність множини T відносно псевдометрики

$$d(t,s) = \sqrt{\mathsf{E}|X(t)-X(s)|^2}.$$

У цій статті розглядаються квадратично-гауссові випадкові процеси. Знайдено достатні умови вибіркової рівномірної неперервності цих процесів з імовірністю одиниця на компакті. Отримано оцінки експоненціального моменту та розподілу для модуля неперервності такого процесу. При доведенні використано α-процедуру [1].

2. Основні означення

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ — деякий імовірнісний простір, $(\mathbf{T}, \rho)$ — псевдометричний (метричний) простір, а $\mathbf{B}$ є підмножиною $\mathbf{T}$. Нагадаємо, що псевдометрика відрізняється від метрики тільки тим, що з рівності $\rho(t,s) = 0$ не випливає $t = s$.

Означення 2.1. Якщо існує скінченне ε-покриття множини $\mathbf{T}$, тобто скінченна сім'я замкнених куль $\mathfrak{B} = \{B\}, B \subset \mathbf{T}$ з радіусами не більше за $\varepsilon > 0$: $\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B = \mathbf{T}$, то через $N_{(\mathbf{T},\rho)}(\varepsilon)$ позначимо найменшу кількість елементів в ε-покритті цієї множини. Крім того, якщо не існує скінченного ε-покриття множини $\mathbf{T}$, то покладемо

$$N_{(\mathbf{T},\rho)}(\varepsilon) = +\infty.$$

Функцію $N_{(\mathbf{T},\rho)}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, будемо називати метричною масивністю множини $\mathbf{T}$ відносно пcевдометрики (метрики) ρ або просто метричною масивністю.

Означення 2.2 [3]. Випадковий процес X називається сепарабельним на $(\mathbf{T}, \rho)$ або ρ-сепарабельним, якщо існують зліченна скрізь щільна відносно псевдометрики (метрики) ρ множина $S \subseteq \mathbf{T}$ та множина $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathsf{P}(\Omega_0) = 0$ такі, що для довільної відкритої множини $U \subset \mathbf{T}$ та довільної замкненої множини $D \subset \mathbb{R}$ виконується

$$\left(\bigcap_{s \in S \cap U} \{X(s) \in D\}\right) \setminus \left(\bigcap_{s \in U} \{X(s) \in D\}\right) \subset \Omega_0.$$

Множина S називається множиною ρ-сепарабельності або ρ-сепарантою процесу X.

Для сепарабельного випадкового процесу $X(t)$ справедливі такі співвідношення:

$$\left\{\sup_{t \in U} X(t) \neq \sup_{t \in S \cap U} X(t)\right\} \subset \Omega_0,$$

$$\left\{\inf_{t \in U} X(t) \neq \inf_{t \in S \cap U} X(t)\right\} \subset \Omega_0,$$

де $U \subseteq T$ — відкрита множина і $\mathsf{P}(\Omega_0) = 0$.

Теорема 2.1 [3]. *Нехай* $(\mathbf{T}, \rho)$ — *псевдометричний (метричний) простір із псевдометрикою (метрикою)* ρ, $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ — *випадковий процес. Тоді існує сепарабельний процес* $X_1 = \{X_1(t), t \in \mathbf{T}\}$, *який стохастично еквівалентний процесу* X, *тобто для кожного* $t \in \mathbf{T}$

$$\mathsf{P}\{X(t) = X_1(t)\} = 1.$$

Теорема 2.2 [3]. *Нехай* $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ — *сепарабельний неперервний за ймовірністю випадковий процес. Тоді будь-яка зліченна скрізь щільна множина в* $(\mathbf{T}, \rho)$ *є* ρ-*сепарантою процесу* X.

Означення 2.3 [7]. Нехай $\Xi = \{\xi_t,\, t \in \mathbf{T}\}$ — сім'я сумісно гауссових випадкових величин, $\mathsf{E}\xi_t = 0$ (наприклад, нехай ξ_t, $t \in \mathbf{T}$, є гауссовим випадковим процесом).

Простором квадратично-гауссових випадкових величин називається такий простір $SG_\Xi(\Omega)$, що для будь-якого елемента $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ існують A — дійснозначна матриця $n \times n$ і вектор $\bar{\xi}' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_k \in \Xi$, $k = 1, \ldots, n$, такі, що

$$\eta = \bar{\xi}' A \bar{\xi} - \mathsf{E}\bar{\xi}' A \bar{\xi}, \tag{1}$$

або елемент $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ є границею у середньому квадратичному послідовності випадкових величин з (1)

$$\eta = \mathbf{l.i.m.}_{n \to \infty}(\bar{\xi}'_n A \bar{\xi}_n - \mathsf{E}\bar{\xi}'_n A \bar{\xi}_n).$$

Означення 2.4 [7]. Випадковий процес $X = \{X(t),\, t \in \mathbf{T}\}$ називається квадратично-гауссовим, якщо для кожного фіксованого $t \in \mathbf{T}$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $SG_\Xi(\Omega)$.

У [1] показано, що

- $SG_\Xi(\Omega)$ є банаховим простором із нормою $\|\zeta\| = \sqrt{\mathsf{E}\zeta^2}$;
- $SG_\Xi(\Omega)$ є підпростором простору Орліча, що породжується функцією

$$U(x) = \exp|x| - 1;$$

  норма в цьому просторі $\|\zeta\|_{L_U(\Omega)}$ на $SG_\Xi(\Omega)$ еквівалентна нормі $\sqrt{\mathsf{E}\zeta^2}$.

Приклад 2.1. Розглянемо $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$, $t \in \mathbf{T}$, сім'ю гауссових центрованих випадкових процесів. Нехай $A(t)$ — симетрична матриця $n \times n$. Тоді

$$X(t) = \bar{\xi}'(t) A(t) \bar{\xi}(t) - \mathsf{E}\bar{\xi}'(t) A(t) \bar{\xi}(t),$$

де $\bar{\xi}'(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t))$, є квадратично-гауссовим випадковим процесом.

Приклад 2.2. Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$— дійснозначний центрований стаціонарний гауссовий випадковий процес із неперервною коваріаційною функцією $B(h) = \mathsf{E}X(t)X(t+h)$, $h \in R$. Однією із задач статистики випадкових процесів є оцінювання або ідентифікація функції B за спостереженнями за однією траєкторією процесу X. Як оцінку часто розглядають корелограму (емпіричну коваріаційну функцію)

$$\hat{B}_N(h) = \frac{1}{N}\int_0^N X(t)X(t+h)dt, \quad h > 0,$$

інтеграл тут розуміємо як середньоквадратичний інтеграл Рімана.

Тоді випадковий процес $Y(h) = \hat{B}_N(h) - \mathsf{E}\hat{B}_N(h)$ є квадратично-гауссовим.

Лема 2.1 [4]. *Якщо випадковий процес* $X = \{X(t, t \in \mathbf{T})\}$ *належить до простору* $SG_\Xi(\Omega)$, *то для всіх дійсних* s, $|s| < 1$, *і для всіх* $t \in \mathbf{T}$, $t_1 \in \mathbf{T}$, $t_2 \in \mathbf{T}$, $t_1 \neq t_2$, *виконуються такі співвідношення:*

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{sX(t)}{\sqrt{2}(\mathbf{Var}\,X(t))^{1/2}}\right\} \leq (1-|s|)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\},$$

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{s(X(t_1)-X(t_2))}{\sqrt{2}(\mathbf{Var}\,(X(t_1)-X(t_2)))^{1/2}}\right\} \leq (1-|s|)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}.$$

Зауваження 2.1. Перша нерівність в лемі 2.1 має зміст, якщо $\mathbf{Var}\;X(t) > 0$. Але оскільки з $\mathbf{Var}\;X(t) = 0$ випливає $X(t) = 0$, будемо вважати в цьому випадку

$$\frac{X(t)}{(\mathbf{Var}\;X(t))^{1/2}} = 0.$$

Аналогічне припущення будемо робити, якщо $\mathbf{Var}\,(X(t_1) - X(t_2)) = 0$.

Більше властивостей та застосувань квадратично-гауссових випадкових процесів можна знайти в [5, 6, 8–10].

3. Рівномірна вибіркова неперервність з імовірністю одиниця квадратично-гауссових випадкових процесів

Нехай $(\mathbf{T}, \rho)$ — метричний сепарабельний простір, $\mathbf{B}$ — компактна множина, $\mathbf{B} \subset \mathbf{T}$, $X = \{X(t),\, t \in \mathbf{B}\}$ — сепарабельний квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що існує монотонно зростаюча, неперервна функція $\sigma(h)$, $h > 0$, із властивостями:

$$\sigma(h) \to 0 \qquad \text{при} \qquad h \to 0;$$

та

$$\sup_{\rho(t,s)\leq h} (\mathbf{Var}\,(X(t) - X(s)))^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h). \tag{2}$$

Варто зауважити, що таку властивість має функція

$$\sigma(h) = \sup_{\rho(t,s)\leq h} \left(\mathbf{Var}\;\,(X(t) - X(s))\right)^{1/2}$$

у випадку, якщо випадковий процес $X(t)$ є неперервним у середньому квадратичному.

Будемо використовувати такі позначення:

$$\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(t_0 p^k), \quad p \in (0,1), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

де $t_0 = \sigma(\inf_{t\in\mathbf{B}} \sup_{s\in\mathbf{B}} \rho(t,s))$.

$N_{\mathbf{B}}(u)$ — метрична масивність простору $(\mathbf{B}, \rho)$.

Умова А. Існує зростаюча неперервна функція $r(u) \geq 0, u \geq 1$, така, що

- функція $r(\exp\{t\})$ є опуклою вниз;

- збігається інтеграл

$$\int_0^{t_0} r(N(\sigma^{(-1)}(u))du < \infty.$$

Знайдемо оцінку експоненціального моменту для модуля неперервності квадратично-гауссового випадкового процесу.

Лема 3.1. *Нехай* $X = \{X(t),\, t \in \boldsymbol{B},\}$ — *сепарабельний квадратично-гауссовий процес, для якого виконуються* (2) *та умова* $\boldsymbol{A}$. *Тоді для будь-якого* $p \in (0,1)$ *та* λ *такого, що*

$$0 < \lambda \leq \frac{1-p}{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)} \min\left\{\frac{1-p}{3-p}; \frac{p}{2}\right\}, \tag{3}$$

справедлива нерівність

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{\rho(t,s)<\varepsilon} |X(t)-X(s)|\right\} \leq 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)}{p(1-p)^2}\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)}{2p(1-p)^2}\right\} \times \\ \times r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\Big(N(\sigma^{(-1)}(u))\Big)du\right). \tag{4}$$

Доведення. За нерівністю Чебишова

$$\mathsf{P}\{|X(t)-X(s)| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{Var}\,(X(t)-X(s))}{\varepsilon^2} \leq \frac{\sigma^2(h)}{\varepsilon^2} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho(t,s) < h \to 0.$$

Тому випадковий процес $X(t)$ є неперервним за ймовірністю.

Через V_{ε_k} позначимо множину центрів замкнених куль радіуса ε_k, яка утворює мінімальне покриття простору $(\mathbf{B},\rho)$, тобто V_{ε_k} — це ε_k-сітка множини $\mathbf{B}$ відносно метрики ρ. Кількість точок у V_{ε_k} дорівнює $N(\varepsilon_k)$.

Нехай $t, s \in \mathbf{B}$ — такі точки, що $\rho(t,s) < \varepsilon$. Виберемо k таким чином, щоб $\varepsilon_k < \varepsilon \leq \varepsilon_{k-1}$, тобто

$$\sigma(\varepsilon_k) < \sigma(\varepsilon) \leq \sigma(\varepsilon_{k-1}) \quad \Leftrightarrow \quad t_0 p^k < \sigma(\varepsilon) \leq t_0 p^{k-1}.$$

Позначимо

$$V_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} V_{\varepsilon_j}.$$

Множина V_k є множиною сепарабельності процесу $X(t)$ на $(\mathbf{B},\rho)$, бо $X(t)$ є неперервним за ймовірністю.

Зі ймовірністю одиниця виконується рівність

$$\sup_{t\in B} |X(t)-X(s)| = \sup_{t\in V_k} |X(t)-X(s)|. \tag{5}$$

Розглянемо відображення $\alpha_n(t), n = 0,1,2,\ldots$, множини V_k в V_{ε_n}: якщо $t \in V_k$, то $\alpha_n(t)$ — точка із множини V_{ε_n} така, що $\rho(t,\alpha_n(t)) < \varepsilon_n$; якщо $t \in V_{\varepsilon_n}$, то $\alpha_n(t) = t$. Якщо ж існує кілька таких точок із множини V_{ε_n} таких, що $\rho(t,\alpha_n(t)) < \varepsilon_n$, тоді виберемо одну з них і позначимо через $\alpha_n(t)$.

Нехай m — довільне ціле число таке, що $m > k$. Позначимо

$$t_m = \alpha_m(t),\ t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m),\ t_{m-2} = \alpha_{m-2}(t_{m-1}), \ldots,\ t_k = \alpha_1(t_{k+1});$$
$$s_m = \alpha_m(s),\ s_{m-1} = \alpha_{m-1}(s_m),\ s_{m-2} = \alpha_{m-2}(s_{m-1}), \ldots,\ s_k = \alpha_1(s_{k+1}).$$

Тоді справедливе таке співвідношення

$$(X(t) - X(s)) = (X(t) - X(\alpha_m(t)) + \sum_{l=k+1}^{m} (X(t_l) - X(t_{l-1})) - \\ - (X(s) - X(\alpha_m(s)) - \sum_{l=k+1}^{m} (X(s_l) - X(s_{l-1})) + (X(t_k) - X(s_k)). \tag{6}$$

Із (6) випливає, що

$$(X(t_k) - X(s_k)) = (X(t) - X(s)) - (X(t) - X(\alpha_m(t)) - \sum_{l=k+1}^{m} (X(t_l) - X(t_{l-1})) + \\ + (X(s) - X(\alpha_m(s)) + \sum_{l=k+1}^{m} (X(s_l) - X(s_{l-1})).$$

Отже,

$$\begin{aligned}\big(\mathsf{E}(X(t_k) - X(s_k))^2\big)^{\frac{1}{2}} &\le \big(\mathsf{E}(X(t) - X(s))^2\big)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \big(\mathsf{E}(X(t) - X(\alpha_m(t)))^2\big)^{\frac{1}{2}} + \sum_{l=k+1}^{m} \big(\mathsf{E}((X(t_l) - X(t_{l-1}))^2\big)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \big(\mathsf{E}(X(s) - X(\alpha_m(s)))^2\big)^{\frac{1}{2}} + \sum_{l=k+1}^{m} \big(\mathsf{E}(X(s_l) - X(s_{l-1}))^2\big)^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le \sigma(\varepsilon) + \sigma(\varepsilon_m) + \sum_{l=k+1}^{m} \sigma(\varepsilon_{l-1}) + \sigma(\varepsilon_m) + \sum_{l=k+1}^{m} \sigma(\varepsilon_{l-1}) = \\ &= \sigma(\varepsilon) + 2t_0 p^m + 2\sum_{l=k+1}^{m} t_0 p^{l-1} \le \sigma(\varepsilon) + 2\sum_{l=k}^{\infty} t_0 p^l = \\ &= \sigma(\varepsilon) + 2t_0 \frac{p^k}{1-p} \le \sigma(\varepsilon)\left(1 + \frac{2}{1-p}\right) = \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}. \end{aligned} \tag{7}$$

Тепер із попередньої нерівності та (6) отримаємо, що

$$\begin{aligned}|X(t) - X(s)| &\le |X(t) - X(\alpha_m(t)| + \sum_{l=k+1}^{m} |X(t_l) - X(t_{l-1})| + \\ &+ |X(s) - X(\alpha_m(s)| + \sum_{l=k+1}^{m} |X(s_l) - X(s_{l-1})| + |X(t_k) - X(s_k)| \le \\ &\le |X(t) - X(\alpha_m(t)| + 2\sum_{l=k}^{m-1} \max_{u \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| + \\ &+ |X(s) - X(\alpha_m(s)| + \max_{\substack{u,v \in V_{\varepsilon_k};\\ (\mathsf{E}(X(u)-X(v))^2)^{\frac{1}{2}} \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}}} |X(u) - X(v)|. \end{aligned} \tag{8}$$

Покажемо зараз, що з імовірністю одиниця для всіх $t \in V_k$

$$|X(t) - X(\alpha_m(t))| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{9}$$

Дійсно, із нерівності Чебишова та співвідношення (3) випливає нерівність

$$\mathsf{P}\Big\{|X(t) - X(\alpha_m(t))| > p^{m/2}\Big\} \le \frac{\mathbf{Var}\ (X(t) - X(\alpha_m(t)))}{p^m} \le \frac{\sigma^2(\varepsilon_m)}{p^m} = \frac{t_0^2 p^{2m}}{p^m} = t_0^2 p^m.$$

А тому
$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}\Big\{|X(t) - X(\alpha_m(t))| > p^{m/2}\Big\} \le t_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} p^m < \infty.$$
Із леми Бореля – Кантеллі випливає, що для досить великих m з імовірністю 1 виконується нерівність $|X(t) - X(\alpha_m(t))| < p^{m/2}$. А отже, $|X(t) - X(\alpha_m(t))| \to 0$ з імовірністю 1 при $m \to \infty$.

У (8) перейдемо до границі при $m \to \infty$, враховуючи співвідношення (9). Оскільки процес $X(t)$ сепарабельний, то отримаємо
$$\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon} |X(t) - X(s)| = \sup_{\substack{t,s\in V_k;\\ \rho(t,s)<\varepsilon}} |X(t) - X(s)| \le$$
$$\le 2\sum_{l=k}^{\infty} \max_{u\in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| +$$
$$+ \max_{\substack{u,v\in V_{\varepsilon_k};\\ (\mathsf{E}(X(u)-X(v))^2)^{\frac12} \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}}} |X(u) - X(v)|. \tag{10}$$

Із (10) випливає, що для всіх $\lambda > 0$
$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{\rho(t,s)<\varepsilon} |X(t) - X(s)|\right\} \le$$
$$\le \mathsf{E}\exp\left\{\lambda\left(2\sum_{l=k}^{\infty} \max_{u\in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \max_{\substack{u,v\in V_{\varepsilon_k};\\ (\mathsf{E}(X(u)-X(v))^2)^{\frac12} \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}}} |X(u) - X(v)|\right)\right\} =$$
$$= \mathsf{E}\left(\prod_{l=k}^{\infty} \exp\left\{2\lambda \max_{u\in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))|\right\} \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left\{\lambda \max_{\substack{u,v\in V_{\varepsilon_k};\\ (\mathsf{E}(X(u)-X(v))^2)^{\frac12} \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}}} |X(u) - X(v)|\right\}\right).$$

Нехай $q_l, l = k-1, k, \ldots$ — послідовність таких значень, що $q_l > 1$ і
$$\sum_{l=k-1}^{\infty} \frac{1}{q_l} = 1.$$

Тоді з нерівності Гельдера отримаємо
$$I := \mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{\rho(t,s)<\varepsilon} |X(t) - X(s)|\right\} \le$$
$$\le \prod_{l=k}^{\infty} \left(\mathsf{E}\exp\left\{2\lambda q_l \max_{u\in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))|\right\}\right)^{\frac{1}{q_l}} \times$$

$$\times \left(\mathsf{E} \exp \left\{ \lambda q_{k-1} \max_{\substack{u,v \in V_{\varepsilon_k};\\ (\mathsf{E}(X(u)-X(v))^2)^{\frac{1}{2}} \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}}} |X(u)-X(v)| \right\} \right)^{\frac{1}{q_{k-1}}}.$$

Справедливе таке співвідношення для максимуму випадкових величин ξ_i, $i=\overline{1,n}$:

$$\mathsf{E} e^{\max_{i=\overline{1,n}} \xi_i} \le \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E} e^{\xi_i} \le n \cdot \max_{i=\overline{1,n}} \mathsf{E} e^{\xi_i}. \tag{11}$$

Якщо використати нерівність (11) для

$$\max_{u \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| \quad \text{і} \quad \max_{u,v \in V_{\varepsilon_k}} |X(u)-X(v)|,$$

то одержимо, що

$$I \le (N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_k))^{\frac{1}{q_{k-1}}} \max_{\substack{u,v \in V_{\varepsilon_k};\\ (\mathsf{E}(X(u)-X(v))^2)^{\frac{1}{2}} \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}}} (\mathsf{E}\exp\{\lambda q_{k-1}|X(u)-X(v)|\})^{\frac{1}{q_{k-1}}} \times$$

$$\times \prod_{l=k}^{\infty} (N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_{l+1}))^{\frac{1}{q_l}} \max_{u \in V_{\varepsilon_{l+1}}} (\mathsf{E}\exp\{2\lambda q_l |X(u) - X(\alpha_l(u))|\})^{\frac{1}{q_l}}. \tag{12}$$

Нехай

$$Q(s) = (1-|s|)^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{|s|}{2} \right\}.$$

Із леми 2.1 випливає, що для

$$0 < 2q_l \lambda \sqrt{2} (\mathbf{Var}\ (X(u) - X(\alpha_l(u))))^{1/2} < 1$$

виконується таке співвідношення:

$$\mathsf{E}\exp\{2q_l\lambda(X(u)-X(\alpha_l(u)))\} \le Q\Big(2q_l\lambda\sqrt{2}(\mathbf{Var}\ (X(u)-X(\alpha_l(u))))^{1/2}\Big). \tag{13}$$

Далі із (2) отримаємо

$$(\mathbf{Var}\ (X(u)-X(\alpha_l(u))))^{1/2} \le \sigma(\varepsilon_l) = t_0 p^l. \tag{14}$$

Тому із (14) випливає, що за умови

$$2\sqrt{2} q_l \lambda t_0 p^l < 1 \tag{15}$$

виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{2q_l\lambda|X(u)-X(\alpha_l(u))|\} \le 2\mathsf{E}\exp\{2q_l\lambda(X(u)-X(\alpha_l(u)))\} \le 2Q(2\sqrt{2}q_l\lambda t_0 p^l). \tag{16}$$

Із леми 2.1 бачимо, що для

$$0 < q_{k-1}\lambda\sqrt{2}(\mathbf{Var}\ (X(u)-X(v)))^{1/2} < 1$$

справедливе співвідношення

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda q_{k-1}(X(u)-X(v))\} \le Q\Big(\lambda q_{k-1}\sqrt{2}(\mathbf{Var}\ (X(u)-X(v)))^{1/2}\Big). \tag{17}$$

Отже, із (7) отримаємо, що

$$(\mathbf{Var}\ (X(u)-X(v)))^{1/2} \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}.$$

Тому за умови

$$\frac{\sqrt{2} q_{k-1} \lambda \sigma(\varepsilon)(3-p)}{1-p} < 1 \tag{18}$$

маємо

$$\mathsf{E}\exp\{q_{k-1}\lambda|X(u)-X(v)|\} \le 2\mathsf{E}\exp\{q_{k-1}\lambda(X(u)-X(v))\} \le \le 2Q\left(\frac{\sqrt{2}q_{k-1}\lambda\sigma(\varepsilon)(3-p)}{1-p}\right). \tag{19}$$

Якщо підставити оцінки (16) і (19) у нерівність (12), то отримаємо

$$I \le 2\left(Q\left(\frac{\sqrt{2}q_{k-1}\lambda\sigma(\varepsilon)(3-p)}{1-p}\right)\right)^{\frac{1}{q_{k-1}}}(N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_k))^{\frac{1}{q_{k-1}}}\times \times\prod_{l=k}^{\infty}(N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_{l+1}))^{\frac{1}{q_l}}\left(Q(2\sqrt{2}q_l\lambda t_0 p^l)\right)^{\frac{1}{q_l}}. \tag{20}$$

Виберемо послідовність q_l, $l = k-1, k, \ldots$ таким чином:

$$q_{k-1} = \frac{1}{1-p}, \quad q_l = \frac{p^{k-1}}{p^l(1-p)}, \quad l \ge k.$$

Очевидно, що $\sum\limits_{l=k-1}^{\infty}\frac{1}{q_l} = 1$. Зауважимо, що при таких значеннях q_l із співвідношення (3) випливає виконання умов (15), (18).

Підставимо послідовність q_l, $l = k-1, k, \ldots$ в (20), тоді

$$\begin{aligned}
I &\le 2\left(Q\left(\frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)(3-p)}{(1-p)^2}\right)\right)^{1-p}(N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_k))^{1-p}\times\\
&\times\prod_{l=k}^{\infty}(N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_{l+1}))^{\frac{p^l(1-p)}{p^{k-1}}}\left(Q\left(\frac{2\sqrt{2}\lambda p^{k-1}t_0}{1-p}\right)\right)^{\frac{p^l(1-p)}{p^{k-1}}} =\\
&= 2\left(Q\left(\frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)(3-p)}{(1-p)^2}\right)\right)^{1-p}\prod_{l=k-1}^{\infty}(N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_{l+1}))^{\frac{p^l(1-p)}{p^{k-1}}}\times\\
&\times\left(Q\left(\frac{2\sqrt{2}\lambda p^{k-1}t_0}{1-p}\right)\right)^{\sum\limits_{l=k}^{\infty}\frac{p^l(1-p)}{p^{k-1}}} =\\
&= 2\left(Q\left(\frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)(3-p)}{(1-p)^2}\right)\right)^{1-p}\left(Q\left(\frac{2\sqrt{2}\lambda p^{k-1}t_0}{1-p}\right)\right)^{p}\times\\
&\times\prod_{l=k-1}^{\infty}(N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_{l+1}))^{\frac{p^l(1-p)}{p^{k-1}}}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Оскільки функція $Q(s)$ є зростаючою і при $p \in (0,1)$ $\frac{3-p}{1-p} \ge 2$ та

$$t_0 p^{k-1} = \frac{t_0 p^k}{p} \le \frac{\sigma(\varepsilon)}{p},$$

то

$$Q\left(\frac{2\sqrt{2}\lambda p^{k-1}t_0}{1-p}\right) \le Q\left(\frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)}{p(1-p)^2}\right).$$

А отже, вираз I обмежується таким чином:

$$I \le 2Q\left(\frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)}{p(1-p)^2}\right)\prod_{l=k-1}^{\infty}(N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_{l+1}))^{\frac{p^l(1-p)}{p^{k-1}}}. \tag{22}$$

Оцінимо зараз вираз
$$\prod_{l=k-1}^{\infty}(N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_{l+1}))^{1/q_l}.$$
Беручи до уваги, що функція $r(\exp\{t\})$ є опуклою, отримаємо
$$\begin{aligned}
\prod_{l=k-1}^{\infty}(N_{\mathbf{B}}(\varepsilon_{l+1}))^{1/q_l} &= \prod_{l=k-1}^{\infty}\Big(N_{\mathbf{B}}(\sigma^{(-1)}(t_0p^{l+1}))\Big)^{\frac{(1-p)p^l}{p^{k-1}}} = \\
&= r^{(-1)}\left(r\left(\exp\left\{\sum_{l=k-1}^{\infty}p^{1-k}p^l(1-p)\ln N(\sigma^{(-1)}(t_0p^{l+1}))\right\}\right)\right) \le \\
&\le r^{(-1)}\left(\sum_{l=k-1}^{\infty}p^l(1-p)p^{1-k}\Big(r\Big(N(\sigma^{(-1)}(t_0p^{l+1}))\Big)\Big)\right) = \\
&= r^{(-1)}\left(\sum_{l=k-1}^{\infty}\frac{1}{t_0p^k}\int_{t_0p^{l+2}}^{t_0p^{l+1}} r\Big(N(\sigma^{(-1)}(t_0p^{l+1}))\Big)du\right) = \\
&= r^{(-1)}\left(\sum_{l=k-1}^{\infty}\frac{1}{t_0p^k}\int_{t_0p^{l+2}}^{t_0p^{l+1}} r\Big(N(\sigma^{(-1)}(u))\Big)du\right) = \\
&= r^{(-1)}\left(\frac{1}{t_0p^k}\int_0^{t_0p^k} r\Big(N(\sigma^{(-1)}(u))\Big)du\right) \le \\
&\le r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\Big(N(\sigma^{(-1)}(u))\Big)du\right). \qquad (23)
\end{aligned}$$
Лему буде повністю доведено, якщо оцінку (23) підставити у (22). □

Теорема 3.1. *Якщо для сепарабельного квадратично-гауссового процесу $X=\{X(t),\, t\in B\}$ виконуються (2) та умова $\boldsymbol{A}$, то він є вибірково неперервним з імовірністю одиниця та для довільних $p\in(0,1)$, $\varepsilon>0$ і $x>0$*
$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(t)-X(s)|>x\right\} \le 2r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\Big(N(\sigma^{(-1)}(u))\Big)du\right)\times \\ \times\left(1+\frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2}{\sigma(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)}\right\}. \qquad (24)$$

Доведення. Із нерівності Чебишова та (4) маємо
$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(t)-X(s)|>x\right\} &\le \mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(t)-X(s)|\right\}\cdot\exp\{-\lambda x\} \le \\
&\le 2\left(1-\frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)}{p(1-p)^2}\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)}{2p(1-p)^2}-\lambda x\right\}\times \\
&\times r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\Big(N(\sigma^{(-1)}(u))\Big)du\right).
\end{aligned}$$

Оскільки ліва частина нерівності не залежить від λ, то
$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(t)-X(s)|>x\right\} \le 2r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\Big(N(\sigma^{(-1)}(u))\Big)du\right)\times$$

$$\times \inf_{\lambda\in\left(0,\frac{(1-p)^2}{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)(3-p)}\right)}\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)}{p(1-p)^2}\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\lambda\sigma(\varepsilon)}{2p(1-p)^2}-\lambda x\right\}\right]. \quad (25)$$

Позначимо

$$a=a(\varepsilon,p):=\frac{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)}{p(1-p)^2}, \qquad f(\lambda)=(1-a\lambda)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{a\lambda}{2}-\lambda x\right\}.$$

Точкою мінімуму для функції $f(\lambda)$ буде

$$\lambda_{\min}=\frac{2x}{a^2+2ax}.$$

Тому

$$\inf_{\lambda\in\left(0,\frac{(1-p)^2}{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)(3-p)}\right)} f(\lambda)=f(\lambda_{\min})=\left(1+\frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2}{\sigma(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)}\right\}. \quad (26)$$

Якщо оцінку (26) підставити у (25), то отримаємо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(t)-X(s)|>x\right\}\le 2r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\Big(N(\sigma^{(-1)}(u))\Big)du\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2}{\sigma(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)}\right\}.$$

Отже, нерівність (24) повністю доведена.

Якщо $\varepsilon\to 0$, то $\sigma(\varepsilon)\to 0$ і

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(t)-X(s)|>x\right\}\to 0,$$

тобто при $\varepsilon\to 0$ $\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(t)-X(s)|\xrightarrow{P} 0$ (збіжність за ймовірністю). А з монотонності супремуму випливає

$$\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon}|X(t)-X(s)|\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0 \ \text{майже напевно.}$$

Отже, випадковий процес $X=\{X(t),\, t\in B\}$ є вибірково неперервним з імовірністю одиниця. □

Розглянемо частковий випадок теореми 3.1, коли $T=\mathbb{R}$ з евклідовою метрикою, та як компакт розглянемо будь-який відрізок $B=[a,b]$, $a<b$. Наступна теорема дає уточнення в нерівності (24) для випадку $\sigma(h)=K\cdot h^{\alpha}$, $\alpha\in(0,1]$.

Теорема 3.2. *Нехай $X(t)=\{X(t),t\in[a,b]\}$ — сепарабельний квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що для нього виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\le h}\left(\mathbf{Var}\,(X(t)-X(s))\right)^{\frac{1}{2}}\le K\cdot h^{\alpha}, \quad \alpha\in(0,1],$$

де стала $K>0$. Тоді процес $X(t)$ є вибірково неперервним з імовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon>0$ і $x>0$ справджується така оцінка:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{t,s\in[a,b]\\|t-s|<\varepsilon}}|X(t)-X(s)|>x\right\}\le 2^{1+\frac{2}{\alpha}}(b-a)\varepsilon^{-1}\le$$

$$\le\min_{p\in(0,1)}\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2}{K\varepsilon^{\alpha}}\right)^{\frac12}\exp\left\{-\frac{xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\varepsilon^{\alpha}}\right\}p^{-2/\alpha}\right]. \quad (27)$$

Доведення. Результат теореми випливає з теореми 3.1 при $\sigma(h)=K\cdot h^{\alpha}$. Досить тільки знайти функцію $r(u)$, для якої виконується умова **A**, й оцінити вираз

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)}r\Big(N\Big(\sigma^{(-1)}(\nu)\Big)\Big)d\nu\right).$$

З умов даної теореми випливає, що

$$\sigma^{(-1)}(h)=\left(\frac{h}{K}\right)^{1/\alpha}.$$

Метрична масивність відрізка $[a,b]$ з метрикою $\rho(t,s)=|t-s|$ оцінюється як

$$N(u)\le\frac{b-a}{2u}+1.$$

Отже,

$$N(\sigma^{(-1)}(u))\le\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)=\left(\frac{b-a}{2}\Big(\frac{K}{u}\Big)^{1/\alpha}+1\right).$$

Розглянемо функцію $r(u)=u^{\frac{\alpha}{2}}-1$, для якої виконуються умова **A**. Оскільки $0<p<1$ та

$$t_0=\sigma(\inf_{t\in\mathbf{[a,b]}}\sup_{s\in\mathbf{[a,b]}}|t-s|)=K\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha},$$

то $\frac{b-a}{2}\left(\frac{K}{pt_0}\right)^{1/\alpha}>1$. Тому, за умови $0<u<t_0p$ справджується нерівність

$$N(\sigma^{(-1)}(u))\le(b-a)\Big(\frac{K}{u}\Big)^{1/\alpha}.$$

Оскільки обернена функція до $r(u)$ дорівнює $r^{(-1)}(u)=(u+1)^{2/\alpha}$, то

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)}r\Big(N\Big(\sigma^{(-1)}(\nu)\Big)\Big)d\nu\right)=$$

$$=\Big(\frac{1}{pK\varepsilon^{\alpha}}\int_0^{K\varepsilon^{\alpha}}\Big((\frac{b-a}{2}\Big(\frac{K}{u}\Big)^{1/\alpha}+1)^{\frac{\alpha}{2}}\Big)du\Big)^{2/\alpha}\le$$

$$\le\Big(\frac{1}{pK\varepsilon^{\alpha}}\int_0^{K\varepsilon^{\alpha}}\Big((b-a)\Big(\frac{K}{u}\Big)^{1/\alpha}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}du\Big)^{2/\alpha}=\frac{2^{\frac{2}{\alpha}}(b-a)}{\varepsilon p^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (28)$$

Якщо в (24) підставити значення функції $\sigma(\varepsilon)=K\varepsilon^{\alpha}$ та оцінку (28), то нерівність (27) буде повністю доведено.

Якщо $\varepsilon\to0$, то з нерівності (27) випливає, що

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\varepsilon}|X(t)-X(s)|>x\right\}\to0,$$

тобто при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{|t-s|<\varepsilon} |X(t) - X(s)| \xrightarrow{P} 0.$$

Отже, справедлива неперервність за імовірністю. А з монотонності супремуму випливає і збіжність з імовірністю одиниця, тобто

$$\sup_{|t-s|<\varepsilon} |X(t) - X(s)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \text{ майже напевно.}$$

Таким чином, випадковий процес $X = \{X(t), t \in B\}$ є вибірково неперервним з імовірністю одиниця. □

Приклад 3.1. Розглянемо квадратично-гауссовий випадковий процес

$$Y_N(h) = \hat{B}_N(h) - \mathsf{E}\hat{B}_N(h), \quad h \in [0, b],$$

із прикладу 2.2. Нехай $f = (f(\lambda), \lambda \in R)$ — спектральна щільність випадкового процесу $X(t)$, $t \in T$, $f \in L_2(R)$. Припустимо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^i f^2(\lambda) d\lambda < \infty, \quad i = 1, 2.$$

У книзі [1, лема 4.1, с. 200] показано, що

$$\mathsf{E}(Y_N(h_1) - Y_N(h_2))^2 \le \frac{8\pi}{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(h_1 - h_2)}{2} d\lambda\right] + \\ + \frac{8\pi||f||_2}{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(h_1 - h_2)}{2} d\lambda\right]^{\frac{1}{2}}, \quad N > 0,\ h_1, h_2 \ge 0.$$

Якщо використати нерівність $|\sin h| \le h^{\alpha}$, $\quad h \ge 0, \alpha \in (0, 1]$, то маємо

$$\mathsf{E}(Y_N(h_1) - Y_N(h_2))^2 \le C_N|h_1 - h_2|^{\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1],$$

де значення C_N таке:

$$C_N = \frac{4\pi}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\big(|\lambda| + ||f||_2\lambda^2\big)f^2(\lambda)d\lambda, \quad ||f||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)d\lambda.$$

Отже, для процесу $Y_N(h)$, $h \in [0, b]$, виконуються умови теореми 3.2.

Зауваження 3.1. Аналогічний результат, як і в теоремі 3.2, можна довести у випадку, коли

$$\sigma(h) = \frac{K}{\ln^{\alpha}\big(\frac{1}{h} + e^{\alpha}\big)}, \quad \alpha > 1.$$

4. Висновки

У роботі вивчались властивості траєкторій квадратично-гауссових випадкових процесів. Отримано оцінки для експоненціального моменту та розподілу модуля неперервності випадкового процесу. Знайдено достатні умови рівномірної вибіркової неперервності з імовірністю одиниця для квадратично-гауссових випадкових процесів. Як приклад, розглянуто оцінку коваріаційної функції для дійснозначного стаціонарного гауссового процесу і показано, що за певних умов її траєкторії будуть рівномірно неперервними на компакті з імовірністю одиниця.

Список літератури

1. V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko, *Metric characterization of random variables and random processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
2. R. M. Dudley, *The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes*, J. Functional Analysis, **1** (1967), 290–330.
3. I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, *Introduction to the Theory of Random Processes*, vol. 1, Nauka, Moscow, 1977. (In Russian)
4. Yu. V. Kozachenko, O. M. Moklyachuk, *Large deviation probabilities for square-Gaussian stochastic processes*, Extremes, **2** (1999), no. 3, 269–293.
5. Yu. V. Kozachenko, O. O. Pogorilyak, I. V. Rozora, A. M. Tegza, *Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability*, ISTE Press - Elsevier, 2016.
6. Yu. V. Kozachenko, I. V. Rozora, *A criterion for testing hypothesis about impulse response function*, Stat., Optim. Inf. Comput., **4** (2016), no. 3, 214–232.
7. Yu. V. Kozachenko, O. V. Stus, *Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions*, Math. Communications, **3** (1998), no. 1, 83–94.
8. A. O. Pashko, I. V. Rozora, *Accuracy of simulation for the network traffic in the form of fractional Brownian Motion*, 14-th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering, TCSET, Proceedings (2018), 840–845.
9. I. V. Rozora, *Statistical hypothesis testing for the shape of impulse response function*, Communications in Statistics - Theory and Methods, **47** (2018), no. 6, 1459–1474.
10. I. V. Rozora, M. V. Lyzhechko, *On the modeling of linear system input stochastic processes with given accuracy and reliability*, Monte Carlo Methods Appl., **24** (2018), no. 2, 129–137.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: yvk@univ.kiev.ua

Кафедра прикладної статистики, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: irozora@bigmir.net

Стаття надійшла до редколегії 29.08.2019

SAMPLE CONTINUITY CONDITIONS WITH PROBABILITY ONE FOR SQUARE-GAUSSIAN STOCHASTIC PROCESSES

YU. V. KOZACHENKO, I. V. ROZORA

Abstract. A Square-Gaussian Stochastic Processes are considered. Sufficient sample uniform continuity conditions of such processes with probability on the compact are found. The estimation of the distribution for modulus continuity of Square-Gaussian process is obtained.