А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, доц.
Киевский университет

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В настоящей статье изучается задача технического обслуживания одного прибора при следующих предположениях. Прибор, работа которого рассматривается на определенном интервале времени, после некоторого случайного времени безотказной работы выходит из строя. Выход из строя приводит к потерям, пропорциональным времени простоя. Для сокращения времени простоя работа прибора контролируется через определенные промежутки времени, и отказавший прибор восстанавливается. Предполагается, что время, затраченное на одну операцию контроля, задано, во время контроля прибор не работает и не может выйти из строя. Продолжительность операции восстановления не учитывается. Контролирование приводит к потерям, состоящим из стоимости операции контроля, стоимости восстановления и потерь от простоя прибора при контролировании. В статье рассматривается задача о выборе такого числа операций контроля и промежутков времени между ними, для которых общие средние потери минимальны.

1. **Предположения и обозначения.** Предположим, что обслуживание прибора рассматривается на интервале времени $[S_1, S_2]$, $S_2 - S_1 = S$. Пусть n — число операций контроля на интервале времени $[S_1, S_2]$, а h — продолжительность операции контроля.

Обозначим через τ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — длину интервала времени между моментом окончания $(k-1)$-й проверки (операции контроля) и началом k-й проверки и через t_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — момент окончания k-й проверки. Пусть $\tau_{n+1} = S - \tau_1 - \tau_2 - \ldots - \tau_n - nh$. Для чисел τ_k, t_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, очевидно, справедливы соотношения

$$\begin{gathered} t_k = S_1 + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k + kh, \\ \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n + nh \leqslant S, \\ 0 \leqslant \tau_k \leqslant S - nh; \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1}$$

Моментом начала k-й операции контроля является $t_k - h$. Набор чисел $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, удовлетворяющих условиям (1), назовем стратегией (планом) контроля, состоящей из n операций контроля для интервала времени $[S_1, S_2]$.

Пусть $F_{k+1}(t, u)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — функция распределения (по t) времени безотказной работы прибора после k-й проверки, которая окончилась в момент u, $F_1(t)$ — функция распределения времени безотказной работы после момента S_1. Предположим, что функция $F_k(t, u)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — непрерывна по t, u при $t > 0$, $u > 0$, а функция $F_k(+0, u)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — непрерывна по u. Величина $F_k(+0, u)$ $(F_k(0, u) = 0)$ есть вероятность того, что после окончания k-й проверки в момент u прибор будет в неисправном состоянии, и учитывает, например, возможность отрицательного влияния проверки на состояние прибора.

Обозначим через c_1, c_2 и c_3 стоимости одной проверки, единицы времени простоя и восстановления соответственно $(c_2 > 0)$.

2. Оптимальная стратегия контроля. Рассмотрим сначала случай, когда число проверок прибора на интервале времени $[S_1, S_2]$ задано и равно n. Потери, отвечающие некоторой стратегии контроля $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, состоят из суммы следующих величин:

1) nc_1 — стоимость n операций контроля,

2) nhc_2 — стоимость времени простоя во время контроля,

3) $c_2 \sum\limits_{k=1}^{n+1} \int\limits_0^{\tau_k} (\tau_k - t)\, dF_k(t, t_{k-1}) = c_2 \sum\limits_{k=1}^{n+1} \int\limits_0^{\tau_k} F_k(t, t_{k-1})\, dt$ — стоимость среднего времени простоя между проверками,

4) $c_3 \sum\limits_{k=1}^{n} F_k(\tau_k, t_{k-1})$ — средняя стоимость возможных восстановлений.

Пусть

$$R_n(S_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) =$$

$$= R_n(S_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n;\ F_1(\cdot), F_2(\cdot, t_1), \ldots, F_{n+1}(\cdot, t_n)) =$$

$$= nc_1 + nc_2h + c_2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{\tau_k} F_k(t, t_{k-1})\, dt + c_3 \sum_{k=1}^{n} F_k(\tau_k, t_{k-1}) \qquad (2)$$

общие потери, соответствующие стратегии контроля $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ для интервала $[S_1, S_2]$ и функциям $F_k(t, u)$ $(k = 1, 2, \ldots, n + 1)$ — распределениям времени исправной работы прибора после окончания в момент u k-й проверки.

Функцию $R_n(S_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ будем называть функцией потерь. Стратегия контроля $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ называется оптимальной, если для любой стратегии $\check{\tau}_1, \check{\tau}_2, \ldots, \check{\tau}_n$

$$R_n(S_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \leqslant R_n(S_1, \check{\tau}_1, \check{\tau}_2, \ldots, \check{\tau}_n).$$

Очевидно, оптимальная стратегия существует.

Для нахождения оптимальной стратегии контроля и минимального значения функции потерь используем алгоритм, основанный на принципе оптимальности динамического программирования [1].

Принцип оптимальности в рассмотренном случае состоит в следующем. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ — оптимальная стратегия контроля для интервала времени $[S_1, S_2]$ и функций распределения $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$, а $R_n(S_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ — значение функции потерь для оптимальной стратегии. Рассмотрим оптимальную стратегию контроля $\tau'_2, \tau'_3, \ldots, \tau'_n$, состоящую из $n-1$ операции контроля, для интервала времени $[t_1, S_2]$ $(t_1 = S_1 + \tau_1 + h)$ и функций распределения $F_2(t, t_1)$, $F_3(t, u), \ldots, F_{n+1}(t, u)$. Значение функций потерь для стратегии $\tau'_2, \tau'_3, \ldots, \tau'_n$, очевидно, равно:

$$R_{n-1}(t_1, \tau'_2, \tau'_3, \ldots, \tau'_n, F_2, \ldots, F_{n+1}) = (n-1)(c_1 + c_2 h) +$$

$$+ c_2 \sum_{k=2}^{n+1} \int_0^{\tau'_k} F_k(t, t'_{k-1})\, dt + c_3 \sum_{k=2}^{n} F_k(\tau'_k, t'_{k-1}),$$

где

$$t'_k = t_1 + \tau'_2 + \ldots + \tau'_k + (k-1)L, \qquad k = 2, \ldots, n; \qquad t'_1 = t_1,$$

$$\tau'_{n+1} = S - \tau_1 - \tau'_2 - \ldots - \tau'_n - nh.$$

Принцип оптимальности состоит в утверждении

$$\tau'_2 = \tau_2, \ \tau'_3 = \tau_3, \ \ldots, \tau'_n = \tau_n.$$

Доказательство проводится обычным путем [1] с использованием следующего соотношения для функций потерь:

$$R_n(S_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n;\ F_1, \ldots, F_{n+1}) = c_1 + c_2 h + c_2 \int_0^{\tau_1} F_1(t)\, dt +$$

$$+ c_3 F_1(\tau_1) + R_{n-1}(t_1, \tau_2, \ldots, \tau_n;\ F_2, \ldots, F_{n+1}). \tag{3}$$

3. Определение оптимальной стратегии контроля. Предположим, что оптимальная стратегия $\tau^*_2, \tau^*_3, \ldots, \tau^*_n$, состоящая из $n-1$ операции контроля, для функций $F_2, F_3, \ldots, F_{n+1}$ и любого интервала $[t, S_2]$ $(S_1 + h \leqslant t \leqslant S_2 - (n-1)h)$ известна. Отметим, что значения $\tau^*_2, \ldots, \tau^*_n$ зависят от t. Стратегию $\tau^*_2, \ldots, \tau^*_n$ можно использовать для нахождения оптимальной стратегии $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, состоящей из n операций контроля, для интервала $[S_1, S_2]$ и функций $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ следующим образом. Для произвольного значения τ $(0 \leqslant \tau \leqslant S - nh)$ рассмотрим стратегию $\tau, \tau^*_2(t), \ldots$ $\ldots, \tau^*_n(t)$ $(t = S_1 + \tau + h)$, состоящую из n операций контроля, для интервала $[S_1, S_2]$ и функций $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$. Из равенства (3) следует, что функция потерь для стратегии $\tau, \tau_2^*(t), \ldots, \tau_n^*(t)$ равна

$$R_n(S_1, \tau, \tau_2^*, \ldots, \tau_n^*) =$$

$$= c_1 + c_2 h + c_2 \int_0^\tau F_1(s)\,ds + c_3 F_1(\tau) + R_{n-1}(t, \tau_2^*(\tau), \ldots, \tau_n^*(t)) \quad (4)$$

и состоит из двух частей — стоимости времени простоя до момента времени $S_1 + \tau$, стоимости операции контроля и восстановления (потери за время $[S_1, t]$) и минимальных потерь при стратегии $\tau_2^*(t), \ldots, \tau_n^*(t)$ для интервала времени $[t, S_2]$.

Для того чтобы стратегия контроля $\tau, \tau_2^*(t), \ldots, \tau_n^*(t)$ была оптимальной, значение τ нужно выбрать таким, при котором потери (4) минимальны. Пусть τ_1 — точка минимума функции

$$R_n(S_1, \tau, \tau_2^*, \ldots, \tau_n^*) \text{ и } \tau_k = \tau_k^*(t_1),$$

$$k = 2\ 3, \ldots, n, \qquad t_1 = S_1 + \tau_1 + h.$$

Таким образом, для оптимальной стратегии контроля $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ в интервале времени $[S_1, S_2]$ получаем следующее соотношение:

$$R_n(S_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, F_1, \ldots, F_{n+1}) =$$

$$= \min_{0 \leqslant \tau \leqslant S - nh} \left\{ c_1 + c_2 h + c_2 \int_0^\tau F_1(s)\,ds + c_3 F_1(\tau) + \right.$$

$$\left. + R_{n-1}(t, \tau_2^*, \ldots, \tau_n^*, F_2, \ldots, F_{n+1}) \right\}, \quad (5)$$

где $\tau_2^*, \ldots, \tau_n^*$ — оптимальная стратегия контроля в интервале $[t, S_2[$ и $t = S_1 + \tau + h$.

Последовательное использование соотношения (5) позволяет определить оптимальную стратегию контроля и соответствующее значение функции потерь. Рассмотрим сначала стратегию контроля τ, состоящую из одной операции контроля для интервала $[t, S_2]$ $(S_1 + (n-1)h \leqslant t \leqslant S_2 - h)$ и функций распределения F_n, F_{n+1}. Потери, соответствующие стратегии контроля τ, равны

$$R_1(t, \tau, F_n, F_{n+1}) = c_1 + c_2 h + c_2 \int_0^\tau F_n(s, t)\,ds +$$

$$+ c_3 F_n(\tau, t) + c_2 \int_0^{S_2 - t - \tau} F_{n+1}(s, t + \tau + h)\,ds, \quad (6)$$

и оптимальная стратегия $\tau_n(t)$ определяется, как значение τ, при котором потери $R_1(t, \tau, F_n, F_{n+1})$ минимальны:

$$R_1(t, \tau_n(t), F_n, F_{n+1}) = \min_{0 \leqslant \tau \leqslant S_2 - t - h} R_1(t, \tau, F_n, F_{n+1}). \qquad (7)$$

Далее, используя соотношение (5), определяем оптимальную стратегию контроля τ_{n-1}, τ_n, состоящую из двух операций для интервала $[t, S_2]$ $(S_1 + (n-2)h \leqslant t \leqslant S_2 - 2h)$. Значение τ_{n-1} определяется как значение τ, при котором

$$R_2(t, \tau_{n-1}, \tau_n(t + \tau_{n-1} + h), F_{n-1}, F_n, F_{n+1}) =$$

$$= \min_{0 \leqslant \tau \leqslant S_2 - t - 2h} \left\{ c_1 + c_2 h + c_2 \int_0^{\tau} F_{n-1}(s, t)\, ds + c_3 F_{n-1}(\tau, t) + \right.$$

$$\left. + R_1(t + \tau + h, \tau_n(t + \tau + h), F_n, F_{n+1}) \right\}, \qquad (8)$$

$$\text{а } \tau_n = \tau_n(t + \tau_{n-1} + h).$$

Аналогично определяется оптимальная стратегия, состоящая из трех операций контроля и т. д. Отметим, что при переходе от стратегии, состоящей из k операций контроля, к стратегии, состоящей из $(k+1)$-й операции контроля, нужно найти точку минимума определенной функции одной переменной величины τ при каждом значении параметра t, принимающего значения из некоторого интервала, и получить значение функции в точке минимума.

4. Некоторые замечания. Предложенную схему определения оптимальной стратегии контроля прибора можно применять в том случае, когда обслуживание прибора подчинено следующему дополнительному условию. Предположим, что рассматриваются только стратегии контроля, последняя операция контроля которых оканчивается в момент S_2. В этом случае выражение функции потерь для стратегии, состоящей из n операций контроля, отличается от функции потерь R_{n-1}, определяемой соотношением (2), постоянным слагаемым $c_1 + c_2 h$, которое является стоимостью последней проверки. Отсюда следует, что для нахождения оптимальной стратегии, состоящей из n операций контроля, при дополнительном условии нужно найти оптимальную стратегию, состоящую из $(n-1)$-й операции контроля для интервала $[S_1, S_2 - h]$ без дополнительного условия.

Рассмотрим теперь задачу об определении оптимальной стратегии обслуживания в том случае, когда $S_2 = \infty$. Набор чисел $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, определяющий стратегию контроля, состоящую из n операций контроля, удовлетворяет условию $0 \leqslant \tau_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\sigma(x)$ — неотрицательная функция, определенная на интервале $[S_1, \infty)$ и такая, что $\int\limits_{S_1}^{\infty} \sigma(x)\,dx < \infty$.

Предположим, что потери, вызванные простоем прибора в течение промежутка времени $[s, t]$, равны $\int\limits_{S_1}^{\infty} \sigma(x)\,dx$.

Если $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ — некоторая стратегия контроля для интервала $[S_1, \infty)$, то функция потерь, отвечающая этой стратегии, равна

$$c_1 n + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_k-h}^{t_k} \sigma(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{\tau_k} \sigma(x) F_k(x, t_{k-1})\,dx +$$

$$+ c_3 \sum_{k=1}^{n} F_k(\tau_k, t_{k-1}) + \int\limits_{0}^{\infty} \sigma(x) F_{n+1}(x, t_n)\,dx,$$

$$t_n = S_1 + \tau_1 + \ldots + \tau_k + kh.$$

Обозначим через $P_n(S)$ минимальное значение функции потерь, отвечающее оптимальной стратегии $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ для интервала $[S, \infty)$. Получим

$$P_n(S_1) = \min_{0 \leqslant \tau < \infty} \left\{ c_1 + \int\limits_{t_1-h}^{t_1} \sigma(s)\,ds + \int\limits_{0}^{\tau} \sigma(s) F_1(s)\,ds + P_{n-1}(t_1) \right\}, \quad (9)$$

где $t_1 = S_1 + \tau + h$, τ_1 — значение τ, при котором достигается минимум, и

$$P_1(t) = \min_{0 \leqslant \tau < \infty} \left\{ c_1 + \int\limits_{t+\tau}^{t+\tau+h} \sigma(s)\,ds + \int\limits_{0}^{\tau} \sigma(s) F_n(s, t)\,ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{\infty} \sigma(s) F_{n+1}(s, t + \tau + h)\,ds + c_3 F_n(\tau, t) \right\}. \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) можно использовать для нахождения оптимальной стратегии и минимальных потерь аналогично тому, как это сделано в п. 3.

5. Экспоненциальное время безотказной работы. (Пример). Рассмотрим случай, когда распределение времени безотказной работы является экспоненциальным и не изменяется после восстановлений прибора. При этом предположении вероятность того, что прибор, работающий в момент t, выйдет из строя за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$, равна $\lambda \Delta t + 0(\Delta t)$ при малых Δt (λ — положительная величина, называемая интенсивностью выхода из строя), а функция распределения $F_k(t, u)$ имеет следующий вид:

$$F_k(t, u) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Для функции потерь из формулы (2) получаем

$$R_n(S_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = n(c_1 + c_2 h + c_3) - (n+1)\frac{c_2}{\lambda} + \\ + c_2 \sum_{k=1}^{n+1}\left(\tau_k + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau_k}\right) - c_3 \sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda\tau_k}, \quad (11)$$

где $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ — некоторая стратегия контроля, а

$$\tau_{n+1} = S - \tau_1 - \tau_2 - \ldots - \tau_n - nh.$$

Из формулы (11) следует, что функция потерь R_n зависит только от длины S промежутка времени $[S_1, S_2]$, и поэтому можно положить $S_1 = 0$, $S_2 = S$.

Рассмотрим сначала стратегию контроля τ, состоящую из одной операции контроля, для интервала $[t, S]$ $((n-1)h \leqslant t \leqslant S - h)$. Используя формулу (11), для функции потерь получаем

$$R_1(t, \tau) = c_1 + c_3 - \frac{2c_2}{\lambda} + c_2(S - t) + \frac{c_2}{\lambda}[e^{-\lambda\tau} + e^{-\lambda(S-t-\tau-h)}] - \\ - c_3 e^{-\lambda\tau}$$

для $0 \leqslant \tau \leqslant S - t - h$.

Простые рассуждения показывают, что в случае, когда $\lambda c_3 \geqslant c_2$, функция $R_1(t, \tau)$ при любом фиксированном значении t из интервала $[(n-1)h, S-h]$ достигает своего минимума в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant S - t - h$ в точке $\tau = 0$. Это означает, что в том случае, когда стоимость восстановления больше или равна произведению стоимости единицы времени простоя прибора на среднее время безотказной работы, следует избегать восстановлений, и чтобы добиться минимальных потерь нужно начинать контрольную операцию в начальный момент времени t.

Легко заметить, что в этом случае оптимальная стратегия, состоящая из n операций контроля, есть стратегия $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n = 0$ со значением функции потерь

$$R_n = nc_1 + \frac{c_2}{\lambda}e^{-\lambda S + \lambda nh} + c_2 S - \frac{c_2}{\lambda},$$

которое минимально по n при $n = 0$.

Таким образом, если $\lambda c_3 \geqslant c_2$, то прибор не контролируется, и эта стратегия приводит к минимальным потерям. Далее предполагается, что $\lambda c_3 < c_2$.

В том случае, когда $c_3 < \frac{c_2}{\lambda}$, функция $R_1(t, \tau)$ при любом фиксированном значении t из интервала $[(n-1)h, S-h]$ достигает своего минимума в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant S-t-h$ в точке $\tau(t)$:

$$\tau(t)=\max\left\{0, \frac{S-t-h}{2}+\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2}\right\}. \qquad (12)$$

Из соотношения (12) следует, что единственную операцию контроля в интервале времени $[t, S]$ нужно начинать в начальный момент времени t при условии, что длина интервала мала, точнее, при

$$S-t \leqslant h-\frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2},$$

или при значениях

$$t \geqslant S-h+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2}.$$

Таким образом, при значениях t из интервала

$$\left[(n-1)h, S-h+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2}\right]$$

получаем

$$\tau(t)=\frac{S-t-h}{2}+\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2}. \qquad (13)$$

Предположим, что $nh < S+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2}$ (отметим, что при этом $nh < S$).

Для значения функции потерь для оптимальной стратегии контроля, состоящей из одной операции контроля, на интервале $[t, S]$ имеем

$$R_1(t)=\begin{cases} c_1-\frac{c_2}{\lambda}+c_2(S-t)+\frac{c_2}{\lambda}e^{-\lambda(S-t-h)} \\ \text{при } S-h+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2} \leqslant t \leqslant S-h \\ a_1+c_2(S-t)+\frac{2}{\lambda}\sqrt{c_2(c_2-\lambda c_3)}e^{-\frac{\lambda}{2}(S-t-h)} \\ \text{при } t < S-h+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2}, \end{cases} \qquad (14)$$

где $a_1=c_1+c_3-\frac{2c_2}{\lambda}$.

Перейдем теперь к определению оптимальной стратегии контроля, состоящей из двух операций контроля τ_{n-1}, τ_n для интервала $[t, S]$ $((n-2)h \leqslant t \leqslant S-2h)$.

В силу соотношения (8) величина $\tau_{n-1}=\tau_{n-1}(t)$ определяется при фиксированном значении $t \in ((n-2)h,\ S-2h)$ как точка минимума функции

$$R_2(t, \tau, \tau(t+\tau+h) = c_1 + c_2 h -$$
$$-\frac{c_2}{\lambda} + c_2\left(\tau + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\right) + c_3 - c_3 e^{-\lambda\tau} + R_1(t+\tau+h)$$

в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant S - t - 2h$.

Учитывая равенства (14), для функции R_2 получаем

$$\left.\begin{aligned} &R_2(t, \tau, \tau(t+\tau+h)) = 2c_1 - \frac{2c_2}{\lambda} + c_3 + c_2(S-t) + \\ &+\left(\frac{c_2}{\lambda} - c_3\right)e^{-\lambda\tau} + \frac{c_2}{\lambda}\exp\{-\lambda(S-t-\tau-2h)\} \\ &\text{при } \tau \geqslant S - t - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2 - \lambda c_3}{c_2}, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$R_2(t, \tau, \tau(t+\tau+h)) = 2c_1 + 2c_3 - \frac{3c_2}{\lambda} + c_2(S-t) +$$
$$+\left(\frac{c_2}{\lambda} - c_3\right)e^{-\lambda\tau} + \frac{2}{\lambda}\sqrt{c_2(c_2 - \lambda c_3)}\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}(S-t-\tau-2h)\right\},$$
$$\text{при } \quad \tau < S - t - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2 - \lambda c_3}{c_2},$$

для значений t, при которых

$$S - t - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2 - \lambda c_3}{c_2} > 0$$

или

$$t < S - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2 - \lambda c_3}{c_2},$$

и

$$R_2(t, \tau, \tau(t+\tau+h)) = 2c_1 - \frac{c_2}{\lambda} + c_3 + c_2(S-t) +$$
$$+\left(\frac{c_2}{\lambda} - c_3\right)e^{-\lambda\tau} + \frac{c_2}{\lambda}\exp\{-\lambda(S-t-\tau-2h)\} \quad (16)$$

при $0 < \tau < S - t - 2h$ для значений

$$t \geqslant S - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2 - \lambda c_3}{c_2}.$$

Простые рассуждения позволяют заключить, что

$$\tau_{n-1}(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } S - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2 - \lambda c_3}{c_2} \leqslant t \leqslant S - 2h \\ \frac{S - t - 2h}{3} + \frac{1}{3\lambda}\ln\frac{c_2 - \lambda c_3}{c_2} \\ \text{при } (n-1)h \leqslant t \leqslant S - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2 - \lambda c_3}{c_2}. \end{cases} \quad (17)$$

Из формул (15), (16) и (17) для минимального значения $R_2(t)$ функции $R_2(t, \tau, \tau(t+\tau+h))$ получаем

$$R_2(t) = \begin{cases} 2\left(c_1 + \frac{c_2}{\lambda}\right) + c_2(S-t) + \frac{c_2}{\lambda}\exp\{-\lambda(S-t-2h)\}, \\ \text{при } S - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2} \leqslant t \leqslant S - 2h, \\ a_2 + c_2(S-t) + \frac{3}{\lambda}\sqrt[3]{c_2(c_2-\lambda c_3)^2}\exp\left\{-\frac{\lambda}{3}(S-t-2h)\right\} \\ \text{при } (n-2)h \leqslant t < S - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2}, \end{cases}$$

где $a_2 = 2c_1 + 2c_3 - \frac{3c_2}{\lambda}$.

Оптимальная стратегия контроля $\tau_{n-1}(t)$, $\tau_n(t)$ для интервала времени $[t, S]$ определяется формулами (13) и (17) и соотношением $\tau_n(t) = \tau(t + \tau_{n-1}(t) + h)$:

$$\tau_n(t) = \begin{cases} 0, & S - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2} \leqslant t \leqslant S - 2h, \\ \tau_{n-1}(t), & (n-2)h \leqslant t < S - 2h + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2}. \end{cases}$$

Аналогично предыдущему определяется оптимальная стратегия контроля из трех операций контроля на интервале $[t, S]$.

Используя математическую индукцию, можно показать, что оптимальная стратегия контроля $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ для интервала $[0, S]$ при предположениях

$$\lambda c_3 < c_2 \quad \text{и} \quad S - nh + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2} > 0$$

определяется равенствами

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n = \tau = \frac{1}{n+1}\left[S - nh + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2-\lambda c_3}{c_2}\right]. \quad (18)$$

Моменты S_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) начала операций контроля при стратегии контроля (18) даются формулами

$$S_k = k\tau + (k-1)h, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

а соответствующие потери равны

$$c_2 S + n(c_1 + c_3) - \frac{n+1}{\lambda}c_2 + \frac{n+1}{\lambda}\{c_2(c_2-\lambda c_3)^n\}^{\frac{1}{n+1}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{\lambda}{n+1}(S - nh)\right\}.$$

Если стоимость восстановления прибора c_3 равна 0, то

$$\tau = \frac{1}{n+1}[S - nh].$$

В том случае, когда $\lambda c_3 < c_2$ и $S - nh + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{c_2 - \lambda c_3}{c_2} < 0$, оптимальной стратегией контроля, состоящей из n операций контроля, является стратегия $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n = 0$.

6. Интенсивность выхода из строя, изменяющаяся после операции контроля. (Пример). Предположим, что вероятность выхода из строя прибора в течение интервала времени $(t,\ t+\Delta t)$, если прибор работал в момент t (момент t расположен между $(k-1)$ и k-й проверками), равна $\lambda_k\,\Delta t + 0\,(\Delta t)$ $(\lambda_k > 0)$. Если $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ — некоторая стратегия контроля для интервала времени $[0,\ S]$, то интенсивность выхода из строя $\lambda\,(t)$ является функцией времени на интервале $[0,\ S]$:

$$\lambda(t) = \lambda_k,$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{k-1} + (k-1)h \leqslant t \leqslant \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k + (k-1)h,$$

$$k = 1,\ 2, \ldots, n,\ \tau_0 = 0.$$

$$\lambda(t) = \lambda_{n+1},\quad \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n + nh \leqslant t \leqslant S,$$

а функции распределения $F_k(t, u)$ определяются равенствами

$$F_k(t, u) = F_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t},\quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Пусть $\theta_k = \lambda_k^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$ и $p_k = \frac{c_2 - \lambda_k c_3}{c_2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что

$$1)\ p_k > 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, n \ \text{и}$$

$$2)\ S - nh + \ln\frac{p_k^{\theta_k + \theta_{k+1} + \ldots + \theta_{n+1}}}{p_{k+1}^{\theta_{k+1}} \cdot p_{k+2}^{\theta_{k+2}} \cdots p_n^{\theta_n}} > 0 \ \text{при}\ k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Используя рассуждения п. 4, можно показать, что при этих предположениях оптимальная стратегия $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ контроля прибора, состоящая из n операций контроля, на интервале времени $[0, S]$ определяется равенствами

$$\tau_k = \frac{\theta_k}{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n+1}}\left[S - nh + \ln\frac{p_k^{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{k-1} + \theta_{k+1} + \cdots + \theta_{n+1}}}{p_1^{\theta_1} p_2^{\theta_2} \cdots p_{k-1}^{\theta_{k-1}} p_{k+1}^{\theta_{k+1}} \cdots p_n^{\theta_n}}\right],$$

а значения функции потерь

$$R_n = n(c_1 + c_3) - c_2(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n+1}) + c_2 S +$$

$$+ c_2(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n+1}) \prod_{i=1}^{n} p_i^{\frac{\theta_i}{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n+1}}} \times$$

$$\times \exp\left\{- \frac{S - nh}{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n+1}}\right\}.$$

В том случае, когда одно или несколько условий из (1) и (2) не выполняются, в оптимальной стратегии $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ некоторые τ_k равны 0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ М., 1960.

A. Ya. Dorogovtsev

AN APPLICATION OF THE DYNAMIC PROGRAMMING METHODS TO A CERTAIN PROBLEM OF THE TECHNICAL SERVICE

Summary

An application of the optimality principle to an investigation of a service problem of the apparatus (its work time is random and its time wasted brings to losses) is considered.

Поступила в редакцию 10. XI 1968.