Д. В. ГУСАК, канд. физ.-мат. наук,

В. С. КОРОЛЮК, чл.-корр. АН УССР

Институт математики АН УССР

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ОДНОРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Пусть $\xi(t)$ — стохастически непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями и непрерывными справа траекториями. Его характеристическая функция (х. ф.) определяется соотношением

$$\psi(\alpha) = \ln Me^{i\alpha\xi(1)} = i\alpha a - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2} + \psi_+(\alpha) + \psi_-(\alpha), \qquad (1)$$

в котором

$$\begin{aligned} \psi_+(\alpha) &= \int_0^1 (e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x)\, d\Pi(x) + \int_1^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\, d\Pi(x), \\ \psi_-(\alpha) &= \int_{-1}^0 (e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x)\, d\Pi(x) + \int_{-\infty}^{-1} (e^{i\alpha x} - 1)\, d\Pi(x). \end{aligned} \qquad (2)$$

Нас будут интересовать распределения таких функционалов, как момент первого выхода процесса за фиксированный уровень

$$\tau_x = \inf\{t : \xi(t) > x\} \quad (x \geqslant 0), \qquad (3)$$

максимум (минимум) процесса на фиксированном временном интервале

$$\overline{\xi}^+(t) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u) \quad (\overline{\xi}^-(t) = \inf_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u)), \qquad (4)$$

величина первого перескока за фиксированный уровень

$$\gamma_x = \xi(\tau_x) - x \quad (x \geqslant 0), \qquad (5)$$

момент достижения максимума на фиксированном временном интервале

$$T_t = \inf\{u : \xi(u) = \overline{\xi}^+(t),\ u \leqslant t\}. \qquad (6)$$

В одной из первых работ по изучению распределений величин (3) — (6) Донскером и Бакстером [1] при некоторых ограничениях на $\psi(\alpha)$ было определено двойное преобразование распределения $\bar{\xi}^+(t)$, которое не всегда поддается обращению. При изучении распределения τ_x (тесно связанного с распределением $\bar{\xi}^+(t)$) были получены значительно лучшие результаты в работах [2—6], в которых предполагалось, что либо $\psi^-(\alpha) \equiv 0$, либо $\psi^+(\alpha) \equiv 0$. В работе [7] для распределения $\bar{\xi}^+(t)$ было установлено тождество, аналогичное тождеству Спитцера, для распределения максимума сумм случайных величин.

Внимание немногих авторов было привлечено к изучению распределений величин T_t и γ_x. Нам известна только работа [10], в которой рассмотрено распределение T_t в случае $\sigma^2 = 0$, $\psi^-(\alpha) \equiv 0$.

Целью нашей работы является изучение распределений функционалов (3) — (6) и установление связей между ними.

В работе будут рассматриваться такие случаи:

$A_1)$ $\sigma^2 > 0$;

$A_2)$ $\sigma = 0, a \neq 0, \Pi_1 = \int\limits_{|x| \leqslant 1} |x| \, d\Pi(x) < \infty$;

$A_3)$ $a = \sigma = 0, \ \lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Pi(x) < \infty$;

$Б_1^+)$ $a = \sigma = 0, \ \Pi_1 < \infty, \ \left|\dfrac{\psi_+(\alpha)}{\psi(\alpha)}\right| \underset{|\alpha| \to \infty}{\to} c \neq 0$;

$Б_1^-)$ $a = \sigma = 0, \ \Pi_1 < \infty, \ \left|\dfrac{\psi_+(\alpha)}{\psi(\alpha)}\right| \underset{|\alpha| \to \infty}{\to} 0$;

$Б_2^+)$ $\sigma = 0, \ \Pi_1 = \infty, \ \left|\dfrac{\psi_+(\alpha)}{\psi(\alpha)}\right| \underset{|\alpha| \to \infty}{\to} c \neq 0$;

$Б_2^-)$ $\sigma = 0, \ \Pi_1 = \infty, \ \left|\dfrac{\psi_+(\alpha)}{\psi(\alpha)}\right| \underset{|\alpha| \to \infty}{\to} 0$.

Следует заметить, что в случаях A_2, A_3 и $Б_1^{\pm}$

$$\psi_{\pm}(\alpha) = \pm \int\limits_0^{\pm\infty} (e^{i\alpha x} - 1) \, d\Pi(x). \tag{7}$$

Введем функцию

$$\varkappa(s,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{s-\psi(\alpha)}{1+\dfrac{\alpha^2\sigma^2}{2}-i\alpha a} & \text{для } A_i\ (i=1,2,3),\\[2mm] \dfrac{s-\psi(\alpha)}{s-\psi_+(\alpha)} & \text{для } Б_i^+\ (i=1,2),\\[2mm] \dfrac{s-\psi(\alpha)}{s-\psi_-(\alpha)} & \text{для } Б_i^-\ (i=1,2)\end{cases} \tag{8}$$

и обозначим через ε_s показательно распределенную положительную случайную величину с параметром $s>0$,

$$F_s(x)=P\{\xi(\varepsilon_s)<x\}=s\int\limits_0^\infty e^{-st}P\{\xi(t)<x\}\,dt. \tag{9}$$

Изучаемые распределения величин (3) — (6) описываются интегральными или интегро-дифференциальными уравнениями на полуоси, ядерная функция которых после двойных преобразований имеет вид

$$k(s,\alpha)=s-\psi(\alpha)\quad (s>0,\ \operatorname{Im}\alpha=0). \tag{10}$$

Поэтому при определении двойных преобразований исходных распределений возникает необходимость в факторизации определенного вида для функции (8).

§ 1. Леммы о канонической факторизации (к. ф.) и бесконечно делимой факторизации (б. д. ф.).

Докажем сначала лемму о к. ф. для $\varkappa(s,\alpha)$ на оси $\operatorname{Im}\alpha=0$. Предположим, что для $\xi(t)$ выполняются условия, которые характеризуют случаи A_i $(i=1,2,3)$ и $Б_i^\pm$ $(i=1,2)$, причем в случаях $Б_i^\pm$ существуют производные до i-го порядка включительно для $F(t,x)=P\{\xi(t)<x\}$ $(t>0)$. Для краткости эти условия обозначим через (B).

Лемма 1. Если для $\xi(t)$ выполняются условия (B), то для $\varkappa^{-1}(s,\alpha)$ имеет место представление

$$\varkappa^{-1}(s,\alpha)=\varkappa^+(s,\alpha)\,\varkappa^-(s,\alpha)\quad (\operatorname{Im}\alpha=0,\ s>0), \tag{11}$$

где $\varkappa^\pm(s,\alpha)$ — функции, аналитические в полуплоскости $\pm\operatorname{Im}\alpha\geqslant 0$; при $\alpha\in\{-\infty,\infty\}$ $0<|\varkappa^\pm(s,\alpha)|<\infty$.

Для доказательства леммы достаточно показать, что $\varkappa^\pm(s,\alpha)-1$ представимо преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции и выполняются следующие условия:

а) при $\alpha\in\{-\infty,\infty\}$ $0<|\varkappa(s,\alpha)|<\infty$,

б) $\operatorname{ind}\varkappa(s,\alpha)=0$.

В случае A_1 для $f_s(x) = \frac{\partial}{\partial x} P\{\xi(\varepsilon_s) < x\}$ существуют производные всех порядков по x, поскольку при $\sigma > 0$ $F(t, x)$ имеет производные всех порядков. Тогда

$$\varkappa^{-1}(s, \alpha) - 1 = \frac{1}{s} g_s(\alpha), \tag{12}$$

где

$$g_s(\alpha) = Me^{i\alpha\xi(\varepsilon_s)} [1 - s + \psi_+(\alpha) + \psi_-(\alpha)]$$

является преобразованием Фурье-функции

$$G_s(x) = (1 - s) f_s(x) + \int\limits_{|x|>1} [f_s(x-y) - f_s(x)]\, d\Pi(y) +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} [f_s(x-y) - f_s(x) + y f_s'(x)]\, d\Pi(y).$$

В случае A_2

$$\varkappa(s, \alpha) - 1 = \frac{s-1}{1 - i\alpha a} + \frac{1}{1 - i\alpha a} [\psi_+(\alpha) + \psi_-(\alpha)].$$

Последнее слагаемое с квадратными скобками является преобразованием Фурье-функции

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [G^{\pm}(x-y) - G^{\pm}(x)]\, d\Pi(y).$$

Здесь $G^+(x) = \delta(x \geqslant 0) e^{-ax}$ $(a > 0)$, $G^-(x) = \delta(x \leqslant 0) e^{ax}$ $(a < 0)$, где $\delta(\cdot)$ — индикаторная функция.

Для случаев $Б_i^{\pm}$ $\varkappa^{-1}(s,\alpha) - 1$ имеет представление (12), в котором

$$g_s(\alpha) = Me^{i\alpha\xi(\varepsilon_s)} [1 - s + \psi_{\mp}(\alpha)]$$

является преобразованием Фурье-функции

$$G_s(x) = \begin{cases} (1-s) f_s(x) \pm \int\limits_0^{\pm\infty} [f_s(x-y) - f_s(x)]\, d\Pi(y)\ (Б_1^{\mp}), \\ (1-s) f_s(x) \pm \int\limits_{\pm 1}^{\pm\infty} [f_s(x-y) - f_s(x)]\, d\Pi(y) \pm \\ \pm \int\limits_0^{\pm 1} [f_s(x-y) - f_s(x) + y f_s'(x)]\, d\Pi(y)\ (Б_2^{\mp}). \end{cases}$$

При вещественных и ограниченных α $e^{\psi(\alpha)} \neq 0$, значит, $|\psi(\alpha)| < \infty$. Из представлений для $\varkappa^{\pm 1}(s, \alpha)$ следует, что

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} \varkappa^{\pm 1}(s, \alpha) = 1.$$

Кроме этого, при вещественных значениях α $\operatorname{Re}(s - \psi(\alpha)) > 0$. Из перечисленных свойств $\psi(\alpha)$ и $\varkappa(s, \alpha)$ следует выполнение условий а) и б).

Таким образом, лемма 1 доказана для случаев A_i $(i = 1, 2)$ и $Б_i^{\pm}$ $(i = 1, 2)$. В случае A_3 факторизация функции

$$\frac{s - \psi(\alpha)}{s + \lambda} = 1 - \frac{\lambda}{s + \lambda} \varphi(\alpha)$$

$\Big($где $\varphi(\alpha) = Me^{i\alpha\bar{\xi}}$ — х. ф. случайной величины, для которой $dP\{\bar{\xi} < x\} = \frac{1}{\lambda} d\Pi(x)\Big)$ следует из результатов суммирования независимых случайных величин.

Определение множителей $\varkappa^{\pm}(s, \alpha)$ сводится, вообще говоря, к вычислению интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln \varkappa(s, \sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \alpha}$. В случае односторонних скачков вычисление $\varkappa^{\pm}(s, \alpha)$ проводится довольно просто.

Лемма 2. Пусть х. ф. $\xi(t)$ определяется соотношением (1). Тогда

$$\frac{s}{s - \psi(\alpha)} = Me^{i\alpha\xi(\varepsilon_s)} = Me^{i\alpha\xi_s^+} Me^{i\alpha\xi_s^-} \quad (\operatorname{Im} \alpha = 0), \tag{13}$$

где $\xi_s^{\pm}$ — безгранично делимые случайные величины, для которых

$$\ln Me^{i\alpha\xi_s^{\pm}} = \pm \int\limits_0^{\pm\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\, dN_s^{\pm}(x),$$

$$\begin{gathered} N_s^+(x) = -\int\limits_0^{\infty} e^{-st} t^{-1} P\{\xi(t) > x\}\, dt \quad (x > 0), \\ N_s^-(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} t^{-1} P\{\xi(t) < x\}\, dt \quad (x < 0). \end{gathered} \tag{14}$$

Эта лемма следует из результатов Б. А. Рогозина [7]. Новое и довольно простое доказательство ее можно получить из представления $Me^{i\alpha\xi(\varepsilon_s)}$ интегралом типа Фруллани

$$\ln \frac{s}{s-\psi(\alpha)} = \int_0^\infty \frac{e^{-t(s-\psi(\alpha))} - e^{-st}}{t}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} t^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\, d_x P\{\xi(t) < x\}\, dt.$$

Применяя обобщение теоремы Фубини для перемены порядка интегрирования в последнем соотношении, получаем

$$\ln \frac{s}{s-\psi(\alpha)} = \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\, d_x \int_0^\infty e^{-st} t^{-1} P\{\xi(t) < x\}\, dt -$$

$$- \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\, d_x \int_0^\infty e^{-st} t^{-1} P\{\xi(t) > x\}\, dt.$$

Из последнего соотношения следует (13).

Далее будет показано, что

$$Me^{i\alpha \xi_s^+} = Me^{i\alpha \bar{\xi}^+(\varepsilon_s)}, \quad Me^{i\alpha \xi_s^-} = Me^{i\alpha \bar{\xi}^-(\varepsilon_s)}. \tag{15}$$

Путем непосредственных вычислений для процесса $\xi_0(t) = at + \sigma W(t)$ ($W(t)$ — процесс броуновского движения) с функцией распределения

$$P\{\xi_0(t) < x\} = \Phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-at)^2}{2\sigma^2 t}}\, du$$

можно определить $N_s^\pm(x)$, $Me^{i\alpha\xi_s^\pm}$

$$\frac{d}{dx} N_s^+(x) = \int_0^\infty e^{-st} t^{-1} \Phi'_x(t, x)\, dt = \frac{1}{x} e^{-a_s^+ x},$$

$$\psi_s^\pm(\alpha) = \ln \frac{a_s^\pm}{a_s^\pm \pm i\alpha}, \quad a_s^\pm = \frac{\sqrt{2s\sigma^2 + a^2} \mp a}{\sigma^2}.$$

Значит, $\xi_s^\pm$ — показательно распределенные случайные величины с х. ф.

$$Me^{i\alpha\xi_s^\pm} = \frac{a_s^\pm}{a_s^\pm \mp i\alpha}. \tag{16}$$

Замечание. Частный случай $\psi(\alpha) = \psi_\pm(\alpha)$ случая $Б_1^\pm$ является тривиальным с точки зрения изучения функционалов (3) — (6), поэтому необходимость в факторизации для $s-\psi(\alpha)$ отпадает. Если в случае $Б_2^{\pm}$ $\psi(\alpha)=\psi_{\pm}(\alpha)$, то $\varkappa(s,\alpha)$ выбирается следующим образом:

$$\varkappa(s,\alpha)=\frac{s-\psi_{\pm}(\alpha)}{1-\psi_{\pm}^0(\alpha)},$$

$$\psi_+^0(\alpha)=\int_0^{a_+}(e^{i\alpha x}-1-i\alpha x)\,d\Pi(x),\quad \psi_-^0(\alpha)=\int_{-a_-}^{0}(e^{i\alpha x}-1-i\alpha x)\,d\Pi(x),$$

где положительные числа $a_{\pm}\leqslant 1$ выбраны так, чтобы

$$0<a_+<\inf\{x>0:\Pi(x)=0\},\ \sup\{x<0:\Pi(x)=0\}<-a_-<\infty.$$

§ 2. О совместном распределении $\xi(t)$ и $\bar{\xi}^+(t)$ и преобразовании распределения τ_x

Для процессов $\xi(t)$ введем последовательность «урезанных» процессов $\xi_n(t)$, х. ф. которых определяется кумулянтой

$$\begin{aligned}\psi_n(\alpha)&=i\alpha a_n-\frac{\sigma^2\alpha^2}{2}+\lambda_n\int_{|x|>\frac{1}{n}}(e^{i\alpha x}-1)\,dF_n(x),\\ dF_n(x)&=\frac{1}{\lambda_n}d\Pi(x)\,\delta\left(|x|>\frac{1}{n}\right),\quad \lambda_n=\int_{|x|>\frac{1}{n}}d\Pi(x),\end{aligned}\tag{17}$$

$a_n=a$ при ограниченной вариации, в противном случае

$$a_n=a-\int_{\frac{1}{n}\leqslant|x|<1}x\,d\Pi(x).$$

Пусть $\xi_1(t)$ — обобщенный пуассоновский процесс с параметром $\lambda<\infty$

$$\begin{aligned}\xi_1(t)&=\sum_{k=0}^{\nu(t)}\xi_k,\\ P\{\nu(t)=k\}&=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad P\{\xi_k<x\}=F(x),\\ F_1(t,x)&=P\{\xi_1(t)<x\}=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}F_k^*(x)\end{aligned}\tag{18}$$

$$\left(F_k^*(x) = P\left\{\sum_{r=0}^{k} \xi_r < x\right\},\ \xi_0 = 0\right).$$

Будем говорить, что процесс вида

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \xi_1(t) \quad (\xi_0(t) = at + \sigma W(t)) \tag{19}$$

с вероятностью 1 обладает ограниченным числом скачков на конечном интервале. Такого типа процессами будут и «урезанные» процессы.

Определим сначала совместное распределение

$$B_z(t, x) = P\{\xi(t) < x, \bar{\xi}^+(t) \leqslant z\} \quad (z \geqslant 0) \tag{20}$$

для процессов вида (19) с $\sigma^2 > 0$. Для этого нам удобнее будет рассматривать процесс

$$\xi_z(t) = \xi(t) - z \quad (\bar{\xi}_z(t) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi_z(u), z > 0)$$

и совместное распределение

$$B(t, x, z) = P\{\xi_z(t) < x, \bar{\xi}_z(t) \leqslant 0\} = B_z(t, x + z) \quad (x \leqslant 0).$$

Будем предполагать, не вдаваясь в выяснени. условий существования $B''_{xx}(t, x, z)$, что для $B(t, x, z)$ существует производная 2-го порядка по x. Тогда $B(t, x, z)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -a\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^{\infty} [B(t, x-y, z) - B(t, x, z)]\, d\Pi(y) \quad (x \leqslant 0) \tag{21}$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} B(t, x, z) &= B(t, 0, z), \\ B(0, x, z) &= \delta(-z \leqslant x). \end{aligned} \tag{22}$$

Прежде чем находить решение задачи (21) — (22), докажем лемму.

Лемма 3. Пусть $\xi(t)$ — процесс вида (19) с $\sigma^2 > 0$, тогда

$$\begin{aligned} &(1 - i\alpha) M e^{i\alpha\xi_s^\pm} = c_s^\pm + g_s^\pm(\alpha) \neq 0, \infty \quad (\alpha \in \{-\infty, \infty\}), \\ &c_s^\pm \neq 0, g_s^\pm(\alpha) = \pm \int_0^{\pm\infty} e^{i\alpha x} G_s^\pm(x)\, dx \quad (G_s^\pm(x) \in L_1(0, \infty)). \end{aligned} \tag{23}$$

Из стохастического представления процесса (19)

$$\xi(t) = \xi_0(t)\,\delta(\zeta > t) + \xi_0(\zeta) + \xi(t-\zeta)\,\delta(\xi \leqslant t) \quad (P\{\zeta > t\} = e^{-\lambda t})$$

следует, что

$$F(t, x) = e^{-\lambda t}\Phi(t, x) + Q(t, x),$$
$$Q(t, x) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda y} P\{\sigma W(y) + \xi(t-y) < x - ay\}\, dy. \qquad (24)$$

Из (24) получаем

$$Me^{i\alpha\xi_s^+} = Me^{i\alpha\xi_{s1}^+} Me^{i\alpha\xi_{s2}^+},$$

где оба множителя являются б. д. х. ф. При этом

$$Me^{i\alpha\xi_{s1}^+} = \frac{a_{s+\lambda}^+}{a_{s+\lambda}^+ - i\alpha}$$

определяет показательно распределенную положительную случайную величину ξ_{s1}^+, а ξ_{s2}^+ характеризуется тем, что его спектральная функция $N_{s2}^+(x)$ ограничена. Учитывая эти свойства ξ_{si}^+ $(i=1,2)$, нетрудно доказать (23) для ξ_s^+. Для ξ_s^- доказательство леммы 3 аналогично.

Заметим, что рассуждения, использованные при доказательстве леммы 3, позволяют установить дифференцируемость распределений (она обеспечивается наличием невырожденной показательной компоненты ξ_{s1}^+ при $\sigma^2 > 0$).

Введем обозначения

$$\widetilde{B}(s, x, z) = \int_0^\infty e^{-st}B(t, x, z)\, dt,$$
$$\beta(s, \alpha, z) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} d_x\widetilde{B}(s, x, z), \qquad (25)$$
$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} dG(x)\right]_{\pm} = \pm \int_{\pm 0}^{\pm\infty} e^{i\alpha x} dG(x) \quad (\operatorname{var} G(x) < \infty)$$

и докажем теорему.

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$ процесс, кумулянта которого имеет вид (1) — (2). Тогда

1) При $s > 0$, $\operatorname{Im}\alpha = 0$

$$s\beta(s, \alpha, z) = Me^{i\alpha\xi_s^-}[Me^{i\alpha\xi_s^+}e^{-i\alpha z}]_-; \qquad (26)$$

2) справедливо соотношение (тождество Спитцера — Рогозина в обращенном виде)

$$P\{\xi_s^{\pm} < x\} = P\{\bar{\xi}^{\pm}(\varepsilon_s) < x\}; \tag{27}$$

3) если $x < z$, то

$$B(t, x, z) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \int_{-z}^0 P\{\bar{\xi}^-(t-u) < x-y\}\, d_y P\{\bar{\xi}^+(u) < y+z\}\, du, \tag{28}$$

если $-z < x \leqslant 0$, то

$$B(t, x, z) = P\{\bar{\xi}^+(t) < x+z\} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \int_x^0 P\{\bar{\xi}^-(t-u) < x-y\}\, d_y P\{\bar{\xi}^+(u) < y+z\}\, du. \tag{29}$$

Проведем сначала доказательство теоремы для процессов вида (19). После применения преобразования Лапласа по t вместо (21) — (22) получим уравнение

$$s\widetilde{B}(s, x, z) = \delta(-z < x) - a\frac{\partial \widetilde{B}}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{B}}{\partial x^2} +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} [\widetilde{B}(s, x-y, z) - \widetilde{B}(s, x, z)]\, d\Pi(y) \tag{30}$$

с нулевыми условиями для производных от $\widetilde{B}(s, x, t)$ по x

$$\widetilde{B}'_x(s, x, z) = \widetilde{B}''_{xx}(s, x, z) = 0,$$

$$\widetilde{B}(s, x, z) = \widetilde{B}(s, 0, z) \quad (x > 0). \tag{31}$$

Учитывая (31), продолжим уравнение (30) и на положительную полуось $x > 0$

$$s\widetilde{B}(s, x, z) = \delta(-z < x) - a\frac{\partial \widetilde{B}}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{B}}{\partial x^2} +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} [\widetilde{B}(s, x-y, z) - \widetilde{B}(s, x, z)]\, d\Pi(y) + R_+(s, x, z) \quad (\infty < x < \infty); \tag{32}$$

$$R_+(s, x, z) = s\widetilde{B}(s, 0, z) - 1 -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} [\widetilde{B}(s, x-y, z) - \widetilde{B}(s, 0, z)]\, d\Pi(y) \quad (x > 0). \tag{33}$$

Из (32) — (33) следует уравнение

$$(s-\psi(\alpha))\,\beta(s,\alpha,z)=e^{-i\alpha z}+\varrho_{+}(s,\alpha,z),$$

$$\varrho_{+}(s,\alpha,z)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{i\alpha x}\widetilde{B}'_{x}(s,x-y,z)\,d\Pi(y), \tag{34}$$

которое с учетом б. д. ф. перепишется таким образом:

$$s\beta(s,\alpha,z)=Me^{i\alpha\xi_s^{+}}Me^{i\alpha\xi_s^{-}}[e^{-i\alpha z}+\varrho_{+}(s,\alpha,z)]. \tag{35}$$

Учитывая лемму 3, убеждаемся в том, что к функциям

$$\frac{s\beta(s,\alpha,z)\,(1+i\alpha)}{(1-i\alpha)\,Me^{i\alpha\xi_s^{-}}},\quad Me^{i\alpha\xi_s^{+}}[e^{-i\alpha z}+\varrho_{+}(s,\alpha,z)]$$

применима операция проектирования $[\ ]_{-}$, с помощью которой из (35) получаем

$$\frac{s\beta(s,\alpha,z)}{Me^{i\alpha\xi_s^{-}}}=[Me^{i\alpha\xi_s^{+}}e^{-i\alpha z}]_{-}.$$

Таким образом, первая часть теоремы 1 доказана для процессов вида (19).

После обращения в (26) по α получаем

$$s\widetilde{B}(s,x,z)=\int\limits_{-z}^{0}P\{\xi_s^{-}<x-y\}\,d_yP\{\xi_s^{+}<y+z\}\quad(x\leqslant 0). \tag{36}$$

Для доказательства второй части теоремы 1 достаточно положить в (36) $x=0$:

$$\begin{aligned}s\widetilde{B}(s,0,z)&=s\int\limits_{0}^{\infty}e^{-st}P\{\bar{\xi}^{+}(t)<z\}\,dt=\\&=\int\limits_{-z}^{0}P\{\xi_s^{-}<-y\}\,d_yP\{\xi_s^{+}<y+z\}=P\{\bar{\xi}_s^{+}<z\}.\end{aligned} \tag{37}$$

Обращая по s (37), получаем доказательство последней части теоремы, но только для процессов вида (19) с $\sigma^2>0$. Переходом к пределу при $\sigma\to 0$ устанавливается справедливость теоремы и для обобщенного пуассоновского процесса. В случае процесса с неограниченной спектральной функцией соотношения (26) — (29) теоремы 1 сначала доказываются для «урезанных» процессов. Осуществляя в этих соотношениях переход к пределу при $n\to\infty$, устанавливаем справедливость теоремы 1 для процессов с неограниченными спектральными функциями.

Воспользовавшись сделанным после доказательства леммы 3 замечанием о существовании 1-й производной у распределений для $\xi_s^{\pm}$ и соотношением (36), заключаем, что для процесса $\xi(t)$ вида (19) с $\sigma^2 > 0$ $B(s, x, z)$ дважды дифференцируемо по x.

Для установления дифференцируемости $B(t, x, z)$ покажем сначала, что $P\{\bar{\xi}^{\pm}(t) > x\}$ дифференцируемо по $x > 0$ $(x < 0)$. Для этого обозначим $\bar{\xi}_*^{+}(t-y) = \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant y} |\xi(t) - \xi(u)|$ $(0 \leqslant y \leqslant t)$. Тогда

$$P\{\bar{\xi}^{+}(t) > x\} = e^{-\lambda t} P\{\bar{\xi}_0^{+}(t) > x\} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda y} P\{\bar{\xi}_0^{+}(y) > x\}\, dy + I,$$

$$I = P\{\xi_0^{+}(\zeta) < x, \xi_0(\zeta) + \xi > x\} + P\{\bar{\xi}_0^{+}(\zeta) < x,$$

$$\xi_0(\zeta) + \xi < x, \xi_0(\zeta) + \xi + \bar{\xi}_*^{+}(t - \zeta) > x\} =$$

$$= \lambda \int_0^t e^{-\lambda y} \int_0^{\infty} [P\{\xi > z\} + P\{\xi < z, \bar{\xi}_*^{+}(t-y) > z\}]\, \varphi(y, x - z, x)\, dz\, dt$$

$$\left(\varphi(t, x, z) = \frac{\partial}{\partial x} P\{\xi_0(t) \quad x, \bar{\xi}_0^{+}(t) < z\}\right).$$

Здесь ξ — величина скачка с функцией распределения $F(x)$, ζ — время (показательное с параметром λ) между соседними скачками для $\xi(t)$.

Из последних двух соотношений и (28) — (29) следует, что для процесса $\xi(t)$ вида (19) с $\sigma^2 > 0$ $B(t, x, z)$ дифференцируемо по x сколько угодно раз.

§ 3. Распределение $\tau_x(\bar{\xi}^{+}(t))$, его преобразование и некоторые свойства

Прежде чем заняться изучением распределения τ_x, заметим, что

$$P\{\tau_x \leqslant t\} = P\{\bar{\xi}^{+}(t) > x\} \quad (x \geqslant 0). \tag{38}$$

Обозначим

$$T(s, x) = Me^{-s\tau_x}, \quad \theta(s, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x}\, d_x T(s, x).$$

Из соотношения (38), устанавливающего связь между τ_x и $\bar{\xi}^{+}(t)$ следует, что

$$\theta(s, \alpha) = -Me^{i\alpha\bar{\xi}^{+}(\varepsilon_s)}. \tag{39}$$

Используя п. 2 теоремы 1 и факторизационные леммы 1 и 2, можно доказать теорему 2.

Теорема 2. Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда для случая A_1

$$\theta(s,\alpha) = -Me^{i\alpha\bar{\xi}^{+}(\varepsilon_s)} = -\frac{a_1^{+}}{a_1^{+} - i\alpha}\frac{\varkappa^{+}(s,\alpha)}{\varkappa^{+}(s,0)}; \tag{40}$$

для случая A_2 при $a \leqslant 0$, для случая A_3 и для случаев $Б_i^{-}$ $(i=1,2)$

$$Me^{i\alpha\xi^{+}(\varepsilon_s)} = \frac{\varkappa^{+}(s,\alpha)}{\varkappa^{+}(s,0)}; \tag{41}$$

для случая A_2 при $a > 0$

$$Me^{i\alpha\bar{\xi}^{+}(\varepsilon_s)} = \frac{1}{1 - i\alpha a}\frac{\varkappa^{+}(s,\alpha)}{\varkappa^{+}(s,0)}; \tag{42}$$

для случаев $Б_i^{+}$ $(i=1,2)$

$$Me^{i\alpha\bar{\xi}^{+}(\varepsilon_s)} = \frac{1}{1-\psi_{+}(\alpha)}\frac{\varkappa^{+}(s,\alpha)}{\varkappa^{+}(s,0)}. \tag{43}$$

На основании (40) и (42) можно заключить, что за счет свертывания с показательным распределением $\bar{\xi}^{+}(\varepsilon_s)$ имеет плотность в случае A_1 и в случае A_2 при $a > 0$.

В случае $Б_i^{+}$ $(i=1,2)$ для $\bar{\xi}^{+}(\varepsilon_s)$ существует плотность, если распределение процесса с кумулянтой $\psi_{+}(\alpha)$ имеет плотность (см. (43)).

Из (41) следует, что в случае A_2 при $a \leqslant 0$, в случае A_3, в случае $Б_i^{-}$ $(i=1,2)$ плотность распределения не существует хотя бы потому, что

$$P\{\bar{\xi}^{+}(\varepsilon_s) = 0\} = \frac{c_s^{+}}{\varkappa^{+}(s,0)} > 0 \quad (c_s^{+} = \lim_{|\alpha|\to\infty}\varkappa^{+}(s,\alpha)).$$

Предположим, что $\xi(t)$ имеет ограниченное среднее значение

$$M|\xi(t)| < \infty. \tag{44}$$

Тогда нетрудно показать, что и $M|\bar{\xi}^{\pm}(t)| < \infty$. Действительно, на основании (14) и п. 2 теоремы 1 можно получить неравенство

$$M|\bar{\xi}^{-}(\varepsilon_s)| + M|\bar{\xi}^{+}(\varepsilon_s)| = s\int_0^\infty e^{-st}M|\xi(t)|t^{-1}dt \leqslant$$

$$\leqslant s\int_0^\infty e^{-st}\left[t\left(|a| + \int_{|x|>1}|x|\,d\Pi(x) + \sqrt{t\left(\int_{|x|\leqslant 1}x^2 d\Pi(x) + \sigma^2\right)}\right]t^{-1}dt,$$

которое в силу монотонности $M|\bar{\xi}^-(t)|$ и $M\bar{\xi}^+(t)$ по t позволяет заключить, что

$$M|\bar{\xi}^\pm(t)| = \int_0^\infty P\{|\bar{\xi}^\pm(t) > x\}\,dx < \infty. \tag{45}$$

§ 4. Совместное распределение τ_x и γ_x

В этом параграфе будем рассматривать процесс $\xi(t)$ без диффузионной компоненты с ограниченным средним (см. (44)). Это условие понадобится для того, чтобы совместное распределение

$$V_x(t, u) = P\{\tau_x \leqslant t,\ \gamma_x < u\} \qquad (x \geqslant 0) \tag{46}$$

обладало свойством суммируемости

$$\int_0^\infty V_x(t, u)\,dx = \int_0^\infty P\{\bar{\xi}^+(t) > x,\ \gamma_x < u\}\,dx \leqslant \int_0^\infty P\{\bar{\xi}^+(t) > x\}\,dx < \infty.$$

Предположим сначала, что $\xi(t)$ имеет вид (19) с $\delta = 0$. Тогда для τ_x и γ_x можно установить справедливость следующих стохастических соотношений. Если $a \leqslant 0$, то

$$\begin{gathered}\tau_x = \xi + \tau_{x-\xi-a\zeta},\\ \gamma_x = (a\zeta + \xi - x)\,\delta(a\zeta + \xi > x) + \gamma_{x-a\zeta-\xi}\,\delta(a\zeta + \xi \leqslant x).\end{gathered} \tag{47}$$

Если $a > 0$, то

$$\tau_x = \frac{x}{a}\,\delta\left(\zeta \geqslant \frac{x}{a}\right) + (\zeta + \tau_{x-a\zeta-\xi})\,\delta\left(\zeta < \frac{x}{a}\right),$$

$$\gamma_x = \begin{cases}(\xi + a\zeta - x)\,\delta(\xi + a\zeta > x) + \gamma_{x-a\zeta-\xi}\,\delta(\xi + a\zeta \leqslant x) & \left(\zeta \geqslant \dfrac{x}{a}\right),\\ 0 & \zeta < \dfrac{x}{a}.\end{cases} \tag{48}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered}V(u, s, x) = \int_0^\infty e^{-st}\,d_tV_x(t, u), \qquad V_+(u, s, x) = V(u, s, x)\,\delta \qquad (x \geqslant 0),\\ v_+(u, s, \alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}V_+(u, s, x)\,dx, \qquad t_+(s, \alpha) = \int_0^\infty Me^{-s\tau_x}e^{i\alpha x}\,dx.\end{gathered} \tag{49}$$

Существование $v_+(u, s, \alpha)$ следует из (45). Когда $a \leqslant 0$, для $V_+(u, s, x)$ из (47) следует интегральное уравнение

$$V_+(u, s, x) = \frac{\lambda}{s+\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} V_+(u, s, x-y)\, dG(s, x) +$$

$$+ \frac{\lambda}{s+\lambda} [G(s, x+u) - G(s, x)] \qquad (x > 0), \tag{50}$$

$$G(s, z) = P\{\xi + \eta_s < z\}, \quad P\{\eta_s < x\} = e^{\frac{s+\lambda}{|a|}x} \qquad (x \leqslant 0).$$

Когда $a > 0$, из (48) следует интегральное уравнение

$$V_+(u, s, x) = \frac{\lambda}{a} \int_0^x e^{-\frac{s+\lambda}{a}y} dy \int_{-\infty}^{\infty} V_+(u, s, x-y-z)\, dF(z) +$$

$$+ \frac{\lambda}{a} \int_0^x e^{-\frac{s+\lambda}{a}y} [F(x+u-y) - F(x-y)]\, dy + e^{-\frac{s+\lambda}{a}x} \qquad (x > 0). \tag{51}$$

Теорема 3. Пусть $\xi(t)$ процесс с кумулянтой (1) — (2), для которого удовлетворяется условие (44). Тогда при $u > 0$, $s > 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha = 0$ $v_+(u, s, \alpha)$ определяется соотношением

$$v_+(u, s, \alpha) = t_+(s, \alpha) + \frac{1}{s} M e^{i\alpha\bar{\xi}^+(\varepsilon_s)} [n_u(\alpha) M e^{i\alpha\bar{\xi}^-(\varepsilon_s)}]_+, \tag{52}$$

где $n_u(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} N(u+x)\, dx$ (определение $[\ ]_+$ см. в (25)).

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству п. 1 теоремы 1. Сначала рассматриваются процессы вида (19) с $\sigma = 0$. Тогда уравнения (50) и (51) доопределены на всей оси $-\infty < x < \infty$, подвергаются преобразованию Фурье, и на основании факторизационных лемм устанавливается (52). Для процессов с неограниченными спектральными функциями теорема сначала доказывается для «урезанных» процессов с кумулянтой (17), и путем предельного перехода ($n \to \infty$) формула (52) устанавливается в общем случае. Из теоремы 3 путем обращения (52) выводятся следующие утверждения.

Следствие. В условиях теоремы 3

$$V_+(u, s, x) = M e^{-s\tau_x} +$$

$$+ \frac{1}{x} \int_0^x \int_{-\infty}^0 N(x+u-y-z)\, dP\{\bar{\xi}^-(\varepsilon_s) \geqslant z\}\, dP\{\bar{\xi}^+(\varepsilon_s) < y\}, \tag{53}$$

$$V_x(t, u) = P\{\tau_x < t\} -$$
$$-\int_0^t \int_0^x \int_{-\infty}^0 N(x + u - y - z)\, d_z P\{\bar{\xi}^-(v) \geqslant z\}\, d_y P\{\bar{\xi}^+(t - v) < u\}\, dv. \tag{54}$$

Если

$$M\xi(1) < 0, \qquad \bar{\xi}^+ = \sup_{0 \leqslant t < \infty} \xi(t),$$

$$\mu_-(z) = -\int_0^\infty P\{\bar{\xi}^-(t) \geqslant z\}\, dt,$$

то

$$P\{\bar{\xi}^+ > x,\ \gamma_x < u\} = P\{\bar{\xi}^+ > x\} +$$
$$+ \int_0^x \int_{-\infty}^0 N(u + x - y - z)\, d\mu_-(z)\, dP\{\bar{\xi}^+ < y\}.$$

Если

$$M\xi(1) > 0, \qquad \bar{\xi}^- = \inf_{0 \leqslant t < \infty} \xi(t), \qquad \mu_+(y) = \int_0^\infty P\{\tau_y > t\}\, dt,$$

то

$$P\{\gamma_x < u\} = 1 + \int_0^x \int_{-\infty}^0 N(u + x - y - z)\, dP\{\bar{\xi}^- < z\}\, d\mu_+(y).$$

§ 5. О распределении T

Здесь предполагается, что $\xi(t)$ — однородный процесс с ограниченной вариацией [4], не содержащей диффузионной компоненты. Обозначим

$$\tau_0^\pm = \inf\{t : \pm\xi(t) > 0\}, \qquad q^\pm(s) = \int_0^\infty e^{-st} P\{\tau_0^\pm > t\}\, dt,$$

предполагая невырожденность для $\tau_0^\pm$.

Теорема 4. Если $a \leqslant 0$, $P\{\tau_0^+ > t\} > 0$ $(t > 0)$, то

1) для двойного преобразования распределения T_t имеет место соотношение

$$\int_0^\infty e^{-st} M e^{-uT_t} dt = \frac{q^+(s)}{(s + u)\, q^+(u + s)} \qquad (s + u > 0); \tag{55}$$

2) производящая функция для T_∞ — момента достижения абсолютного максимума имеет вид

$$M e^{-uT_\infty} = \frac{P\{\bar{\xi}^+ = 0\}}{u q^+(u)}. \tag{56}$$

При доказательстве используется стохастическое представление

$$T_t = \tau_0^+ \delta(\bar{\xi}^+(t-\tau_0^+) < 0) + (\tau_0^+ + T_{t-\tau_0}) \delta(\bar{\xi}^+(t-\tau_0) \geqslant 0),$$

на основании которого для

$$K_u(t) = M[e^{-uT_t}, \tau_0^+ \leqslant t]$$

выводится интегральное уравнение

$$K_u(t) = \int_0^t e^{-uy} K_u(t-y)\, dP\{\tau_0^+ < y\} +$$

$$+ \int_0^t e^{-uy} P\{\tau_0^+ > t-y\}\, dP\{\tau_0^+ < y\} \qquad (t > 0).$$

Подвергая последнее уравнение преобразованию Лапласа, определяем двойное преобразование (55) искомого распределения. Воспользовавшись предельным переходом при $s \to 0$, из (55) нетрудно получить (56).

Заметим, что из соотношения (56) следует, что $P\{T_\infty < \infty\} = 1$, когда $P\{\bar{\xi}^+ = 0\} > 0$.

Теорема 5. При $a > 0$ и $P\{\tau_0^- > t\} > 0$ $(t > 0)$

1) для T_t имеет место соотношение

$$\int_0^\infty e^{-(s+u)t} M e^{uT_t} dt = \frac{q^-(s)}{(s+u)\, q^-(s+u)}; \tag{57}$$

2) если $P\{\xi^- = 0\} > 0$, то T_∞ — выраждена и $P\{T_\infty = \infty\} = 1$;

3) если $P\{\xi^- = 0\} = 0$, то T_∞ — невыраждена и производящая функция для нее имеет вид

$$M e^{-sT_\infty} = \frac{q^-(s)}{q^-(0)}. \tag{58}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, допускающие вычисление с помощью теории вычетов интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \varkappa(s, v) \frac{dv}{v - \alpha},$$

значение которого определяет множители $\varkappa^{\pm}(s, \alpha)$.

1. Пусть в случае A_1

$$\psi(\alpha) = \psi_0(\alpha) + \psi_+(\alpha) \left(\psi_0(\alpha) = i\alpha a - \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2},\ \sigma > 0 \right). \tag{59}$$

Тогда для $\varkappa^{-1}(s, \alpha) = \dfrac{1-\psi_0(\alpha)}{s-\psi(\alpha)}$ факторизационные множители $\varkappa^{\pm}(s, \alpha)$ определяются следующим образом:

$$\varkappa^{+}(s, \alpha) = \frac{a_1^{+} - i\alpha}{s-\psi(\alpha)}\,(\eta^{+}(s) + i\alpha), \qquad \varkappa^{-}(s, \alpha) = \frac{a_1^{-} + i\alpha}{\eta^{+}(s) + i\alpha}, \tag{60}$$

где $\alpha_s = i\eta^{+}(s)$ — единственный корень уравнения $\psi(\alpha) = s$ $(s > 0)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha > 0$.

В этом случае (см. (40))

$$Me^{i\alpha\bar{\xi}^{+}(\varepsilon_s)} = \frac{s}{s-\psi(\alpha)}\,\frac{\eta^{+}(s) + i\alpha}{\eta^{+}(s)}; \tag{61}$$

$$Me^{i\alpha\bar{\xi}^{-}(\varepsilon_s)} = \frac{\eta^{+}(s)}{\eta^{+}(s) + i\alpha}. \tag{62}$$

При $M\xi(1) < 0$ $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s}{\eta^{+}(s)} = -M\xi(1)$ из соотношения (61) следует

$$Me^{i\alpha\bar{\xi}^{+}} = \frac{M\xi(1)\,i\alpha}{\psi(\alpha)}. \tag{63}$$

В случае $M\xi(1) > 0$ $\eta^{+}(s) > 0$ при $s \geqslant 0$. Таким образом, при $M\xi(1) > 0$ $\bar{\xi}^{-}(\varepsilon_s)$ и $\bar{\xi}^{-}$ имеют показательное распределение.

2. Пусть в случае A_1

$$\psi(\alpha) = \psi_0(\alpha) + \psi_{-}(\alpha) \qquad (\sigma > 0). \tag{64}$$

Тогда для $\varkappa^{-1}(s, \alpha)$ факторизационные множители $\varkappa^{\pm}(s, \alpha)$ определяются следующим образом:

$$\varkappa^{+}(s, \alpha) = \frac{a_1^{+} - i\alpha}{\eta^{-}(s) - i\alpha}, \qquad \varkappa^{-}(s, \alpha) = \frac{a_1^{-} + i\alpha}{s-\psi(\alpha)}\,(\eta^{-}(s) - i\alpha), \tag{65}$$

где $\alpha_s = -i\eta^{-}(s)$ — единственный корень уравнения $\psi(\alpha) = s$ $(s > 0)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha < \omega$.

Как и в предыдущем примере, с учетом (40) находим

$$Me^{i\alpha\bar{\xi}^{+}(\varepsilon_s)} = \frac{\eta^{-}(s)}{\eta^{-}(s) - i\alpha}, \qquad Me^{i\alpha\bar{\xi}^{-}(\varepsilon_s)} = \frac{s}{s-\psi\alpha}\,\frac{\eta^{-}(s) - i\alpha}{\eta^{-}(s)} \tag{66}$$

и аналогично (63) при $M\xi(1) > 0$ можно найти х. ф. для абсолютного минимума $\bar{\xi}^{-}$.

3. Пусть в случае A_2 $a < 0$ и $\psi_{-}(\alpha) \equiv 0$. Как и в примере 1, с помощью применения теории вычетов можно определить $\varkappa^{\pm}(s, \alpha)$ и показать справедливость соотношений (61) — (63).

4. Пусть в случае A_2 $a > 0$ и $\psi_{+}(\alpha) \equiv 0$. Тогда верны соот-

ношения (66), причем при $M\xi(1)>0$ из последнего следует, что

$$Me^{i\alpha\xi^{-}}=\frac{M\xi(1)\,i\alpha}{1-\psi(\alpha)}\,. \tag{67}$$

Случаи, рассмотренные в примерах 1 — 4, характеризуются знакопостоянностью скачков процесса $\xi(t)$. В большинстве работ процессы такого вида рассматривались только при $\sigma=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baxter G., Donsker M. D.— Trans Amer. Math. Soc., 85, 1957, 73—87.
2. Keilson Y.— Ann. Math. Statist., 34, 1963, 1001—1011.
3. Takacs Z.— Trans. Amer. Math. Soc., 119, 1965, 367—379.
4. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М., «Наука», 1964.
5. Золотарев В. М. Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 9, № 4, 1964.
6. Боровков А. А. О времени первого прохождения для одного класса процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 10. № 3, 1965.
7. Рогозин Б. А. О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 11, № 4, 1966.
8. Штатланд Э. С. О распределении максимума процесса с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 10, № 3, 1965.
9. Штатланд Э. С. Некоторые задачи, связанные с выходом процесса с независимыми приращениями на одностороннюю и двухстороннюю границы.— УМЖ, 18, № 1, 1966.
10. Штатланд Э. С. Распределение момента достижения максимума для процесса с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 11, № 4, 1966,
11. Гусак Д. В., Королюк В. С. О совместном распределении процесса со стационарными приращениями и его максимума.— Теория вероятн. и ее применение 14, № 1, 1969.
12. Гусак Д. В., Королюк В. С. О моменте первого прохождения заданного уровня для одного класса процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 13, 1968.
13. Гусак Д. В. О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 14. № 1, 1968.
14. Гусак Д. В. Про розподіл моменту досягнення максимуму однорідним процесом з незалежними приростами.— ДАН УРСР, сер. А., 5, 1968.

D. V. Gusak, V. S. Korolyuk

THE DISTRIBUTION OF THE FUNCTIONALS OF HOMOGENEOUS PROCESSES WITH INDEPENDENT INCREMENTS

Summary

The distributions of some functionals for the homogeneous process with independent increments are investigated.

Поступила в редакцию 1.XI 1968.