М. И. ЯДРЕНКО, доц.
Киевский университет

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

В этой заметке рассматривается задача экстраполяции изотропного (но не обязательно однородного) случайного поля по результатам наблюдения на сфере.

1. Спектральное представление изотропного случайного поля. Пусть $R^n = \{x : x = (x_1, \ldots, x_n)\}$ n-мерное эвклидово пространство, G — группа вращений в R^n вокруг начала координат. Случайное поле $\xi(x)$ называется изотропным, если $M\xi(x)$ зависит только от расстояния от точки x до начала координат 0 (будем считать, что $M\xi(x) = 0$), а $M\xi(gx)\overline{\xi(gy)} = M\xi(x)\overline{\xi(y)}$ при каждом $g \in G$ (gx точка, в которую переходит x под действием g). Предполагается, что $M|\xi(x)|^2 < +\infty$, и поле $\xi(x)$ непрерывно в среднем квадратичном.

Пусть $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$ — сферические координаты точки x, $S_m^l(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$ — ортонормированные сферические гармоники степени m [1], $h(m, n) = (2m+n-2)\frac{(m+n-3)!}{(n-2)!\,m!}$ — число линейно независимых сферических гармоник степени m, ω_n — поверхность единичной сферы S_n в R^n.

При фиксированном r $\xi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$ есть изотропное случайное поле на сфере S_n. Поэтому из результатов [2] следует, что

$$\xi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \xi_m^l(r)\, S_m^l(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi), \tag{1}$$

где $\xi_m^l(r)$ — последовательность случайных процессов на $[0, \infty)$ такая, что

$$M\xi_m^l(r)\overline{\xi_{m'}^{l'}} = \delta_m^{m'}\delta_l^{l'} b_m(r, r), \tag{2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\, b_m(r, r) < +\infty. \tag{3}$$

Из (1) следует

$$\xi_m^l(r) = \int\limits_{S_n} \xi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)\, S_m^l(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)\, dm_n, \tag{4}$$

где $m_n(\cdot)$ — лебегова мера на S_n.

Используя (4), можно показать, что

$$M\xi_m^l(r)\,\overline{\xi_{m'}^{l'}(r)} = \delta_m^l \delta_{m'}^{l'} b_m(r, s), \tag{5}$$

$$\xi_m^l(0) = \text{l.i.m.}\, \xi_m^l(r) = 0 \quad (m^2 + l^2 \neq 0). \tag{6}$$

Из (1), используя теорему сложения для сферических гармоник ([1], стр. 235) и равенство (5), получим, что корреляционная функция случайного поля $\xi(x)$ имеет вид

$$M\xi(x)\,\overline{\xi(y)} = B(r, s, \cos\theta) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)}\, r, \tag{7}$$

$b_m(r, s)$

где θ — угловое расстояние между точками $x = (r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$ и $y = (s, \theta_1', \ldots, \theta_{n-2}', \varphi')$, $C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)$ — многочлены Гегенбауэра.

В частности, при $n = 3$ формула (7) принимает вид

$$B(r, s, \cos\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1)\, b_m(r, s)\, P_m(\cos\theta), \tag{8}$$

где $P_m(\cos\theta)$ — многочлены Лежандра степени m.

При $n = 2$ изотропное случайное поле имеет вид

$$\xi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(r)\, e^{im\varphi}, \tag{9}$$

где $\xi_m(r)$ — последовательность случайных процессов на $[0, \infty)$ таких, что

$$M\xi_m(r)\,\overline{\xi_k(s)} = \delta_m^k b_m(r, s), \tag{10}$$

а $b_m(r, s)$ — последовательность положительно определенных ядер (заметим, что $b_{-m}(r, s) = b_m(r, s)$). Корреляционная функция случайного поля $\xi(r, \varphi)$ равна

$$B(r, s, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(r, s)\, e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{11}$$

Какие же добавочные условия надо наложить на последовательность $b_m(r, s)$ для того, чтобы соответствующее случайное поле было не только изотропным, но и однородным? Ответ на этот вопрос можно получить, используя спектральное представление корреляционной функции однородного и изотропного поля [4, 5] и теорему сложения для бесселевых функций.

Теорема 1. Изотропное случайное поле $\xi(x)$ будет однородным в том и только том случае, когда $b_m(r, s)$ допускает представление

$$b_m(r, s) = c_n^2 \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{J_{m+\frac{n-2}{2}}(\lambda s)}{(\lambda s)^{\frac{n-2}{2}}} d\Phi(\lambda), \tag{12}$$

где $\Phi(\lambda)$ — неубывающая функция ограниченной вариации,

$$c_n^2 = 2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{\frac{n}{2}},$$

$$\int_0^\infty d\Phi(\lambda) = D\xi(0).$$

Приведем некоторые примеры изотропных случайных полей.

Пример 1. Пусть $n > 2$ и $b_m(r,s) = \frac{\gamma^m(r, s)}{h(m, n)}$, где $\gamma(r, s)$ — некоторое положительно определенное ядро (заметим, что $\gamma^m(r, s)$ также будет положительно определенным ядром при любом m). Тогда, используя (7) и производящую функцию для $C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)$ ([1], стр. 228), получаем, что

$$B(r, s, \cos\theta) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{[1 - 2\gamma(t; s)\cos\theta + \gamma^2(t, s)]^{\frac{n-2}{2}}} \tag{13}$$

корреляционная функция некоторого изотропного случайного поля.

Пример 2. При $n = 2$ и $b_m(r, s) = \gamma^m(r, s)$, где $\gamma(r, s)$ — положительно определенное ядро, получим из (11)

$$B(r, s, \varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1 - \gamma^2(t, s)}{1 - 2\gamma(t, s)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \gamma^2(t, s)}. \tag{14}$$

Пример 3. Если $b_m(r, s) = a^m\gamma(r, s)$, где $\gamma(r, s)$ — некоторое положительно определенное ядро и $|a| < 1$, то

$$B(r, s, \cos\theta) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\gamma(r, s)}{[1 - 2a\cos\theta + a^2]^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{15}$$

Пример 4. Пусть $W_m^l(t)$ последовательность независимых винеровских процессов на $[0, 1]$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции, определенные на $[0, \infty)$, такие, что $\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$ — монотонно возрастающая функция и

$$0 \leqslant \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} < 1, \qquad \psi(0) = 0,$$

Положим

$$\xi_m^l(r) = a_m \varphi(r) W_m^l\left(\frac{\psi(r)}{\varphi(r)}\right), \tag{16}$$

где a_m — последовательность, для которой

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 h(m, n) < +\infty,$$

и рассмотрим случайное поле

$$\xi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \xi_m^l(r) S_m^l(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi). \tag{17}$$

Корреляционная функция $\xi_m^l(r)$ равна $b_m(r, s) = a_m^2 K(r, s)$, где

$$K(r, s) = \begin{cases} \varphi(s)\psi(t), & t < s \\ \varphi(t)\psi(s), & t > s \end{cases}, \tag{18}$$

а корреляционная функция $\xi(x)$ равна

$$B(r, s, \cos\theta) = \frac{1}{\omega_n} K(r, s) \sum_{m=0}^{\infty} a_m^2 h(m, n) \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} \tag{19}$$

Пример 5. Пусть $W(x)$, $x \in R^n$ — гауссовское случайное поле такое, что $MW(x) = 0$,

$$MW(x) W(y) = \frac{1}{2}(|x| + |y| - |x - y|), \tag{20}$$

где $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

Случайное поле $W(x)$ было введено и изучалось в ряде работ П. Леви (см., например, [8, 9]) и называется многопараметрическим брауновским движением Леви. Очевидно, случайное поле $W(x)$ является изотропным. Представление (1) для этого поля имеет вид

$$W(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} W_m^l(r) S_m^l\left(\frac{x}{r}\right). \tag{21}$$

Здесь

$$MW_m^l(r) W_m^l(s) = d_n^2 \int_0^r C_n\left(\frac{t}{r}\right) C_n\left(\frac{t}{s}\right) dt,$$

где

$$C_m\left(\frac{t}{a}\right)=\int\limits_0^{\arccos\frac{t}{a}} \sin^{n-2}\theta\,\frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)}\,d\theta.$$

Разложение (21) было указано Мак-Кином [9] и использовано для изучения марковских свойств поля Леви.

Пример 6. Пусть $b_m(r, s)=\gamma^m(r, s)$, где $\gamma(r, s)$ — положительно определенное ядро. Используя равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\,\frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)}\,t^m=\frac{1-t^2}{(1-2t\cos\theta+t^2)^{\frac{n}{2}}}, \tag{22}$$

получаем, что

$$B(r, s, \cos\theta)=\frac{1}{\omega_n}\,\frac{1-\gamma^2(r, s)}{[1-2\gamma(r, s)\cos\theta+\gamma^2(r, s)]^{\frac{n}{2}}} \tag{23}$$

корреляционная функция некоторого изотропного случайного поля.

Пример 7. Если $b_m(r, s)=a^m\gamma(r, s)$, то

$$B(r, s, \cos\theta)=\frac{1}{\omega_n}\,\gamma(r, s)\,\frac{1-a^2}{[1-2a\cos\theta+a^2]^{\frac{n}{2}}}. \tag{24}$$

Пример 8. (Гармоническое изотропное случайное поле внутри единичного шара). Пусть $\xi(x)$ — решение уравнения

$$\Delta\xi(x)=0. \tag{25}$$

Здесь $\xi(x)|_{|x|=1}=\eta(x)$, где $\eta(x)$ — изотропное случайное поле на сфере S_n. Тогда $\xi(x)$ будет изотропным случайным полем. Используя спектральное представление изотропного случайного поля на сфере [2] и формулу Пуассона ([10], 266), получаем

$$\xi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} \varrho^m S_m^l(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)\,\xi_m^l, \tag{26}$$

где $|\varrho|<1$, $M\xi_m^l\xi_{m'}^{l'}=\delta_m^{m'}\delta_l^{l'}\lambda_m$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\,\lambda_m<+\infty,$$

Корреляционная функция случайного поля $\xi(x)$ равна

$$B(r, s, \cos\theta)=\frac{1}{\omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}\varrho^m S^m\lambda_m h(m, n)\,\frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} \tag{27}$$

Рассмотрим также гармоническое в единичном шаре случайное поле, граничным значением которого является «белый шум» на сфере S_n. Пусть $W_n(A)$ — гауссовская случайная мера на S_n такая, что

$$MW_n(A) = 0, \qquad MW_n(A)\,W_n(B) = m_n(A \cap B). \tag{28}$$

Тогда соответствующее случайное поле имеет вид

$$\xi(x) = \frac{1-\varrho^2}{\omega_n} \int\limits_{S_n} \frac{dW_n(\gamma)}{(1+\varrho^2-2\varrho\cos\theta)^{\frac{n}{2}}},$$

где $\varrho = |x|$, θ— угол между радиусами-векторами точки x и переменной точки интегрирования на сфере.

Это изотропное гауссовское случайное поле внутри единичного шара, которое можно записать также в виде (26), где

$$\xi_m^l = \int\limits_{S_n} S_m^l(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)\,dW_n.$$

2. Экстраполяция изотропного случайного поля по значениям на сфере. Пусть H_ξ — замкнутое в смысле среднеквадратической сходимости линейное многообразие, порожденное случайными величинами $\xi(x)$, $x \in R^n$.

Как известно, H_ξ превращается в полное гильбертово пространство, если ввести скалярное произведение $(\eta_1, \eta_2) = M\eta_1\overline{\eta_2}$ и не различать случайные величины, совпадающие с вероятностью единица.

Предположим, что случайное поле $\xi(x)$ наблюдается на сфере $S_n(r) = \{x : |x| = r\}$. Обозначим через $H_\xi(r)$ замкнутое линейное многообразие, порожденное случайными величинами $\xi(x)$, $x \in S_n(r)$. Задача линейной экстраполяции $\xi(y)$, $y \in S_n(r)$ сводится к отысканию проекции $\eta(y)$ случайной величины $\xi(y)$ на подпространство $H_\xi(r)$. Как известно, $\eta(y)$ находится из условия

$$M[\xi(y) - \eta(y)]\overline{\xi(x)} = 0 \tag{29}$$

для всех $x \in S_n(r)$.

Из формулы (1) следует, что каждый элемент $\eta \in H_\xi(r)$ имеет вид

$$\eta = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \xi_m^l(r)\,c_m^l, \tag{30}$$

где c_m^l — числовая последовательность такая, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m(r,r) \sum_{l=1}^{h(m,n)} [c_m^l]^2 < +\infty. \tag{31}$$

Если экстраполяционную формулу для $\xi(y)$ искать в виде

$$\eta(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l(y)\,\xi_m^l(r), \tag{32}$$

то из условия ортогональности (29) получаем

$$b_m(\varrho, r) S_m^l(\theta_1', \ldots, \theta_{n-2}', \varphi') = C_m^l(y) b_m(r, r).$$

Если $b_m(r, r) = 0$, то с вероятностью единица $\xi_m^l(r) = 0$ и $c_m^l(y)$ можно выбрать произвольно, например, $c_m^l(y) = 0$; если же $b_m(r, r) \neq 0$, то

$$c_m^l(y) = \frac{b_m(r, \varrho)}{b_m(r, r)} S_m^l(\theta_1', \ldots, \theta_{n-2}', \varphi'). \tag{33}$$

Теорема 2. Линейная экстраполяционная формула для $\xi(y)$ по наблюдениям $\xi(x)$ на сфере $S_n(r)$ имеет вид (32), где $c_m^l(y)$ определяется по формуле (33), если $b_m(r, r) \neq 0$ и $c_m^l(y) = 0$, если $b_m(r, r) = 0$. Среднеквадратическая погрешность экстраполирования равна

$$\sigma^2(y, r) = M|\xi(y)|^2 - M|\eta|^2 = \\ = \frac{1}{\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} \left[b_m(\varrho, \varrho) - \frac{b_m^2(\varrho, r)}{b_m(r, r)} \right] h(m, n). \tag{34}$$

Экстраполяционная формула (32) выражается через последовательность случайных процессов $\xi_m^l(r)$. Для практических целей более удобно выразить ее через значения самого поля на сфере $S_n(r)$. Используя (4) и формулу сложения для сферических гармоник, получаем при $n > 2$

$$\eta(y) = \int_{S_n} \xi(x) c(y, x)\, dm_n, \tag{35}$$

где

$$c(y, x) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m(\varrho, r)}{b_m(r, r)} h(m, n) \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)}. \tag{36}$$

При $n = 2$

$$\eta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(r, \varphi) c(\varrho, \psi, r, \varphi)\, d\varphi, \tag{37}$$

где

$$c(\varrho, \psi, r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\psi-\varphi)} \frac{b_m(\varrho, r)}{b_m(r, r)}.$$

В частности, если $\varrho = 0$ (экстраполирование производится в центре сферы), получим, принимая во внимание (6),

$$\eta(y)=\frac{b_0(0,r)}{b_0(r,r)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S_n}\xi(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\varphi)\,dm_n. \tag{38}$$

Замечание. Среднеквадратическая ошибка экстраполирования равна нулю тогда и только тогда, когда для всех m

$$b_m^2(\varrho,r)=b_m(\varrho,\varrho)\,b_m(r,r). \tag{39}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 9. Если $B(r,s,\cos\theta)=K(r,s)\,d(\cos\theta)$, то экстраполяционная формула для $\xi(\varrho,\theta_1',\ldots,\theta_{n-2}',\varphi')$ имеет ид

$$\eta(y)=\frac{K(\varrho,r)}{K(r,r)}\,\xi(r,\theta_1',\ldots,\theta_{n-2}',\varphi'), \tag{40}$$

т. е. выражается через значение в ближайшей к y точке на сфере $S_n(r)$. Ошибка экстраполирования равна

$$\sigma^2(y,r)=K(\varrho,\varrho)-\frac{K^2(\varrho,r)}{K(r,r)}.$$

В частности, такой вид будет иметь экстраполяционная формула для полей с корреляционными функциями (15), (19), (24).

Пример 10. Если корреляционная функция поля имеет вид (13), то экстраполяционная формула записывается в виде (35), где

$$c(y,x)=\frac{1-\dfrac{\gamma^2(\varrho,r)}{\gamma^2(r;r)}}{\left[1-2\dfrac{\gamma(\varrho,r)}{\gamma(r,r)}\cos\theta+\dfrac{\gamma^2(\varrho,r)}{\gamma^2(r,r)}\right]^{\frac{n}{2}}}. \tag{41}$$

Точно так же определяется функция $c(y,x)$ для любого случайного поля с корреляционной функцией вида

$$B(r,s,\cos\theta)=\frac{1}{\omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}h(m,n)\,\gamma^m(r,s)\,\lambda_m\frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)}, \tag{42}$$

где λ_m — некоторая последовательность, а $\gamma(r,s)$ положительно определенное ядро.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. «Наука», М., 1966.

2. Ядренко М. Й. Ізотропні випадкові поля марковського типу на сфері. — ДАН УРСР, 1959, 3.

3. Ядренко М. Й. Про ізотропні випадкові поля марковського типу в евклідовому просторі.— ДАН УРСР, 1963, 3.

4. Ядренко М. Й. Спектральні розклади ізотропних випадкових полів.— ДАН УРСР, 1968 сер. А, 9.

5. Yaglom A. M. Second-order homogeneous random fields.— Proc. of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical statistics and Probability, II, 1962.

6. Попов Ю. Д. Ядренко М. И. Некоторые вопросы спектральной теории однородных и изотропных случайных полей.— Теория вероятностей и ее применения. 1969, 14, 1.

7. Levy P. Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris, 1948.

8. Levy P. A special problem of Brownian motion and a general theory of Gaussian random fonctions.— Proc. 3rd Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probability, 1955.

9. Mc Kean H. P. Brownian motion with a several-dimensional time.— Теория вероятностей и ее применения, 8, в. 4 (1963).

10. Курант Р. Уравнения с частными производными. «Мир», М., 1964.

M. I. Yadrenko

ON A CERTAIN PROBLEM OF THE LINEAR EXTRAPOLATION FOR THE ISOTROPIC RANDOM FIELD

Summary

The spectral expansion of the isotropic (but not certainly homogeneous) random field is named. The problem of the linear extrapolation of such a field by the results of an observation on a sphere is considered.

Поступила в редакцию 10.XII 1968.