А. В. СКОРОХОД, чл.-корр. АН УССР
Институт математики АН УССР

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ С ДИСКРЕТНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

Пусть Z — некоторое топологическое пространство, а Y — произвольное пространство с дискретной топологией. Обозначим через $\mathfrak{B}_z$ σ-алгебру борелевских множеств пространства Z, а $\mathfrak{B}_Y$ — некоторую σ-алгебру множеств из Y, содержащую все одноточечные множества. Пусть $X = Z \times Y$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_Z \times \mathfrak{B}_Y$. Будем также рассматривать X как топологическое пространство, являющееся произведением топологических пространств Z и Y (топология в Y дискретна). Пусть $x_t = (z_t;\ y\sigma)$ — однородный строго марковский процесс в измеримом пространстве $(X,\ \mathfrak{B})$, имеющий непрерывные справа траектории. Тогда обязательно

$$P_x\{\inf[t : y_t \neq y] > 0\} = 1, \quad x = (z; y),$$

т. е. компонента y_t меняется скачкообразно. Такие процессы будем называть процессами с дискретной компонентой.

Введем вероятности

$$Q_y(t, z, A) = P_x\{y_s = y, 0 \leqslant s \leqslant t, z_t \in A\},$$

где $x = (z; y)$, $A \in \mathfrak{B}_Z$.

Легко видеть, что $Q_y(t, z, A)$ совпадает с вероятностью перехода процесса x_t, если считать, что он исчезает в момент $\zeta = \inf[t : y_t \neq y_0]$. Обозначая через $P_x^{(\zeta)}$ — вероятности для процесса x_t с исчезновением в момент ζ, будем иметь

$$Q_y(t, z, A) = P_x^{(\zeta)}(x_t \in A \times \{y\}),$$

где $\{y\}$ — одноточечное множество, $x = (z,\ y)$.

Введем функции

$$V_\lambda(x, B) = M_x e^{-\lambda\zeta} \varkappa_B(x_\zeta).$$

Функции $V_\lambda(x, B)$ и $Q_y(t; z, A)$ полностью определяют поведение процесса x_t до момента первого накопления бесконечного числа скачков дискретной компонентой y_t. Действительно, пусть

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_1 = \zeta_1, \ldots, \quad \eta_n = \zeta_1 + \ldots + \zeta_n, \ldots$$

моменты скачков y_t. Тогда для всякой ограниченной измеримой функции $f(x)$ выполняются соотношения

$$M_x \int\limits_0^{\sum\limits_1^\infty \zeta_k} e^{-\lambda t} f(x_t)\, dt = M_x \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} e^{-\lambda t} f(x_t)\, dt =$$

$$= M_x \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda \eta_{k-1}} \int\limits_0^{\zeta_{k-1}} e^{-\lambda t} f(x_{t+\zeta_{k-1}})\, dt =$$

$$= M_x \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda \eta_{k-1}} R_\lambda^{(y_{\eta_{k-1}})} f(z_{\eta_{k-1}}, y_{\eta_{k-1}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int V_\lambda^{(k)}(x, dx')\, R_\lambda^{(y')} f(z', y') + R_\lambda^{(y)} f(z, y),$$

где $x' = (z'; y')$, $R_\lambda^{(y)}$ — резольвента вероятности перехода $Q_y(t, z, A)$, а $V_\lambda^{(n)}(x, B)$ — n-кратная свертка ядра $V_\lambda(x, B)$,

$$V_\lambda^{(n)}(x, B) = \int V_\lambda(x, dx')\, V_\lambda^{(n-1)}(x', B).$$

Заметим, что функция $V_\lambda(x, B)$ определенным образом связана с $Q_y(t, z, A)$. Из соотношений

$$M_x e^{-\lambda\zeta} \chi_B(x_\zeta) \geqslant M_x e^{-\lambda\zeta} \chi_B(x_\zeta)\, \chi_{\{\zeta > t\}} =$$

$$= M_x \chi_{\{\zeta > t\}} M(e^{-\lambda\zeta} \chi_B(x_\zeta) / \mathfrak{F}_t^x) =$$

$$= M_x \chi_{\{\zeta > t\}} e^{-\lambda t} M_{x_t} e^{-\lambda x} \chi_B(x_\zeta) = M_x \chi_{\{\zeta > t\}} e^{-\lambda t} V_\lambda(x_t, B),$$

где $\mathfrak{F}_t^x$ — σ-алгебра, порожденная величинами x_s, $s \leqslant t$; χ_A — индикатор множества (или события) A, вытекает неравенство

$$V_\lambda(z, y, B) \geqslant e^{-\lambda t} \int Q_y(t, z', dz')\, V_\lambda(z', y, B).$$

Кроме того,

$$V_\lambda(z, y, B) - e^{-\lambda t}\int Q_y(t, z, dz')V_\lambda(z', y, B) \leqslant P_x\{\zeta < t\} \to 0$$

при $t \to 0$. Значит, $V_\lambda(z, y, B)$ при фиксированных y и B является эксцессивной функцией относительно переходной вероятности $e^{-\lambda t}Q(t, z, A)$ ([1], стр. 493). При некоторых ограничениях эту функцию можно построить следующим образом.

Предположим, что для всякого y выполнено равенство

$$\lim_{t\to 0}\sup_z P_x\{\zeta \leqslant t\} = 0, \tag{1}$$

где $x = (z; y)$.

Тогда для всякого $B \in \mathfrak{B}$ эксцессивная функция $V_0(z, y, B) = P_x\{x_\zeta \in B\}$ процесса z_t на $[0, \zeta)$ будет удовлетворять неравенству

$$\sup_z\left|V_0(z, y, B) - \int Q_y(t, z, dz')V_0(z', y, B)\right| \leqslant \sup_z P_x\{\zeta \leqslant t\} \to 0$$

при $t \to 0$. Значит ([1], стр. 275), существует отрицательный непрерывный почти однородный аддитивный функционал $\varphi_t(B)$ такой, что $M_x\varphi_\zeta(B) = V_0(z, y, B)$, $x = (z; y)$. Функционал $\varphi_t(B)$ можно выразить через функцию $V_0(z, y, B)$ (см. формулы (6.41) и (6.42) в [1], стр. 273, 275) следующим образом:

$$\varphi_t(B) = \underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\int_0^t \frac{1}{h}\left[V_0(z_u, y, B) - \int Q_y(h, z_u, dz')V_0(z', y, B)\right]du.$$

Заметим теперь, что

$$V_0(z, y, B) - \int Q_y(h, z, dz')V_0(z', y, B) = P_x\{x_\zeta \in B\} - $$
$$- P_x\{\zeta > h, x_\zeta \in B\} = P_x\{\zeta \leqslant h, x_\zeta \in B\},$$

и, значит, при $u < \zeta$

$$\psi_h(u) = V_0(z_u, y, B) - \int Q_y(h, z_u, dz')V_0(z', y, B) =$$
$$= P\{u < \zeta < u + h, x_\zeta \in B/z_u\}.$$

В силу (1) существует такое δ_h, $\delta_h \to 0$ при $h \to 0$, что с вероятностью 1 выполнено неравенство $0 \leqslant \psi_h(u) \leqslant \delta_h$. Далее,

$$\frac{1}{h}\int_0^{nh}\psi_h(u)\,du = \frac{1}{h}\int_0^h\sum_{k=0}^{n-1}\psi_h(kh + u)\,du.$$

Имеют место следующие соотношения

$$M_x\left(\sum_{k=0}^{n-1}[\psi_h(kh+u)-\psi_h(kh)]\right)^2=M_x\left\{\sum_{k=0}^{n-1}[\psi_h(kh+u)-\psi_h(kh)]^2+\right.$$

$$\left.+2\sum_{k=0}^{n-1}[\psi_h(kh+u)-\psi_h(kh)]\sum_{l=k+1}^{n-1}[\psi_h(lh+u)-\psi_h(lh)]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\delta_h M_x\sum_{k=0}^{n-1}[\psi_h(kh+u)+\psi_h(kh)]+2M_x\sum_{k=0}^{n-1}[\psi_h(kh+u)-$$

$$-\psi_h(kh)]\,M\left(\sum_{l=k+1}^{n-1}[\psi_h(lh+u)-\psi_h(lh)]/x((k+1)h)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\delta_h[P_x\{u<\zeta\leqslant(n-1)h+u\}+P_x\{0<\zeta\leqslant(n-1)h\}]+$$

$$+2M_x\sum_{k=0}^{n-1}[\psi_h(kh+u)-\psi_h(kh)]\,[P\{(k+1)h+u<\zeta\leqslant$$

$$\leqslant(n-1)h+u/x((k+1)h)\}-P\{(k+1)h<\zeta\leqslant$$

$$\leqslant(n-1)h/x((k+1)h)\}]\leqslant 2\delta_h+2M_x\sum_{k=0}^{n-1}[\psi_h(kh+u)-\psi_h(kh)]\times$$

$$\times M(\psi_h((n-1)h)+\psi_h((l+1)h)/x((k+1)h))\leqslant 4\delta_h.$$

Поэтому

$$\varphi_t(B)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{n-1}\psi_{\frac{t}{n}}\left(\frac{k}{n}t\right)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{n-1}P\left\{\frac{k}{n}t<\zeta\leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant\frac{k+1}{n}t,\ x_\zeta\in B/z\left(\frac{k}{n}t\right)\right\}.$$

Пусть $B=Z\times(Y-\{y\})$. Функционал $\varphi_t(B)$ при этом значении множества B обозначим через φ_t. Легко видеть, что всегда $x_\zeta\in B$, если только ζ конечно. Значит,

$$\varphi_t=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{n-1}P\left\{\frac{k}{n}t<\zeta\leqslant\frac{k+1}{n}t/z\left(\frac{k}{n}t\right)\right\}=$$

$$=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{1-Q_y\left(\frac{t}{n},z\left(\frac{k}{n}t\right),Z\right)\right\}. \tag{2}$$

Так как $\varphi_t(B) \leqslant \varphi_t$, то функционал $\varphi_t(B)$ абсолютно непрерывен относительно функционала φ_t. Значит, в силу леммы 6 из [2] существует такая измеримая функция $g_y(z, B)$, что с вероятностью 1 для всех $t > 0$

$$\varphi_t(B) = \int_0^t g_y(z_s, B)\, d\varphi_s.$$

Как вытекает из формулы (2), функционал φ_t полностью определяется вероятностью перехода $Q_y(t, z, A)$. Заметим также, что $\varphi_t = -\log \alpha_t$, где α_t почти однородный мультипликативный функционал, определяемый соотношением

$$\alpha_t = P\{\zeta > t/\mathfrak{F}_t^z\};$$

$\mathfrak{F}_t^z$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами z_s, $s \leqslant t$.

Установим связь между функционалом $\varphi_t(B)$ и функцией $V_\lambda(z, y, B)$:

$$V_\lambda(z, y, B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda k}{n}} P_x\left\{\frac{k}{n} < \zeta \leqslant \frac{k+1}{n}, x_\zeta \in B\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\lambda k}{n}} - e^{-\frac{\lambda(k+1)}{n}}\right) M_x \sum_{j=0}^{k} P\left\{\frac{j}{n} < \zeta \leqslant \frac{j+1}{n}, x_\zeta \in B/x\left(\frac{j}{n}\right)\right\} =$$

$$= M_x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\lambda k}{n}} - e^{-\frac{\lambda(k+1)}{n}}\right) \varphi_{\frac{k+1}{n}}(B) = M_x \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \varphi_t(B)\, dt =$$

$$= M_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\varphi_t(B).$$

Значит,

$$V_\lambda(z, y, B) = M_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} g_y(z_t, B)\, d\varphi_t. \tag{3}$$

Итак, процесс с дискретной компонентой до момента первого накопления бесконечного числа скачков дискретной компонентой полностью определяется вероятностями перехода $Q_y(t, z, B)$ и функциями $g_y(z, B)$, которые можно интерпретировать как условную вероятность перехода из точки $x = (z; y)$ во множество B в момент скачка дискретной компоненты при условии, что этот скачок произошел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дынкин Е. Б., Марковские процессы. Физматгиз. М., 1963.
2. Скороход А. В. Однородные марковские процессы без разрывов второго рода.— Теор. вероят. и ее примен., 12, 1967.

A. V. Skorokhod

A REMARK ON HOMOGENEOUS MARKOV PROCESSES WITH DISCRETE COMPONENT

Summary

Let Z is a topological space and Y is arbitrary space with discrete topology. Markov processes with values in $X = Z \times Y$ are considered. Such processes are called processes with discrete component, if the component y_t of the process $x_t = (z_t, y_t)$, $z_t \in Z$, $y_t \in Y$, is a pure discontinuous process.

Such process can be defined by the set of transition probabilities $Q_y(t, z, A)$. The functions $Q_y(t, z, A)$ are transition probabilities of the z_t, the discrete component is fixed and $y_t = y$.

Поступила в редакцию 3.XII 1968.