Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, асп.
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО БЛУЖДАНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ, УПРАВЛЯЕМОГО МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ, В СХЕМЕ СЕРИЙ. I

Пусть $\eta_\alpha(t)$, $t \in [0, \infty)$ для каждого $\alpha \in [0, 1]$ «простейший» марковский процесс — однородный во времени, с двумя состояниями $e_1 = +1$, $e_2 = -1$ и переходными вероятностями $p_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, удовлетворяющими системе Колмогорова

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(\alpha) p_{kj}(t), \quad i, j = 1, 2,$$

где $|a_{ij}(\alpha)| > 0$, $i, j = 1, 2$.

Построим случайное блуждание частицы на прямой, управляемое процессом $\eta_\alpha(t)$, определяя ее положение в момент времени t

$$x_\alpha(t) = x_0 + \int_0^t \eta_\alpha(u)\, du,$$

где $\eta_0 = \eta_\alpha(0) = \mathrm{const} \in \{e_1, e_2\}$, $x_0 = x_\alpha(0) = \mathrm{const}$ — начальные условия блуждания. Обозначим

$$q_i(\alpha, x) = 1 - P\{x_\alpha(t) \neq b, t > 0 / x_0 = b + x, \eta_0 = e_i\},$$
$$x \geqslant 0, \quad i = 1, 2.$$

Для нахождения $q_i(\alpha, x)$ можно записать ряд соотношений

$$q_2(\alpha, 0) = 1, q_2(\alpha, x + y) = q_2(\alpha, x) q_2(\alpha, y), q_1(\alpha, x + y) =$$
$$= q_1(\alpha\ x) q_2(\alpha, y),$$

$$\frac{dq_2(\alpha, x)}{dx} = -a_{21}(\alpha) q_2(\alpha, x) + a_{21}(\alpha) q_1(\alpha, x),$$

$$-\frac{dq_1(\alpha, x)}{dx} = a_{12}(\alpha)(q_2(\alpha, x) - q_1(\alpha, x)),$$

откуда находим

$$q_2(\alpha, x) = q_1(\alpha, x) = 1, \quad \text{если} \quad a_{21}(\alpha) \leqslant a_{12}(\alpha),$$

$$q_2(\alpha, x) = e^{-(a_{21}(\alpha) - a_{12}(\alpha))x}, \qquad q_1(\alpha, x) = \frac{a_{12}(\alpha)}{a_{21}(\alpha)} e^{-(a_{21}(\alpha) - a_{12}(\alpha))x}, \quad \text{если}$$

$$a_{21}(\alpha) \geqslant a_{12}(\alpha).$$

Поэтому рассматриваемое блуждание возвратно (для произвольных x_0 и η_0 $P\{x_\alpha(t) \neq x_0, t > 0\} = 0$) тогда и только тогда, когда $a_{12}(\alpha) = a_{21}(\alpha)$.

Будем предполагать выполненным условие

(A_1): 1. $a_{21}(\alpha) > \alpha_{21}(1) = a = a_{12}(1) > a_{12}(\alpha)$ для $\alpha \in [0, 1)$,

2. $\lim\limits_{\alpha \to 1} a_{ij}(\alpha) = a_{ij}(1)$, $i, j = 1, 2$.

Введем в рассмотрение случайный функционал

$$\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b, t)) = \int\limits_0^{\pi(b,t)} f_\alpha(x_\alpha(u))\, du,$$

где

$$\pi(b, t) = \inf\left(s : \int\limits_0^s \mathrm{X}_{[b,\infty)}(x_\alpha(u))\, du \geqslant t\right)^{*)},$$

$f_\alpha(x)$ — функция, удовлетворяющая условию

(A_2): 1. $f_\alpha(x) = 0$ для $|x| > z = \mathrm{const} \in (-\infty, \infty)$, $\alpha \in [0, 1]$,

2. $f_\alpha(x)$ — непрерывна для $|x| \leqslant z$, $\sup\limits_{\alpha \in [0,1]} |f_\alpha(x)| < \infty$,

3. $\lim\limits_{\alpha \to 1} f_\alpha(x) = f_1(x)$, $|x| \leqslant z$.

В работе изучаются возможные предельные распределения для нормированной случайной величины $\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b, t))$ при $\alpha \to 1$ и $t \to \infty$.

Зафиксируем точку $c \leqslant b, z, x_0$. От блуждания $x_\alpha(t)$, $t \geqslant 0$ при помощи случайной замены времени можно перейти к блужданию $x_\alpha^c(t) = x_\alpha(\pi(c, t))$. Очевидно, распределение случайной величины $\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b, t))$ для всех $b \geqslant c$ совпадает с распределением величины

$$\xi_c(\eta_0, x_0, \alpha, \pi_c(b, t)) = \int\limits_0^{\pi_c(b,t)} f_\alpha(x_\alpha^c(u))\, du,$$

---

*) $\mathrm{X}_M(x)$ — индикатор множества M.

где

$$\pi_c(b,t)=\inf\left(s:\int_0^s \mathrm{X}_{[b,\infty)}(x_\alpha^c(u))\,du\geqslant t\right)$$

(в частности $\pi_c(c,t)=t$), а блуждание $x_\alpha^c(t)$, $t\geqslant 0$ «происходит» на полупрямой $[c,\infty)$. В дополнение к условиям (A_i), $i=1,2$ будем предполагать выполненным условие

$$(A_3)\text{: если } c_1=2\int_{-z}^{z}f_1(x)\,dx=0, \text{ то } c_2=\int_{-z}^{z}8a\min(z-x,z-y)\times$$

$$\times f_1(x)f_1(y)\,dxdy\neq 0.$$

Замечание. 1. Можно показать, что при невыполнении условия (A_3) $\int_{t'}^{t''}f_1(x_1(u))\,du=0$ с вероятностью 1 для любых t', t'' таких, что $x_1(t')=x_1(t'')\geqslant z$. 2. Константа c_2 не зависит от выбора z, если $c_1=0$.

Введем обозначения: $N(d_1,d_2)$ — нормально распределенная случайная величина с функцией распределения

$$\Phi(d_1,d_2,u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi d_2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{u}e^{\frac{-(v-d_1)^2}{2d_2}}\,dv, & \text{если}\quad d_2>0,\\ \mathrm{X}_{(d_1,\infty)}(u), & \text{если}\quad d_2=0,\end{cases}$$

$\xi(q)$, $q\in[0,1]$ — случайная величина с функцией распределения

$$\Psi(q,u)=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{для } u\leqslant 0\\ 1-\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{uq}{\sqrt{a}}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{u(1-q)}{2}-\frac{(1-q)^2u^2}{8v^2}-\frac{v^2}{2}\right\}dv & \text{для } u>0.\end{cases}$$

Замечание. Случайная величина $\xi(0)$ распределена показательно с $M\xi(0)=1$, а $\xi(1)=|N(0,a)|$,

$$r(\alpha)=1-\frac{a_{12}(\alpha)}{a_{21}(\alpha)},\qquad w(\alpha,t)=\frac{\sqrt{t}}{1+r(\alpha)\sqrt{t}},$$

$$v(\alpha)=2\int_{-z}^{z}f_\alpha(x)\,dx.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (A_i), $i = 1 - 3$ и существует

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty} \frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} = q = \mathrm{const} \in [0, 1],$$

тогда

1) если $c_1 \neq 0$, то

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b, t)}{c_1 w(\alpha, t)} < u\right\} = \Psi(q, u);$$

2) если $c_1 = 0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1 t\to\infty} v(\alpha)\sqrt{w(\alpha, t)} = 0$, то

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b, t)}{\sqrt{c_2 w(\alpha, t)}} < u\right\} = \int_0^\infty \Phi\left(0, 1, \frac{u}{\sqrt{v}}\right) d\Psi(q, v);$$

3) если $c_1 = 0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1, t\to\infty} \frac{1}{|v(\alpha)|\sqrt{w(\alpha, t)}} = \frac{c_3}{\sqrt{c_2}} < \infty$, то

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b, t))}{v(\alpha) w(\alpha, t)} < u\right\} = \int_0^\infty \Phi\left(0, c_3^2, \frac{u - v}{\sqrt{v}}\right) d\Psi(q, v).$$

Замечание. Случайная величина $d_3\xi(q) + N(d_1, d_2)\sqrt{\xi(q)}$, где $N(d_1, d_2)$ и $\xi(q)$ независимы, имеет функцию распределения $\int_0^\infty \Phi\left(d_1, d_2, \frac{u - d_3 v}{\sqrt{v}}\right) d\psi(q, v)$. Можно показать, что для $\alpha \in [0, 1)$ существует конечный с вероятностью 1 $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b, t))$, а

$$\lim_{\alpha\to 1} (\text{сл})\, \xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b, t)) = \xi(\eta_0, x_0, 1, \pi(b, t))^{*)}.$$

Следующая теорема отвечает на вопрос о возможных предельных распределениях нормированных величин $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b, t))$ и $\xi(\eta_0, x_0, 1, \pi(b, t))$ соответственно при $\alpha \to 1$ и $t \to \infty$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (A_i), $i = 1 - 3$, тогда

1) если $c_1 \neq 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{\alpha\to 1} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b, t))}{c_1 w(\alpha, t)} < u\right\} = \Psi(1, u);$$

---

*) Символ $\lim\limits_{t\to t'} (\text{сл})\, \xi_t = \xi_{t'}$ означает слабую сходимость функций распределения случайных величин ξ_t и $\xi_{t'}$ при $t \to t'$.

2) если $c_1 = 0$, то

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\alpha\to 1} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b,t))}{\sqrt{c_2 w(\alpha,t)}} < u\right\} = \int_0^\infty \Phi\left(0, 1, \frac{u}{\sqrt{v}}\right) d\Psi(1, v);$$

3) если $c_1 \neq 0$, то

$$\lim_{\alpha\to 1}\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b,t))}{c_1 w(\alpha,t)} < u\right\} = \Psi(0, u);$$

4) если $c_1 = 0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1}\frac{v(\alpha)}{\sqrt{r(\alpha)}} = 0$, то

$$\lim_{\alpha\to 1}\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b,t))}{\sqrt{c_2 w(\alpha,t)}} < u\right\} = \int_0^\infty \Phi\left(0, 1, \frac{u}{\sqrt{v}}\right) d\Psi(0, v);$$

5) если $c_1 = 0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1}\frac{\sqrt{r(\alpha)}}{|v(\alpha)|} = \frac{c_3}{\sqrt{c_2}} < \infty$, то

$$\lim_{\alpha\to 1}\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(b,t))}{v(\alpha)\, w(\alpha,t)} < u\right\} = \int_0^\infty \Phi\left(0, c_3^2, \frac{u-v}{\sqrt{v}}\right) d\Psi(0, v).$$

Доказательство. Пусть вначале $b \geqslant z$. Так как случайная величина $\int\limits_0^{\mu_0(\alpha,b)} f_\alpha(x_\alpha(u))\,du$, где $\mu_0(\alpha, b) = \inf(t : x_\alpha(t) = b, \eta_\alpha(t) = e_1$ равномерно по α и t ограничена по вероятности, то возможные предельные распределения не зависят от начальных условий блуждания и можно считать, что $(\eta_0, x_0) = (e_1, b)$. Для $\xi(e_1, b, \alpha, \pi(b,t))$ имеет место представление

$$\xi(e_1, b, \alpha, \pi(b,t)) = \sum_{k=0}^{\nu(\alpha,t,b)} \lambda_k(\alpha, b).$$

Здесь

$$\nu(\alpha, t, b) = \max(n : \mu_{2n}(\alpha, b) < \pi(b,t)),$$

$$\lambda_0(\alpha, b) = 0,\quad \lambda_n(\alpha, b) = \int\limits_{\mu_{2n-2}(\alpha,b)}^{\mu_{2n}(\alpha,b)} f_\alpha(x_\alpha(u))\,du,\quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\mu_n(\alpha, b) = \inf(t : t > \mu_{n-1}(\alpha, b),\ x_\alpha(t) = b),\quad n = 1, 2, \dots .$$

Так как случайные величины $\lambda_n(\alpha, b)$, $n = 1, 2, \dots$ независимы и одинаково распределены, величины $\lambda_n(\alpha, b)$ и $\nu(\alpha, t, b)$ независимы для всех $n=0, 1, 2, \ldots$ и $t \in [0, \infty)$ при $b \geqslant z$, то

$$M \exp\{is\xi(e_1, b, \alpha, \pi(b, t))\} = \int_0^\infty (M \exp\{is\lambda_1(\alpha, b)\})^{[u]} dP\{\nu(\alpha, t, b) < u\}^{*)}.$$

Лемма 1.

$$M \exp\{is\lambda_1(\alpha, b)\} = 1 + isv(\alpha) - \frac{s^2}{2} c_2 + o_{1\alpha}(\sqrt{r(\alpha)})\, s + \\ + o_{2\alpha}(s^2) - 2s^2 c_1^2, \tag{1}$$

где $\lim\limits_{\alpha \to 0,\ s \to 0} o_{j\alpha}(s) s^{-1} = \lim\limits_{s \to 0} \lim\limits_{\alpha \to 1} o_{j\alpha}(s) s^{-1} = 0$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Обозначим через

$$\nu_\alpha(x) = \int_{\mu_1(\alpha, b)}^{\mu_2(\alpha, b)} d\delta_{b - x_\alpha(u)}^{x\ **)}$$

при условии, что $\mu_2(\alpha, b) < \infty$ — число попаданий частицы в точку $b - x$ в промежутке времени $[\mu_1(\alpha, b), \mu_2(\alpha, b)]$ (при $\mu_2(\alpha, b) < \infty$). Для

$$g_\alpha(x, s) = \sum_{k=0}^\infty P\{\nu_\alpha(x) = k\}\, s^k$$

имеют место почти очевидные соотношения

$$g_\alpha(x + y, s) = g_\alpha(x, g_\alpha(y, s)),$$

$$g_\alpha(x, s) = a_{21}(\alpha) x + s^2 (1 - a_{21}(\alpha) x)(1 - a_{12}(\alpha) x) + \\ + s^4 (1 - a_{21}(\alpha) x)\, a_{12}(\alpha) x + o_\alpha(x, s).$$

где $o_\alpha(x, s) x^{-1} \to 0$ при $x \to 0$ равномерно по $\alpha, s \in [0, 1]$.

Используя эти соотношения, нетрудно показать, что $\nu_\alpha(x)$ как процесс по $x \geqslant 0$ интегрируем в среднем квадратичном, и получить ряд уравнений для моментных функций $\nu_\alpha(x), x \geqslant 0$

$$M\nu_\alpha(x + y) = \frac{1}{2} M\nu_\alpha(x) M\nu_\alpha(y),$$

$$M\nu_\alpha(x + y)\, \nu_\alpha(y) = \frac{1}{2} M\nu_\alpha(x) M\nu_\alpha^2(y),$$

---

*) $[u]$ — целая часть u.

**) $\delta_y^x = \begin{cases} 1, & \text{если } y = x, \\ 0, & \text{если } y \neq x. \end{cases}$

$$M\nu_\alpha^2(x+y) = \frac{1}{2} M\nu_\alpha^2(x) M\nu_\alpha(y) -$$

$$-(M\nu_\alpha(x))^2 \left(\frac{1}{4} M\nu_\alpha^2(y) - \frac{1}{2} M\nu_\alpha(y)\right),$$

$$\left.\frac{dM\nu_\alpha(x)}{dx}\right|_{x=0} = 2(a_{12}(\alpha) - a_{21}(\alpha)), \quad \left.\frac{dM\nu_\alpha^2(x)}{dx}\right|_{x=0} = 12a_{12}(\alpha) - 4a_{21}(\alpha).$$

Решая эту систему, находим

$$M\nu_\alpha(x) = 2e^{-2(a_{21}(\alpha)-a_{12}(\alpha))x} \overset{\alpha\to 1}{\to} M\nu_1(x) = 2, \tag{2}$$

$$M\nu_\alpha(x)\nu_\alpha(y) \overset{\alpha\to 1}{\to} M\nu_1(x)\nu_1(y) = 8a\min(x, y) + 4.$$

Для случайной величины $\lambda_1(\alpha, b)$ имеет место представление

$$\lambda_1(\alpha, b) = \sum_{\theta_k(\alpha)\in[\mu_1(\alpha,b),\mu_2(\alpha,b)]} (-1)^{(k)} \int_{x_\alpha(\theta_{k-1}(\alpha))}^{x_\alpha(\theta_k(\alpha))} f_\alpha(x)\,dx,$$

где $\theta_0(\alpha) = \mu_1(a, b)$. $\theta_n(\alpha) = \inf(t : t > \theta_{n-1}(\alpha), \eta_\alpha(t) \neq \eta_\alpha(\theta_{n-1}(\alpha)))$, $n = 1, 2, \ldots$, откуда следует, что

$$\lim_{\alpha\to 1} (\text{сл})\, \lambda_1(\alpha, b) = \lambda_1(1, b), \tag{3}$$

так как, очевидно,

$$\lim_{\alpha\to 1} (\text{сл})\, x_\alpha(\theta_n(\alpha)) = x_1(\theta_n(1)), \quad \lim_{\alpha\to 1} (\text{сл})\, \mu_n(\alpha, b) = \mu_n(1, b), \ n \geqslant 0.$$

Это представление можно переписать в виде

$$\lambda_1(\alpha, b) = \sum_{k=1}^{n} f_\alpha(z_{nk}) \nu_\alpha(z_{nk}) \Delta x_{nk} + \zeta_{\alpha,n},$$

где $-z = x_{n0} < x_{n1} < \ldots x_{nn} = z$, $z_{nk} \in (x_{nk-1}, x_{nk})$, $\Delta x_{nk} = x_{nk} - x_{nk-1}$,

$$|\zeta_{\alpha,n}| \leqslant \max_{|x|\leqslant z} |f_\alpha(x)| \max_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_{nk} \sum_{\theta_k(\alpha)\in[\mu_1(\alpha,b),\,\mu_2(\alpha,b)]} \chi_{[-z,z]}(x_\alpha(\theta_k(\alpha))).$$

Окончательно получаем

$$\lambda_1(\alpha, b) = \int_{-z}^{z} f_\alpha(x) \nu_\alpha(b - x)\,dx. \tag{4}$$

Из (2) — (4) очевидным образом следует (1). Лемма доказана.

Лемма 2.

1. $\lim\limits_{\alpha\to 1, t\to\infty} (\text{сл})\, \nu(\alpha, t, b)\, w(\alpha, t)^{-1} = \xi(q)$, если $\lim\limits_{\alpha\to 1, t\to\infty} (1 + r(\alpha)\sqrt{t})^{-1} =$
$$= q \in [0, 1],$$

2. $\lim\limits_{\alpha\to 1} (\text{сл}) \lim\limits_{t\to\infty} (\text{сл})\, \nu(\alpha, t, b)\, w(\alpha, t)^{-1} = \xi(0)$;

3. $\lim\limits_{t\to\infty} (\text{сл}) \lim\limits_{\alpha\to 1} (\text{сл})\, \nu(\alpha, t, b)\, w(\alpha, t)^{-1} = \xi(1)$.

Доказательство. Обозначим $\varrho_0(\alpha) = 0$, $\varrho_n(\alpha) = \mu_{2n-1}(\alpha, b) - \mu_{2n-2}(\alpha, b)$, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, случайные величины $\varrho_n(\alpha)$, $n = 1, 2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеет место тождество

$$P\{\nu(\alpha, t, b) < u\} = P\left\{\sum_{k=0}^{[u]} \varrho_k(\alpha) \geqslant t\right\}.$$

Обозначим

$$h_i(x, \alpha, s) = M\exp\{-s\inf(t : x_\alpha(t) = b)/x_0 = b + x, \eta_0 = e_i\},$$
$$i = 1, 2, \ x \geqslant 0.$$

Функции $h_i(x, \alpha, s)$, $i = 1, 2$, $x \geqslant 0$ удовлетворяют системе уравнений

$$h_1(x+y, \alpha, s) = h_1(x, \alpha, s)\, h_2(y, \alpha, s),\ h_2(x+y, \alpha, s) = h_2(x, \alpha, s)\, h_2(y, \alpha, s),$$
$$h_2(0, \alpha, s) = 1, \quad \frac{\partial h_1(x, \alpha, s)}{\partial x} = (s + a_{12}(\alpha))\, h_1(x, \alpha, s) -$$
$$- a_{12}(\alpha)\, h_2(x, \alpha, s),$$
$$\frac{\partial h_2(x, \alpha, s)}{\partial x} = a_{21}(\alpha)\, h_1(x, \alpha, s) - (s + a_{21}(\alpha))\, h_2(x, \alpha, s),$$

решая которую, находим

$$M\exp\{-s\varrho_1(\alpha)\} = h_1(0, \alpha, s) =$$
$$= \frac{a_{12}(\alpha) + a_{21}(\alpha) + 2s - \sqrt{(a_{21}(\alpha) - a_{12}(\alpha))^2 + 4s^2 + 4s(a_{21}(\alpha) + a_{12}(\alpha))}}{2a_{21}(\alpha)}.$$

Опуская часть промежуточных вычислений, получаем

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty} \left(h_1\left(0, \alpha, \frac{s}{t}\right)\right)^{[uw(\alpha, t)]} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{u(1-q)}{2} - u\sqrt{\left(\frac{1-q}{2}\right)^2 + \frac{2sq^2}{a}}\right\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{uq}{\sqrt{xa}}}^\infty \exp\left\{-\frac{u(1-q)}{2} - \frac{(1-q)^2u^2}{8t^2} - \frac{v^2}{2}\right\} dv,$$

если $\lim\limits_{\alpha\to 1, t\to\infty} (1 + r(\alpha)\sqrt{t})^{-1} = q$. Аналогично доказываются два остальных утверждения леммы.

Докажем, например, второе утверждение теоремы 1. Для произвольной последовательности (α_n, t_n), $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, в силу леммы 2 найдется такое K_σ для произвольного $\sigma > 0$, что $P\left\{\frac{\nu(\alpha_n, t_n, b)}{w(\alpha_n, t_n)} \bar{\in} \left[\frac{1}{K_\sigma}, K_\sigma\right]\right\} < \sigma$. Оценка

$$\left| M \exp\left\{\frac{is}{\sqrt{c_2 w(\alpha_n, t_n)}} \xi(e_1, b, \alpha_n, \pi(t_n, b))\right\} - \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}s^2 v} d\Psi(q, v) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{K_\sigma^{-1} \leqslant v \leqslant K_\sigma} \left| \left\{ 1 + \frac{s(iv(\alpha_n) + 0_{1\alpha n}\sqrt{r(\alpha_n)}))}{\sqrt{c_2 w(\alpha_n, t_n)}} - \frac{s^2}{2w(\alpha_n, t_n)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 0_{2\alpha_n}\left(\frac{s^2}{c_2 w(\alpha_n, t_n)}\right)\right\}^{[vw(\alpha_n, tn)]} - e^{\frac{1}{2}s^2 v} \right| +$$

$$+ 2P\left\{\frac{\nu(\alpha_n, t_n, b)}{w(\alpha_n, t_n)} \bar{\in} \left[\frac{1}{K_\sigma}, K_\sigma\right]\right\} + \left| \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}s^2 v} dP\left\{\frac{\nu(\alpha_n, t_n, b)}{w(\alpha_n, t_n)} < v\right\} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}s^2 v} d\Psi(q, v) \right| \leqslant \varepsilon$$

для произвольного $\varepsilon > 0$ при соответствующем выборе σ и достаточно больших n. Остальные утверждения теорем 1 и 2 доказываются аналогично. Необходимо еще избавиться от ограничения $b \geqslant z$. Так как случайные величины $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(\eta_0, x_0, \alpha, \pi(t, b))$ $(\alpha \in [0, 1))$ одинаково распределены для всех b, то этого не надо делать для 3, 4 и 5-го утверждений теоремы 2. Пусть $c < b'$, $-z$, x_0, $z \leqslant b$. Для случайной величины $\xi_c(\eta_0, x_0, \alpha, \pi_c(b, t))$ имеет место представление

$$\xi_c(\eta_0, x_0, \alpha, \pi_c(b, t)) = \xi_c(\eta_0, x_0, \alpha, \pi_c(b', t)) +$$
$$+ \beta + \tilde{\xi}_c(\eta_0, x_0, \alpha, \tilde{\pi}(b, \zeta_t(\mu)), \tag{5}$$

где

$$\mu = \inf (s : s \geqslant \pi_c (b', t), \quad x^c_\alpha (s) = b, \quad \eta_\alpha (s) = e_1),$$

$$\zeta_t (s) = t - \int_0^s \chi_{[b,\infty)} (x^c_\alpha (u))\, du, \quad \beta = \int_{\pi_c(b' t)}^{\mu} f_\alpha (x^c_\alpha (u))\, du,$$

$$\tilde{\xi}_c (\eta_0, x_0, \alpha, \tilde{\pi}_c (b, v)) = \int_{\mu}^{\mu + \tilde{\pi}_c(b, v)} f_\alpha (x^c_\alpha (u))\, du,$$

$$\tilde{\pi} (b, y) = \inf \left(s : \int_{\mu}^{\mu + s} \chi_{[b,\infty)} (x^c_\alpha \ (u))\, du \geqslant y \right).$$

Очевидно,

$$P \{\tilde{\xi}_c (\eta_0, x_0, \alpha, \tilde{\pi}_c (b, v)) < u\} = P \{\xi_c (e_1, b, \alpha, \pi_c (b, v)) < u\}.$$

Случайная величина $\tilde{\xi}_c (\eta_0, x_0, \alpha, \tilde{\pi}_c (b, v))$ полностью определяется процессом $x^c_\alpha (u)$ для $u \geqslant \mu$ и, следовательно, не зависит от $\zeta_t (\mu)$. Поэтому для того, чтобы

$$\lim_{\alpha \to 1,\ t \to \infty} (\text{сл})\, \tilde{\xi}_c (\eta_0, x_0, \alpha, \tilde{\pi}_c (b, \zeta_t (\mu))\, \tilde{w} (\alpha, t)^{-1} = 0$$

в условиях теоремы 1, где $\tilde{w} (\alpha, t)$ — это $w (\alpha, t)$, $\sqrt{w (\alpha, t)}$ или $v (\alpha)\, w (\alpha, t)$ соответственно для 1, 2 или 3-го утверждений теоремы 1, достаточно доказать равенство

$$\lim_{\alpha \to 1, t \to \infty} (\text{сл})\, \zeta_t (\mu)\, w (\alpha, t)^{-2} = 0.$$

В силу равномерной по α, t и $(\eta_\alpha (\pi_c (b', t)),\ x^c_\alpha (\pi_c (b', t)))$ ограниченности по вероятности величины β и представления (5) это вообще доказывало бы теорему (для соответствующих утверждений теоремы 2 доказательство можно провести совершенно аналогично). Но

$$\zeta_t (\mu) \leqslant \int_0^t \chi_{[c,b)} (x^c_\alpha (u))\, du \leqslant \pi_c (b, t) - t,$$

а распределение величины $\pi_c (b, t) - t$ совпадает с распределением $\xi_c (\eta_0, x_0, \alpha, \pi_c (b, t))$, если

$$f_\alpha (x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in [c, b], \\ 0 & \text{для } x \,\overline{\in}\, [c, b] \end{cases}$$

(мы пришли к уже разобранному случаю), и поэтому

$$\lim_{\alpha\to 1,\, t\to\infty} (\text{сл})\,(\pi_c(b,t) - t)\, w(\alpha,t)^{-2} = 0.$$

Теоремы доказаны.

D. S. Silvestrov

THE LIMIT THEOREM FOR THE CONTINUOUS RANDOM WALK ON THE HALF-LINE, WHICH IS CONTROLLED BY THE MARKOVIAN PROCESS WITH TWO STATES, IN SCHEME OF SERIES. I

Summary

The possible limit distribution for the functional of integral kind from continuous random walk on the half-line, which is controlled by the markovian process with two states, in scheme of series is studied.

Поступила в редакцию 24.X 1968.