Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, асп.
*Киевский университет*

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ, УПРАВЛЯЕМОГО ЦЕПЬЮ МАРКОВА. I

Пусть для каждого $\alpha \in [0, 1]$ $T_1(\alpha) = \{\eta_\alpha(n),\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ — цепь Маркова с двумя состояниями $e_1 = +1$, $e_2 = -1$ и матрицей переходных вероятностей $\| p_{ij}(\alpha) \|_{i,j=1}^2$, где $p_{ij}(\alpha) \neq 0$, $i, j = 1, 2$, а

$$T_2(\alpha) = \{(\tau_\alpha(n, x, e_i), \gamma_\alpha(n, x, e_i)),$$

$$n = 1, 2, \ldots, x \in H = \{0, 1, 2, \ldots\}, \qquad i = 1, 2\}$$

независимая от $T_1(\alpha)$ совокупность независимых при всех $n = 1, 2, \ldots$ случайных векторов таких, что:

1) $P\{\tau_\alpha(n, x, e_i) < u, \gamma_\alpha(n, x, e_i) < v\} = P\left\{\tau\left(\alpha, x - \frac{e_i + e_1}{2}, i\right) < u,\ \gamma\left(\alpha, x - \frac{e_i + e_1}{2}, i\right) < v\right\}$;

2) $\tau(\alpha, x, i) > 0$ с вероятностью 1 для всех $n = 1, 2, \ldots, x \in H$, $i = 1, 2$.

С $T_i(\alpha)$, $i = 1, 2$ можно связать случайное блуждание частицы на множестве $H$, определяя для $n = 1, 2, \ldots$:

а) $n$-й скачок частицы $\eta_n = \{\eta_\alpha(n)$, если $x_{n-1} > 0$, $e_1$, если $x_{n-1} = 0$;

б) положение частицы после $n$-го скачка $x_n = x_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k$;

в) время между $(n-1)$-м и $n$-м скачками $\tau_n = \tau_\alpha(n, x_n, \eta_n)$;

г) положение частицы в момент времени $t$ $x(t) = x_{\nu(t)}$, где $\nu(t) = \max\left(n : \sum\limits_{k=0}^{n} \tau_k \leqslant t\right)$ (по определению $\tau_0 = 0$);

д) $\eta_0 = \eta_\alpha(0) = \mathrm{const} \in \{e_1, e_2\}$, $x_0 = x(0) = \mathrm{const} \in H$ начальные условия блуждания и случайный функционал

$$\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha) = \sum_{k=0}^{\nu(\pi(a,t))} \gamma_k,$$

где $\gamma_k = \{\gamma_\alpha(k, x_k, \eta_k)$ для $k = 1, 2, \ldots,$ 0 для $k = 0$,

$$\pi(a, t) = \inf\left(s : \int_0^s X_{[a,\infty)}(x(u))\,du \geq t\right)^{*)} \quad \text{(в частности, } \pi(0, t) = t).$$

Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием возвратности рассматриваемого блуждания ($P\{x_n \neq x_0, n > 0\} = 0$ для произвольных $\eta_0$ и $x_0$) является неравенство

$$1 > p_{22}(\alpha) \geq p_{11}(\alpha) > 0.$$

Пусть выполняется условие

($A_1$): 1. $p_{11}(\alpha) > p_{11}(1) = p = p_{22}(1) > p_{22}(\alpha)$ для $\alpha \in [0, 1)$,

2. $\lim\limits_{\alpha\to 1} p_{ij}(\alpha) = p_{ij}(1)$, $i, j = 1, 2$.

В работе изучаются возможные предельные распределения для нормированной случайной величины $\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)$ при $\alpha \to 1$, $t \to \infty$ и выполнении условий

($A_2$): 1. $\lim\limits_{\alpha\to 1}(\text{сл.})\,\tau(\alpha, x, i) = \tau(1, x, i)$ для $x \in H$, $i = 1, 2^{**)}$,

2. $\tau(\alpha, x, i) = \tau(\alpha, i)$ для $x \geq b \in H$, $i = 1, 2$, $\alpha \in [0, 1]$;

3. $M\tau(\alpha, x, i) < \infty$ для $x \in H$, $i = 1, 2$, $\alpha \in [0, 1]$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1} M\tau(\alpha, x, i) = M\tau(1, x, i)$, $i = 1, 2$, $x \in H$;

($A_3$): 1. $\gamma(\alpha, x, i) = 0$ с вероятностью 1 для $x \geq b$, $i = 1, 2$, $\alpha \in [0, 1]$;

2. $\lim\limits_{\alpha\to 1}(\text{сл})\,\gamma(\alpha, x, i) = \gamma(1, x, i)$ для $x \in H$, $i = 1, 2$;

3. $M|\gamma(\alpha, x, i)| < \infty$, $x \in H$, $i = 1, 2$, $\alpha \in [0, 1]$,

$\lim\limits_{\alpha\to 1} M\gamma(\alpha, x, i) = M\gamma(1, x, i)$, $x \in H$, $i = 1, 2$,

если $c_1 = \sum\limits_{x\in H}\sum\limits_{i=1}^{2} M\gamma(1, x, i) \neq 0$, а если $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, то дополнительно

$$M|\gamma(\alpha, x, i)|^2 < \infty, \quad x \in H, \quad i = 1, 2, \quad \alpha \in [0, 1],$$

$$\lim_{\alpha\to 1} M(\gamma(\alpha, x, i))^2 = M(\gamma(1, x, i))^2, \quad x \in H, \quad i = 1, 2,$$

где

$$c_2 = \left(\frac{2}{p} - 2\right)\sum_{x,y=0}^{b}\sum_{i,j=1}^{2}\min(b - x, b - y)\,M\gamma(1, x, i)\,M\gamma(1, y, j) + \sum_{x=0}^{b}\sum_{i=1}^{2} D\gamma(1, x, i).$$

---

*) $X_M(x)$ — индикатор множества $M$.

**) Символ $\lim\limits_{t\to t'}(\text{сл})\,\xi_t = \xi_{t'}$ означает слабую сходимость функций распределения случайных величин $\xi_t$ и $\xi_{t'}$ при $t \to t'$.

*Замечания*. 1. Константа $c_2$ не зависит от выбора $b$, если $c_1=0$. 2. Если $c_i=0$, $i=1,2$ и $\alpha=1$, то $\sum\limits_{k=n'}^{n''}\gamma_k=0$ с вероятностью 1 для произвольных $n', n''$ таких, что $x_{n'}=x_{n''}\geqslant b$.

Введем ряд обозначений:

$$v(\alpha)=\sum_{x\in H}\sum_{i=1}^{2}M\gamma(\alpha, x, i),$$

$$r(\alpha)=1-\frac{p_{12}(\alpha)}{p_{21}(\alpha)},\qquad w(\alpha, t)=\frac{\sqrt{t}}{1+r(\alpha)\sqrt{t}},$$

$$c_4=\frac{2(1-p)}{p(M\tau(1,1)+M\tau(1,2))};$$

$N(d_1, d_2)$ — случайная величина с функцией распределения

$$\varphi(d_1, d_2, u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi d_2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{(v-d_1)^2}{2d_2}}dv, & \text{если } d_2>0,\\ \chi_{(d_1,\infty)}(u), & \text{если } d_2=0,\end{cases}$$

$\xi(a, q)$, $q\in[0,1]$ — случайная величина с функцией распределения

$$\Psi(a, q, u)=\begin{cases}0 & \text{для } u\leqslant 0\\ 1-\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{uq}{\sqrt{a}}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{u(1-q)}{2}-\frac{(1-q)^2u^2}{8v^2}-\frac{v^2}{2}\right\}dv & \text{для } u>0.\end{cases}$$

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия $(A_i)$, $i=1\div 3$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1, t\to\infty}\dfrac{1}{1+r(\alpha)\sqrt{t}}=q=\text{const}\in[0,1]$. Тогда:

1) если $c_1\neq 0$, то

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty}P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a,t), \alpha)}{c_1 w(\alpha, t)}<u\right\}=\Psi(c_4, q, u);$$

2) если $c_1=0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1, t\to\infty}v(\alpha)\sqrt{w(\alpha, t)}=0$, то

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty}P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a,t), \alpha)}{\sqrt{c_2 w(\alpha, t)}}<u\right\}=\int_0^{\infty}\varphi\left(0, 1, \frac{u}{\sqrt{v}}\right)d\Psi(c_4, q, v);$$

3) если $c_1=0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1, t\to\infty} \frac{1}{|v(\alpha)|\sqrt{w(\alpha, t)}} = \frac{c_3}{\sqrt{c_2}} < \infty$, то

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)}{v(\alpha)\, w(\alpha, t)} < u\right\} = \int_0^\infty \varphi\left(0, c_3^2, \frac{u-v}{\sqrt{v}}\right) d\Psi(c_4, q, v).$$

*Замечания.* 1. Функция распределения случайной величины $d_3\xi(a, q) + N(d_1, d_2)\sqrt{\xi(a, q)}$, где $N(d_1, d_2)$ и $\xi(a, q)$ независимы: $\int\limits_0^\infty \varphi\left(d_1, d_2, \frac{u-d_3v}{\sqrt{v}}\right) d\Psi(a, q, v)$.

2. $\xi(a, 1) = |N(0, a)|$, а $\xi(a, 0)$ распределена показательно с $M\xi(a, 0) = 1$. Нетрудно показать, что для $\alpha \in [0, 1)$ существует конечный с вероятностью единица $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)$, а $\lim\limits_{\alpha\to 1}(\text{сл})\, \xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha) = \xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), 1)$. Следующая теорема дает ответ на вопрос о возможных предельных распределениях для нормированных случайных величин $\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), 1)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)$ соответственно при $t\to\infty$ и $\alpha \to 1$.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия $(A_i)$, $i = 1-3$, тогда

1) если $c_1 \neq 0$, то

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\alpha\to 1} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)}{c_1 w(\alpha, t)} < u\right\} = \Psi(c_4, 1, u);$$

2) если $c_1 = 0$, то

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\alpha\to 1} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)}{\sqrt{c_2 w(\alpha, t)}} < u\right\} = \int_0^\infty \varphi\left(0, 1, \frac{u}{\sqrt{v}}\right) d\Psi(c_4, 1, v);$$

3) если $c_1 \neq 0$, то

$$\lim_{\alpha\to 1}\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)}{c_1 w(\alpha, t)} < u\right\} = \Psi(c_4, 0, u);$$

4) если $c_1 = 0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1} \frac{v(\alpha)}{\sqrt{r(\alpha)}} = 0$, то

$$\lim_{\alpha\to 1}\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)}{\sqrt{c_2 w(\alpha, t)}} < u\right\} = \int_0^\infty \varphi\left(0, 1, \frac{u}{\sqrt{v}}\right) d\Psi(c_4, 0, v);$$

5) если $c_1 = 0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1} \frac{\sqrt{r(\alpha)}}{|v(\alpha)|} = \frac{c_3}{\sqrt{c_2}} < \infty$, то

$$\lim_{\alpha\to 1}\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)}{v(\alpha)\, w(\alpha, t)} < u\right\} = \int_0^\infty \varphi\left(0, c_3^2, \frac{u-v}{\sqrt{v}}\right) d\Psi(c_4, 0, v).$$

Доказательство. Нетрудно показать, что случайная величина $\sum_{k=0}^{\nu(\mu_0)} \gamma_k$, где $\mu_0 = \inf(t : x(t) = a, \eta_{\nu(t)} = e_1)$ равномерно по $\alpha$ и $t$, ограничена по вероятности. Поэтому возможные предельные распределения не зависят от начальных условий блуждания, и можно считать, что $(\eta_0, x_0) = (e_1, a)$. Пусть вначале $a \geqslant b$. Для случайной величины $\xi(e_1, a, \pi(a, t), \alpha)$ имеет место представление

$$\xi(e_1, a, \pi(a, t), \alpha) = \sum_{k=0}^{\nu(\alpha, t)} \lambda_k(a, \alpha),$$

где

$$\mu_n = \inf\left(t : t > \mu_{n-1} + \tau_{\nu(\mu_{n-1})+1}, \quad x(t) - \frac{\eta_{\nu(t)} + e_2}{2} = a\right),$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

$$\nu(\alpha, t) = \max(n : \mu_{2n} < \pi(a, t));$$

$$\lambda_0(a, \alpha) = 0, \ \lambda_n(a, \alpha) = \sum_{k=\nu(\mu_{2n-1})+1}^{\nu(\mu_{2n})} \gamma_k, \qquad n = 1, 2, \ldots \nu(\alpha, t).$$

Очевидно, случайные величины $\lambda_n(a, \alpha)$, $n = 1, 2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, и для всех $t \in [0, \infty)$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$ величины $\nu(\alpha, t)$ и $\lambda_n(a, \alpha)$ независимы. Поэтому

$$M \exp\{is\xi(e_1, a, \pi(a, t), \alpha)\} = \int_0^\infty (M \exp\{is\lambda_1(a, \alpha)\})^u \, dP\{\nu(\alpha, t) < u\}.$$

**Лемма 1.** Если $c_1 \neq 0$, то

$$M \exp\{is\lambda_1(a, \alpha)\} = 1 + isc_1 + 0_{1\alpha}(s),$$

если $c_1 = 0$, то

$$M \exp\{is\lambda_1(a, \alpha)\} = 1 + isv(\alpha) - \frac{1}{2} c_2 s^2 + 0_{2\alpha}(s\sqrt{r(\alpha)} + s^2),$$

где $\lim\limits_{\alpha \to 1, s \to 0} 0_{j\alpha}(s) s^{-1} = \lim\limits_{s \to 0} \lim\limits_{\alpha \to 1} 0_{j\alpha}(s) s^{-1} = 0$, $j = 1{,}2$. Доказательств. леммы с точностью до обозначений приведено в работе [1].

**Лемма 2.** В условиях теоремы 1:

$$\lim_{\alpha \to 1, t \to \infty} (\text{сл}) \, \nu(\alpha, t) w(\alpha, t)^{-1} = \xi(c_4, q).$$

В условиях теоремы 2:

$$\lim_{t \to \infty} (\text{сл}) \lim_{\alpha \to 1} (\text{сл}) \, \nu(\alpha, t) w(\alpha, t)^{-1} = \xi(c_4, 1),$$

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл})\lim_{t\to\infty}(\text{сл})\,\nu(\alpha,t)\,w(\alpha,t)^{-1}=\xi(c_4,0).$$

Доказательство. Обозначим $\varrho_0(\alpha)=0$, $\varrho_n(\alpha)=\mu_{2n-1}-\mu_{2n-2}$, $n=1,2,\ldots$ Очевидно, величины $\varrho_n(\alpha)$, $n=1,2,\ldots$ независимы, одинаково распределены, и имеет место тождество

$$P\{\nu(\alpha,t)<u\}=P\left\{\sum_{k=0}^{[u]}\varrho_k(\alpha)\geqslant t\right\}^{*)}.$$

Совершенно аналогично тому, как это было сделано в работе [2] (для $\tau(\alpha,j)=1$, $j=1,2$ с вероятностью 1, $p_{ij}(\alpha)=\frac{1}{2}$, $i,j=1,2$), можно показать, что

$$M\exp\{-s\varrho_1(\alpha)\}=\frac{1-\Delta-\sqrt{(1-\Delta)^2-4p_{12}(\alpha)\,p_{21}(\alpha)\,g_1(\alpha,s)\,g_2(\alpha,s)}}{2p_{21}(\alpha)\,g_1(\alpha,s)},$$

где

$$g_i(\alpha,s)=M\exp\{-s\tau(\alpha,i)\},\quad i=1,2,$$

$$\Delta=(p_{11}(\alpha)\,p_{22}(\alpha)-p_{12}(\alpha)\,p_{21}(\alpha))\,g_1(\alpha,s)\,g_2(\alpha,s).$$

Опуская часть промежуточных вычислений, получаем

$$\lim_{\alpha\to 1,t\to\infty}\left(M\exp\left\{-s\frac{\varrho_1(\alpha)}{t}\right\}\right)^{[uw(\alpha,t)]}=\exp\left\{-\frac{u(1-q)}{2}-\right.$$

$$\left.-u\sqrt{\left(\frac{1-q}{2}\right)^2-\frac{2sq^2}{a}}\right\}=\int_0^\infty e^{-sx}d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{uq}{\sqrt{ax}}}^\infty\exp\left\{-\frac{u(1-q)}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(1-q)^2u^2}{\delta v^2}-\frac{v^2}{2}\right\}dv,$$

если $\lim_{\alpha\to 1,t\to\infty}(1+r(\alpha)\sqrt{t})^{-1}=q\in[0,1]$. Остальные утверждения леммы доказываются аналогично. Используя представление (1) и результаты лемм 1 и 2, например, для первого утверждения теоремы 1, получаем оценку

$$\left|M\exp\left\{\frac{is\xi(e_1,a,\pi(a,t),\alpha)}{c_1w(\alpha,t)}\right\}-\int_0^\infty e^{isu}d\Psi(c_4,q,u)\right|\leqslant$$

---

*) $[u]$ — целая часть $u$.

$$\leqslant \left| \int_0^\infty e^{isu} dP \left\{ \frac{\nu(\alpha, t)}{w(\alpha, t)} < u \right\} - \int_0^\infty e^{isu} d\Psi(c_4, q, u) \right| +$$

$$+ 2P \left\{ \frac{\nu(\alpha, t)}{w(\alpha, t)} \overline{\in} [K_1, K_2] \right\} + \max_{u \in [K_1, K_2]} \left| \left( 1 + \frac{is}{w(\alpha, t)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 0_{1\alpha} \left( \frac{s}{c_1 w(\alpha, t)} \right) \right)^{uw(\alpha, t)} - e^{isu} \right| \leqslant \varepsilon$$

для произвольного $\varepsilon > 0$ при соответствующем выборе промежутка $[K_1, K_2]$, достаточно больших $t$ и $\alpha$ близких к 1. Остальные утверждения теорем доказываются аналогично. Необходимо еще избавиться от ограничения $a \geqslant b$. Проделаем это для теоремы 1. Для первых двух утверждений теоремы 2 это делается совершенно аналогично, а для утверждений 3 — 5 такое доказательство вообще не нужно, так как случайные величины $\lim\limits_{t \to \infty} \xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)$ распределены одинаково для всех $a$. Пусть $a' \geqslant a + 1, b$. Для случайной величины $\xi(\eta_0, x_0, \pi(a', t), \alpha)$ можно записать представление

$$\xi(\eta_0, x_0, \pi(a', t), \alpha) = \xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha) +$$

$$+ \beta + \xi_\mu(\eta_0, x_0, \pi_\mu(a', \xi_t(\mu)), \alpha),$$

где

$$\mu = \inf(s : s \geqslant \pi(a, t), \eta_{\nu(s)} = e_1, x(s) = a'),$$

$$\zeta_t(s) = t - \left( s - \int_0^s \chi_{[0, a')}(x(u))\, du \right), \qquad s \leqslant t,$$

$$\beta = \sum_{k=\nu(\pi(a, t))+1}^{\nu(\mu)} \gamma_k, \quad \pi_s(a', t) = \inf \left( u : \int_s^{s+u} \chi_{[a', \infty)}(x(v))\, dv \geqslant t \right),$$

$$\xi_s(\eta_0, x_0, \pi_s(a', u), \alpha) = \sum_{k=\nu(s)+1}^{\nu(\pi_s(a', u)+s)} \gamma_k.$$

Случайная величина $\xi_\mu(\eta_0, x_0, \pi_s(a', u), \alpha)$ распределена одинаково с $\xi(e_1, a', \pi(a', u), \alpha)$, полностью определяется процессом $(\gamma_{\nu(s)}, x(s))$ для $s \geqslant \mu$ и, следовательно, не зависит от $\zeta_t(\mu)$, полностью определяющейся процессом $x(s)$ для $s < \mu$, поэтому для того чтобы

$$\lim_{\alpha \to 1, t \to \infty} (\text{сл})\, \xi_\mu(\eta_0, x_0, \pi_\mu(a', \zeta_t(\mu)), \alpha)\, \tilde{w}(\alpha, t)^{-1} = 0,$$

где $\tilde{w}(\alpha, t)$ — это $w(\alpha, t)$, $\sqrt{w(\alpha, t)}$ или $v(\alpha) w(\alpha, t)$ соответственно для 1, 2 или 3-го утверждений теоремы, достаточно показать, что

$$\lim_{\alpha \to 1, t \to \infty} (\text{сл})\, \zeta_t(\mu)\, w(\alpha, t)^{-2} = 0,$$

а в силу равномерной по $\alpha, t$ и $\eta_{\nu(\pi(a,t))}$, $x(\pi(a,t))$ ограниченности по вероятности величины $\beta$ это вообще доказывало бы теорему. Но, очевидно,

$$\zeta_t(\mu) \leqslant \int_0^\mu \chi_{[0,a')}(x(u))\,du \leqslant \pi(a', t) - t,$$

а распределение $\pi(a', t) - t$ совпадает с распределением случайной величины $\xi(\eta_0, x_0, \pi(a', t), \alpha)$, если с вероятностью 1

$$\gamma(\alpha, x, i) = \{\tau(\alpha, x, i) \text{ для } x < a',\ 0 \text{ для } x \geqslant a'$$

и, следовательно (так как мы пришли к уже разобранному случаю),

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty} (\text{сл})(\pi(a', t) - t)\,\omega(\alpha, t)^{-2} = 0.$$

Теоремы доказаны.

*Замечание.* Можно было бы определить $T_2(\alpha)$ более сложно

$$T_2(\alpha) = \Big\{\Big(\gamma_\alpha(n, x, j), \tau_\alpha(n, x, i, j) =$$

$$= \begin{cases}\tau_\alpha(n, x, j) \text{ для } x < b\\ \tau_\alpha(n, i, j) \text{ для } x \geqslant b\end{cases}\Big),\ n \geqslant 1,\ x \in H,\ i, j = 1, 2\Big\}$$

и соответственно $\tau_n = \tau_\alpha(n, x_n, \eta_{n-1}, \eta_n)$ (время между $(n-1)$-м и $n$-м скачками зависит не только от $n$-го скачка, но и от $(n-1)$-го). Если накладывать на $T_i(\alpha)$, $i = 1, 2$ условия, аналогичные приводившимся выше, то имели бы место все утверждения теорем 1 и 2 с заменой константы $c_4$ по формуле

$$c_4 = \frac{2(1-p)}{p(p(M\tau(1,1,1) + M\tau(1,2,2)) + (1-p)(M\tau(1,1,2) + M\tau(1,2,1)))}.$$

Рассмотрим два примера, вкладывающихся в основную схему.

Представим себе, что частица в моменты времени $n = 0, 1, 2, \ldots$ совершает случайные скачки $\eta_n$ по точкам множества $H$ такие, что

1) $P\{\eta_n = e_j / x_{n-1} = x, \eta_{n-1} = e_i, x_k, k < n-1\} = P\{\eta_n = e_j / x_{n-1} = x, \eta_{n-1} = e_i\} =$
$= p_{ij}(\alpha, x)$, $n \geqslant 1$, где $i, j = 1, 2$, $x \in H$, $\alpha \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^{2} p_{ij}(\alpha, x) = 1$,

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \eta_k,\quad (\eta_0, x_0) = \text{const};$$

2) $p_{i1}(\alpha, 0) = 1$, $p_{ij}(\alpha, x) = p_{ij}(\alpha, x+m)$ для $i, j = 1, 2$, $x \geqslant a \in H$, где $m = \text{const} > 0$, и рассмотрим случайную величину

$$\xi(\eta_0, x_0, \alpha, n) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k),$$

где $f(x)$ — функция, определенная на $H$ и удовлетворяющая условию

$$(B_1):\ f(x) = 0 \text{ для } x > b$$

(можно считать, что $b < a$). Если обозначить

$$\theta_n = \begin{cases} \min(k : x_k \in \{E = \{a + lm,\ l = 0, 1, 2, \ldots\}\} \setminus \{a\},\ \eta_k = e_1) & \text{для } n = 0 \\ \min(k : k > \theta_{n-1},\ x_k \neq x_{\theta_{n-1}}, x_k \in E) & \text{для } n \geqslant 1, \end{cases}$$

то последовательность $\tilde{x}_n = \frac{1}{m}(x_{\theta_n} - a)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ можно «с вероятностью 1» рассматривать как реализацию блуждания по основной схеме (с учетом последнего замечания). Необходимо только найти параметры блуждания.

В данном случае $b = 1$ и $\gamma(\alpha, x, i) = 0$ с вероятностью 1, если только $(x, i) \neq (0, 1)$. Обозначим $\tau = \min(n : x_n \in \{a, a + 2m\})$ и

$$q_{ij}(\alpha, x) = P\left\{x_\tau = \frac{e_j + e_1}{2} \cdot 2m \middle| x_0 = a + m + x, \eta_0 = e_i\right\}, \tag{1}$$

$$r_{ij}(\alpha, x) = P\left\{\eta_1 = e_1 \middle| x_0 = a + m + x, \eta_0 = e_i, x_\tau = a + \frac{e_j + e_1}{2} \cdot 2m\right\};$$

$$\tag{2}$$

$$R_{ij}(\alpha, x) = M\left(\tau / x_0 = a + m + x, \eta_0 = e_i, x_\tau = a + \frac{e_j + e_1}{2} \cdot 2m\right)$$

для $i, j = 1, 2$, $|x - a| \leqslant m - 1$, $\alpha \in [0, 1]$. Очевидно,

$$p_{ij}(\alpha) = q_{ij}(\alpha, 0),\ i, j = 1, 2. \tag{3}$$

Для нахождения $q_{ij}(\alpha, x)$ можно записать систему линейных уравнений

$$q_{ij}(\alpha, x) = p_{i1}(\alpha, x) q_{1j}(\alpha, x + 1) + p_{i2}(\alpha, x) q_{2j}(\alpha, x - 1),$$

$$q_{ij}(\alpha, me_k) = \frac{e_k + e_j}{2} \qquad i, j, k = 1, 2,\ |x - a| < m.$$

Необходимым и достаточным условием возвратности блуждания $x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ является неравенство $0 < q_{11}(\alpha, 0) \leqslant q_{22}(\alpha, 0) < 1$. Пусть выполняется условие

$(B_2)$: 1. $q_{11}(\alpha, 0) > q_{22}(\alpha, 0)$ для $\alpha \in [0, 1)$, $q_{11}(1, 0) = q_{22}(1, 0) = p \in (0, 1)$,

2. $p_{ij}(\alpha, x) \neq 0, 1$, $i, j = 1, 2$, $x > 0$, $\lim\limits_{\alpha \to 1} p_{ij}(\alpha, x) = p_{ij}(1, x)$, $i, j = 1, 2$, $x \in H$.

Нас интересует поведение функции распределения $\xi(\eta_0, x_0, \alpha, n)$ при $\alpha \to 1$ и $n \to \infty$. Вообще говоря, точно вкладывается в основную схему случайная величина $\sum_{k=\theta_0}^{\mu(n)}{}' f(x_k)$, но для случайной величины $\xi(\eta_0, x_0, \alpha, n)$ имеет место представление

$$\xi(\eta_0, x_0, \alpha, n) = \sum_{k=0}^{\theta_0-1} f(x_k) + \sum_{k=\theta_0}^{\mu(n)} f(x_k) + \sum_{k=\mu(n)+1}^{n} f(x_k),$$

$$\mu(n) = \max(\theta_k < n) - 1,$$

и нетрудно показать, что равномерно по $\alpha$, $n$ и $\eta_{\mu(n)}$, $x_{\mu(n)}$ $\sum_{k=0}^{\theta_0-1} f(x_k) + \sum_{k=\mu(n)+1}^{n} f(x_k)$ ограничена по вероятности. Очевидно,

$$c_4 = \frac{2(1-p)}{p(p(R_{11}(1,0) + R_{22}(1,0)) + (1-p)(R_{12}(1,0) + R_{21}(1,0)))}, \tag{4}$$

а для нахождения $R_{ij}(\alpha, x)$ можно записать систему линейных уравнений

$$R_{ij}(\alpha, x) = 1 + r_{ij}(\alpha, x) R_{1j}(\alpha, x+1) + (1 - r_{ij}(\alpha, x)) R_{2j}(\alpha, x-1),$$

$$R_{ij}(\alpha, e_k m) = 0, \quad r_{ij}(\alpha, x) = \frac{q_{1j}(\alpha, x+1)}{q_{ij}(\alpha, x) p_{i1}(\alpha, x)}, \quad i, j, k = 1, 2,$$

$$|x - a| < m.$$

Наконец, если обозначить $F_j(\alpha, x, s) = M \exp\left\{ is \sum_{k=0}^{\theta_0-1} f(x_k)/x_0 = x, \eta_0 = e_i \right\}$, $i = 1, 2$, $x < a$, то

$$v(\alpha) = \frac{1}{i} \frac{\partial F_2(\alpha, a, s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}, \qquad c_2 = -2\frac{\partial F_2(1, a, s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}, \tag{5}$$

а для нахождения $F_j(\alpha, x, s)$ можно записать систему линейных уравнений

$$F_j(\alpha, x, s) = (p_{j1}(\alpha, x) F_1(\alpha, x+1, s) + p_{j2}(\alpha, x) F_2(\alpha, x-1, s)) e^{isf(x)},$$

$$F_1(\alpha, a, s) = 0, \quad j = 1, 2, \quad x < a.$$

**Теорема 3.** Для случайной величины $\xi(\eta_0, x_0, \alpha, n)$ при $\alpha \to 1$ и $n \to \infty$ имеют место все утверждения теорем 1 и 2 при выполнении условий $(B_j)$, $j = 1, 2$ с соответствующей заменой величин $p_{ij}(\alpha)$, $v(\alpha)$, $c_k, \ldots$ по формулам (1) — (5).

Представим себе, что частица в моменты времени $n = 0, 1, 2, \ldots$ совершает случайные скачки $\bar{\eta}_n$ по множеству $\bar{H}$ целочисленных точек полуплоскости $\{(y, z): y \geqslant 0\}$ такие, что:

$$1)\ P\{\bar{\eta}_n = \bar{h}_j / \bar{x}_{n-1} = x,\ \bar{x}_k, k < n-1\} =$$

$$= P\{\bar{\eta}_n = \bar{h}_j / \bar{x}_{n-1} = \bar{x}\} = p_j(\bar{x}, \alpha),\ n = 1, 2, \ldots,$$

где $j = 1 - 4$, $\bar{h}_1 = (1, 0)$, $\bar{h}_2 = (-1, 0)$, $\bar{h}_3 = (0, 1)$, $\bar{h}_4 = (0, -1)$, $\bar{x} \in \bar{H}$, $\sum_{j=1}^{4} p_j(\bar{x}, \alpha) = 1$, $\bar{x}_n = \bar{x}_0 + \sum_{k=1}^{n} \bar{\eta}_k$, $\bar{x}_0 = \text{const} \in \bar{H}$;

$$2)\ p_j(\bar{x}, \alpha) = \{p_j(\alpha), \text{ если } \bar{x} \pm \bar{h}_j \in \bar{H}, 0, \text{ если } \bar{x} + \bar{h}_j \bar{\in} \bar{H}.$$

В предположении, что выполняются условия:

$$p_1(\alpha) > p_1(1) = p = p_2(1) > p_2(\alpha) \quad \text{для} \quad \alpha \in [0, 1) \text{ и}$$

$$\lim_{\alpha \to 1} p_j(\alpha) = p_i(1),\ i = 1 - 4$$

будем изучать поведение функции распределения случайной величины

$$\xi(\bar{x}_0, \alpha, n) = \sum_{k=0}^{n} f_\alpha(\bar{x}_k),$$

где $f_\alpha(y, z)$ функция, определенная на $\bar{H}$ и удовлетворяющая условиям: $a)$ $f_\alpha(y, z) = f_\alpha(y)$, б) $f_\alpha(y) = 0$ для $y > b$, в) $\lim_{\alpha \to 1} f_\alpha(y) = f_1(y)$.

Если обозначить $\theta_n = \min(n : n > \theta_{n-1},\ \bar{\eta}_n \in \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\})$, $n = 1, 2, \ldots, \theta_0 = 0$, то последовательность $x_n = y_{\theta_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $\bar{x}_n = (y_n, z_n)$, можно «с вероятностью 1» рассматривать как реализацию блуждания по основной схеме с параметрами:

$$p_{11}(\alpha) = p_{21}(\alpha) = \frac{p_1(\alpha)}{u(\alpha)},$$

$$P\{\tau(\alpha, i) = n\} = \{(1 - u(\alpha))^{n-1} \quad u(\alpha) \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где $u(\alpha) = p_1(\alpha) + p_2(\alpha)$, а следовательно, $c_4 = \dfrac{1}{2p}$.

Точно вкладывается в основную схему случайная величина

$\sum_{k=0}^{\mu(n)} f_\alpha(\bar{x}_k)$, где $\mu(n) = \max(\theta_k < n) - 1$, $\sum_{k=\mu(n)+1}^{n} f_\alpha(\bar{x}_k)$ равномерно по $\alpha$, $n$ и $\bar{x}_{\mu(n)}$ ограничена по вероятности, а $\xi(\bar{x}_0, \alpha, n) = \sum_{k=0}^{\mu(n)} f_\alpha(\bar{x}_k) + \sum_{k=\mu(n)+1}^{n} f_\alpha(\bar{x}_k)$. Легко видеть, что в данном случае для всех $x \in H$, $i = 1, 2$, $\alpha \in [0, 1]$ $\gamma(\alpha, x, i) = \left\{(n+1) f_\alpha\left(x + \frac{e_i + e_1}{2}\right)\right.$ с вероятностью $(1 - u(\alpha))^n u(\alpha)$, $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда находим

$$r(\alpha) = \frac{p_1(\alpha) - p_2(\alpha)}{p_1 \alpha}, \qquad v(\alpha) = \frac{2}{u(\alpha)} \sum_{x \in H} f_\alpha(x)$$

$$M\gamma(\alpha, x, i) = \frac{f_\alpha\left(x + \frac{e_i + e_1}{2}\right)}{u(\alpha)}, \qquad M(\gamma(1, x, i))^2 = \tag{7}$$

$$= f_1^2\left(x + \frac{e_i + e_1}{2}\right) \cdot \frac{p^2 + (1-p)^2}{2p^2}.$$

**Теорема 4.** Для случайной величины $\xi(\bar{x}_0, \alpha, n)$ при $n \to \infty$ и $\alpha \to 1$ имеют место все утверждения теорем 1 и 2 с соответствующей заменой величин $r(\alpha)$, $v(\alpha)$, $c_k$, $k = 1 - 4, \ldots$ по формулам (6) — (7).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Сильвестров Д. С. — УМЖ (в печати).
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., «Мир», 1964, стр. 277.



**D. S. Silvestrov**


## THE LIMIT THEOREMS FOR THE DISCRETE RANDOM WALK ON THE HALF-LINE CONTROLLED BY THE MARKOV'S CHAIN

### Summary


The possible limit distributions for the functional of integral kind from discrete random markovian walk on the half-line in scheme of series are studied.



Поступила в редакцию 22.X 1968.