А. И. ПОНОМАРЕНКО, асс.
Киевский университет

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИИ НА ГРУППЕ

В работе Годмана [1] было показано существование инвариантного относительно сдвигов среднего значения у комплекснозначной положительно определенной функции на группе. В настоящей заметке доказывается существование инвариантного среднего значения у операторных положительно определенных функций на группе и эргодическая теорема для таких функций. Эти результаты могут представлять интерес в корреляционной теории бесконечномерных случайных полей на группах [4].

Пусть G произвольная группа в $\mathfrak{H}$ некоторое гильбертово пространство. Обозначим через $B(\mathfrak{H})$ нормированное кольцо линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$.

Положительно определенной операторной функцией на группе G называется $B(\mathfrak{H})$-значная функция R_g на G такая, что для любого натурального n, произвольных элементов $g_1, \ldots, g_n \in G$ и произвольных векторов $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{H}$ (см. [2, 3])

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (R_{g_k^{-1} g_i} x_i, x_k) \geqslant 0. \tag{1}$$

Используя (1), нетрудно убедиться, что

$$R_e \geqslant 0, \quad R_{g^{-1}} = R_g^*, \quad \|R_g\| \leqslant \|R_e\|,$$

где e — единица группы G.

Если в $B(\mathfrak{H})$ существует такой оператор $\underset{g}{M^r}(R_g)$, что для любого вектора $x \in \mathfrak{H}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое натуральное число m, элементы $g_1, \ldots, g_m \in G$ и такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, что для всех $g \in G$ выполняется неравенство

$$\| \underset{g}{M^r}(R_g)\, x - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i R_{gg_i} x \| < \varepsilon, \tag{2}$$

то оператор $\underset{g}{M^r}(R_g)$ будем называть правым средним значением функции R_g на группе G. Аналогично, если в $B(\mathfrak{H})$ существует оператор $\underset{g}{M^l}(R_g)$, при котором для любых $y\in\mathfrak{H}$ и $\delta>0$ существуют такие n; $s_1,\ldots,s_n\in G$ и $\beta_1,\ldots,\beta_n\geqslant 0, \sum_{k=1}^{n}\beta_k=1$, что для всех $g\in G$

$$\|\underset{g}{M^l}(R_g)\,y-\sum_{k=1}^{n}\beta_k R_{s_k s}\,y\|<\beta, \tag{3}$$

то оператор $\underset{g}{M^l}(R_g)$ будем называть левым средним значением функции R_g на группе G.

Теорема 1. Каждая операторная положительно определенная функция R_g на группе G имеет единственные левое среднее значение $\underset{g}{M^l}(R_g)$ и правое среднее значение $\underset{g}{M^r}(R_g)$. При этом $\underset{g}{M^l}(R_g)=$ $=\underset{g}{M^r}(R_g)=\underset{g}{M}(R_g)$. Оператор $\underset{g}{M}(R_g)$ будем называть средним значением функции R_g на G.

Среднее значение $\underset{g}{M}(R_g)$ обладает следующими свойствами:

1) $\underset{g}{M}(R_g)$ — неотрицательный оператор;

2) если $R_g\equiv A$, где A некоторый неотрицательный оператор из $B(\mathfrak{H})$, то $\underset{g}{M}(R_g)=A$;

3) $\underset{g}{M}(R_{g^{-1}})=\underset{g}{M^*}(R_g)$;

4) среднее значение определено для любых элементов линейной оболочки множества операторных положительно определенных функций на G и для любых комплексных α, β и любых положительно определенных операторных функций R'_g, R''_g

$$\underset{g}{M}(\alpha R'_g+\beta R''_g)=\alpha\underset{g}{M}(R'_g)+\beta\underset{g}{M}(R''_g);$$

5) $\underset{g}{M}(R_g)\leqslant R_e$ и, следовательно, $\|\underset{g}{M}(R_g)\,|\leqslant\|R_e\|$;

6) среднее значение инвариантно относительно левых и правых сдвигов, т. е. для любых элементов a, s группы G

$$\underset{g}{M}(R_{sga})=\underset{g}{M}(R_g).$$

Доказательство. По теореме 2 из [4] любая положительно определенная операторная функция R_g на группе G может быть представлена в виде

$$R_g=A_1^*U_gA_1, \tag{4}$$

где U_g — унитарное представление группы G в некотором гильбертовом пространстве H и A_1 — линейный ограниченный оператор, действующий из $\mathfrak{H}$ в H.

По результатам [5, 6], если $\mathfrak{G}$ — произвольная группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве K и W — подпространство векторов, инвариантных относительно всех операторов из группы $\mathfrak{G}$, то оператор проектирования P_W в K на W обладает следующим свойством: для любого $x \in K$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное r, операторы $T_1, \ldots, T_r \in \mathfrak{G}$ и числа $\alpha_1, \ldots,$

$\alpha_r \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_r = 1$, что для всех $T \in \mathfrak{G}$

$$\| P_W x - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i T T_i x \| < \varepsilon.$$

Так как множество унитарных операторов U_g, $g \in G$ представления $g \to U_g$, фигурирующего в (4), является группой, то из предыдущего сразу же следует существование правого среднего значения $\underset{g}{M^r}(R_g)$ у положительно определенной операторной функции R_g на G. Действительно, достаточно положить

$$\underset{g}{M^r}(R_g) = A_1^* P_V A_1, \tag{5}$$

где V — подпространство векторов, инвариантных относительно всех U_g, $g \in G$.

Множество сопряженных операторов $U_g^* = U_{g^{-1}}$, $g \in G$ также образует группу унитарных операторов в H, совпадающую с группой, образуемой операторами U_g, $g \in G$. Следовательно, $\underset{g}{M^r}(R_g)$ является также и левым средним значением функции R_g. Из (2), (3) следует единственность среднего значения $\underset{g}{M^r}(R_g) = \underset{g}{M^l}(R_g) = \underset{g}{M}(R_g)$. Свойства 1 — 6 среднего значения непосредственно следуют из (2), (3) и (5). Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств группы G и m — мера, определенная на $\mathfrak{B}$. Операторную функцию R_g, $g \in G$ называют $\mathfrak{B}$-слабо измеримой, если при каждом $x \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$-значная функция $R_g x$ является слабо измеримой функцией на G.

Пусть теперь $\varphi(g)$ — произвольная функция из $L_1(G, \mathfrak{B}, m)$. Если R_g—слабо измеримая операторная функция на G, то $\varphi(g) R_g$ будет слабо измеримой операторной функцией на G. Если R_g, $g \in G$ положительно определенная, то комплекснозначная функция $(\varphi(g) R_g x, y)$ на G принадлежит $L_1(G, \mathfrak{B}, m)$ при любых x, $y \in \mathfrak{H}$. Действительно,

$$\int_G |(\varphi(g) R_g x, y)| \, m(dg) \leqslant \|R_e\| \, \|x\| \, \|y\| \int_G |\varphi(g)| \, m(dg). \tag{6}$$

Следовательно, для любого $E\in\mathfrak{B}$ и любого $x\in\mathfrak{H}$ найдется такой вектор $I_E(x)$, что для любого $y\in\mathfrak{H}$

$$(I_E(x),\ y)=\int\limits_G(\varphi(g)R_gx,y)\,m(dg),$$

т. е. существует интеграл Петтиса

$$\int\limits_G\varphi(g)\ (R_gx)\,m(dg)=I_E(x).$$

В силу линейности интеграла Петтиса и по неравенству (6) получим, что I_E линейный ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$

$$\|I_E\|\leqslant\|R_e\|\int\limits_G|\varphi(g)|\,m(dg).$$

Оператор I_E и будем называть интегралом от $\varphi(g)R_g$ по мере m на множестве E

$$I_E=\int\limits_E\varphi(g)\,R_g\ m(dg).$$

В работе Темпельмана [7] определялись эргодические последовательности функций на локально бикомпактной группе G. А именно, обобщенная последовательность $\{\psi_n(g),\ n\in N\}$ функций на локально бикомпактной группе G (N — некоторое направление) называется правоэргодической последовательностью, если выполняются следующие требования:

1) все функции $\psi_n(g)\in L(G,\nu)$, где ν — правая мера Хаара на G;

2) $\lim\limits_{n\in N}\int\limits_G\psi_n(g)\,\nu(dg)=1$;

3) существует такая постоянная $c>0$, что $\int\limits_G|\psi_n(g)|\,\nu(dg)<c$ для всех $n\in N$;

4) $\lim\limits_{n\in N}\int\limits_G|\psi_n(gs)-\psi_n(g)|\,\nu(dg)=0$ для любого $s\in G$.

Аналогично определяются и левоэргодические последовательности функций.

Имеет место следующая теорема, обобщающая соответствующий результат [7] для комплекснозначных положительно определенных функций на локально бикомпактной группе.

Теорема 2. Пусть локально бикомпактная группа G обладает правыми и левыми эргодическими последовательностями функций. Тогда для каждой слабо измеримой относительно σ-алгебры борелевских множеств G, операторной положительно определенной функции R_g среднее значение $\underset{g}{M}(R_g)$ этой функции может быть определено по формуле

$$\underset{g}{M}(R_g) = s\text{-}\lim_{n \in N} \int_G \psi_n(g) R_g \nu(dg) = s\text{-}\lim_{p \in P} \int_G \varphi_p(g) R_g \mu(dg),$$

где $\{\psi, n \in N\}$ и $\{\varphi, p \in P\}$ — соответственно право- и левоэргодическая обобщенные последовательности функций на G; μ — левая мера Хаара на G, а s-lim означает сильный предел в $B(\mathfrak{H})$.

Доказательство этой теоремы можно провести аналогично доказательству эргодической теоремы для однородных случайных полей на локально бикомпактных группах в [7].

Пусть теперь G — коммутативная локально бикомпактная группа. Будем обозначать через Γ группу характеров группы G, а через $\chi(g)$ характер группы G. Пусть Q векторная мера [8] со значением в некотором банаховом пространстве X, определенная на σ-алгебре борелевских множеств группы Γ и $f_Q(g)$ — «преобразование Фурье» меры Q

$$f_Q(g) = \int_\Gamma \chi(g) Q(d\chi), \tag{7}$$

где интеграл понимается в обычном смысле [8].

При нахождении среднего значения у операторной положительно определенной функции на коммутативной локально бикомпактной группе [2, 3] и в теории гармонизуемых случайных полей на группах может быть полезна такая теорема.

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_n(g)\}$ — эргодическая последовательность функций на G и $f_Q(g)$ — векторная функция, представимая в виде (7), такая, что для любой $\varphi_n(g)$ и любого характера $\chi \in \Gamma$ существует сильный интеграл

$$\int_G \chi(g^{-1}) \varphi_n(g) f_Q(g) \mu(dg),$$

где μ — мера Хаара на G. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \int_G \chi(g^{-1}) \varphi_n(g) f_Q(g) \mu(dg) = Q(\{\chi\}),$$

где $Q(\{\chi\})$ мера Q, сосредоточенная на элементе χ.

Доказательство. Так как характер $\chi(g)$ группы является положительно определенной функцией на χ, то для него существует единственное среднее значение в смысле Годмана, и это среднее значение можно определить по формуле

$$\underset{g}{M}[\chi(g)] = \lim_{n \to \infty} \int_G \chi(g) \varphi_n(g) \mu(dg).$$

Вычислим $\underset{g}{M}[\chi^{-1}(g) \chi_0(g)]$, где χ_0 — произвольный элемент группы Γ.

Так как среднее значение инвариантно относительно сдвигов, то для произвольного $s \in G$

$$\underset{g}{M}[\chi^{-1}\chi_0(sg)] = \underset{g}{M}[\chi^{-1}\chi_0(s)\chi^{-1}\chi_0(g)] = \chi^{-1}\chi_0(s)\underset{g}{M}[\chi^{-1}\chi_0(g)] =$$

$$= \underset{g}{M}[\chi^{-1}\chi_0(g)].$$

Откуда

$$\underset{g}{M}[\chi^{-1}\chi_0(g)] = I_{\{\chi\}}(\chi_0) = \begin{cases} 1, & \chi_0 = \chi \\ 0, & \chi_0 \neq \chi \end{cases}.$$

Следовательно,

$$I_{\{\chi\}}(\chi_0) = \lim_{n\to\infty} a_n(\chi^{-1}\chi_0),$$

где

$$a_n(\chi^{-1}\chi_0) = \int_G \chi^{-1}\chi_0(g)\varphi_n(g)\mu(dg).$$

Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}\left\| \int_G \chi(g^{-1})\varphi_n(g) f_Q(g)\mu(dg) - Q(\{\chi\})\right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\| \int_G \left\{\int_\Gamma \chi_0(g)\, Q(d\chi_0)\right\}\chi(g^{-1})\varphi_n(g)\mu(dg) - \int_\Gamma I_{\{\chi\}}(\chi_0)\, Q(d\chi_0)\right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\| \int_\Gamma (a_n(\chi^{-1}\chi_0) - I_{\{\chi\}}(\chi_0))\, Q(d\chi_0)\right\|$$

(о возможности изменения порядка интегрирования см., например, [9], стр. 128). Последовательность функций $a_n(\chi)$ ограничена, так как $|\chi(g)| = 1$ и $\varphi_n(g)$ — эргодическая последовательность. Отсюда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла по векторной мере, аналогичной обычной теореме Лебега [8], получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Godement R. Les fonctions de type positif et la théorie des groupes.— Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 63, 1.

2. Наймарк М. А. Положительно определенные операторные функции на коммутативной группе.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1943, 7, 237.

3. Berberian S. K. Naimark's moment theorem.— Mich. Math. J., 13, 1966, 13, 171.

4. Пономаренко А. І. До спектральної теорії нескінченновимірних однорідних у широкому розумінні випадкових полів на групах.— Вісник КДУ, сер. мат. мех., 1969, № 11, 114.

5. Birkhoff G. An ergodic theorem for general semi-groups.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1939, 25, 625.

6. Maak W. Periodizitätseigenschaften unitärer Gruppen in Hilberträumen.— Math. Scand., 1954, 2, 334.

7. Темпельман А. А. Эргодические теоремы для однородных обобщенных случайных полей и однородных случайных полей на группах.— Лит. мат. сб., 1962, 2, 195.

8. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Общая теория. ИЛ. М., 1962.

9. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей, «Наука», М., 1967.

A. I. Ponomarenko

ON THE MEAN VALUE OF POSITIVE DEFINED OPERATOR-VALUED FUNCTION ON GROUP

Summary

This paper deals with extension of Godement's mean value of positive defined function on group to operator-valued positive defined functions. Under some conditions in the case of locally compact group this mean value is presented as the limit of sequence of some integrals.

Поступила в редакцию 22.XI 1968.