Р. Я. МАЙДАНЮК, асп.
Институт математики АН УССР

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МЕР, КОТОРЫЕ СООТВЕТСТВУЮТ СЛУЧАЙНЫМ РЯДАМ

Пусть задана последовательность одинаково распределенных и независимых между собой случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с плотностью распределения $p(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) $p(x)$ — положительная функция;

б) для любого положительного числа γ существуют отличные от нуля $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x-\gamma)}{p(x)}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{p(x-\gamma)}{p(x)}$;

в) существует $p'(x)$ и $p''(x)$ для всех $x\in(-\infty,\infty)$;

г) $\frac{p'(x)}{p(x)}$, $\frac{p''(x)}{p(x)}$ — ограниченные функции на $(-\infty,\infty)$.

Выберем в гильбертовом пространстве H базис $\{e_k\}$.

Пусть набор действительных чисел $\lambda_k \geqslant 0$ таков, что обеспечивает принадлежность $\eta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k e_k$ пространству H (для устойчивых распределений величин $\{\xi_k\}$ мы укажем условия, которым должны удовлетворять λ_k, чтобы $\eta \in H$). Предположим, что μ — это мера на H, которая естественным образом порождается элементом η.

Нас будут интересовать условия абсолютной непрерывности меры μ при сдвигах.

Обозначим через μ_a — меру на H, порождаемую элементом $\eta_a = \eta + a$. Предположим, что a допускает следующее представление:

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Для абсолютной непрерывности меры μ_a относительно меры μ необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} < \infty$.

Доказательство теоремы будем основывать на общем методе, который применяется в этих случаях. Пусть $\mu^{(n)}$ — мера на $H^{(n)}$ (на подпространстве, натянутом на $e_1, e_2, \ldots, e_n$), которую порождает элемент $\eta^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k e_k$; $\mu_a^{(n)}$ — мера на $H^{(n)}$, порождаемая элементом $\eta_a^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \left(\xi_k + \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right) e_k$, а $\nu^{(n)}$ и $\nu_a^{(n)}$ — меры на $R^{(n)}$, получающиеся при естественном отображении $H^{(n)}$ на $R^{(n)}$ соответственно мер $\mu^{(n)}$ и $\mu_a^{(n)}$. Известно, что меры $\nu^{(n)}$ и $\nu_a^{(n)}$ будут абсолютно непрерывны относительно меры Лебега на $R^{(n)}$ и плотности этих мер относительно меры Лебега будут иметь следующий вид:

$$t_a(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \prod_{k=1}^{n} p\left(u_k - \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right),$$

$$t(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \prod_{k=1}^{n} p(u_k), \quad (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in R^{(n)}.$$

Следовательно, $\mu_a^{(n)}$ будет абсолютно непрерывна относительно меры μ и

$$\varrho_n(\eta_{(\cdot)}^{(n)}) = \frac{d\mu_a^{(n)}}{d\mu^{(n)}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{p\left(\xi_k - \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)}{p(\xi_k)}.$$

Необходимость. Предположим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} = \infty$. Из леммы 3. 1. [1] следует, что ϱ_n имеет предел при $n \to \infty$, совпадающий с

$$\varrho = \frac{d\mu_a}{d\mu} = \prod_{k=1}^{n} \frac{p\left(\xi_k - \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)}{p(\xi_k)}, \tag{1}$$

который будет конечным и почти всюду не равным нулю.

Из сходимости произведения (1) следует, что с вероятностью единица

$$\frac{p\left(\xi_k - \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)}{p(\xi_k)} \to 1.$$

Покажем, что в нашем случае $\frac{\alpha_k}{\lambda_k} \to 0$. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма. Если последовательность чисел $\{\alpha'_k\}$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{f(x-\alpha'_k)}{f(x)} \to 1, \qquad (a^*)$$

где $f(x) > 0$ — непрерывная функция, являющаяся плотностью распределения некоторой случайной величины, то она имеет одну единственную предельную точку $\alpha = 0$.

Доказательство. Заметим, что последовательность $\{\alpha'_k\}$ ограничена, ибо в противном случае для x, принадлежащих любому конечному интервалу. соотношение (a*) выполняться не будет, так как $f(x)$ является плотностью распределения. Поэтому из нашей последовательности $\{\alpha'_k\}$ можем выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha'_{k_n}\}$, которая сходится к некоторой предельной точке α. Из того, что функция $\frac{f(x-\alpha_{k_n})}{f(x)}$ является непрерывной, следует

$$\frac{f(x-\alpha'_{k_n})}{f(x)} \to \frac{f(x-\alpha)}{f(x)} \qquad (2)$$

для $x \in (-\infty, \infty)$. Поскольку $f(x)$ непериодическая функция, то из соотношения (2) следует $\alpha = 0$. Отсюда заключаем, что наша последовательность $\{\alpha'_k\}$ имеет единственную предельную точку $\alpha = 0$. Лемма доказана.

Так как произведение (1) сходится, то с вероятностью единица сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{p\left(\xi_k - \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)}{p(\xi_k)}. \qquad (3)$$

Разложим числитель дроби под знаком логарифма в выражении (3) в ряд Тейлора по степеням $\frac{\alpha_k}{\lambda_k}$. Тогда (3) перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{p\left(\xi_k - \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)}{p(\xi_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left[1 + \left(-\frac{\alpha_k}{\lambda_k}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} + \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\Psi\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right)\right)\right],$$

где $\frac{\alpha_k}{\lambda_k}\Psi\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right)$ обозначает остаточный член в разложении, поделенный на $p(\xi_k)$.

Заметим, что при $k \to \infty$ $\Psi\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right)$ имеет тот же порядок, что и $\frac{\alpha_k}{\lambda_k}$.

В силу условий а) и б), наложенных на плотность распределения $p(x)$, функция

$$\Phi\left(x, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right) = \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\left(-\frac{p'(x)}{p(x)} + \Psi\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, x\right)\right) = \frac{\alpha_k}{\lambda_k} G\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, x\right)$$

ограничена для всех $x \in (-\infty, \infty)$ при каждом $\frac{\alpha_k}{\lambda_k}$. Тогда, разлагая $\ln\left(1 + \Phi\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)\right)$ по степеням $\Phi\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left[1 + \Phi\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right) - \frac{\Phi^2\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)}{2} + \ldots\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right),$$

где $\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, x\right) = \left[G\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, x\right) - \frac{\alpha_k G^2\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, x\right)}{\lambda_k \cdot 2} + \ldots\right]$ — ограниченная функция при каждом $\frac{\alpha_k}{\lambda_k}$ и $\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, x\right) \to \frac{p'(x)}{p(x)}$.

Так как члены ряда (3) независимые случайные величины, то в силу условий теоремы 2 ([2], § 4, гл. 1) из сходимости ряда (3) вытекает сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right).$$

Выбрав N таким, что по крайней мере для $k \geqslant N$

$$\left|\frac{p'(x)}{p(x)}\right| \neq \left|\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, x\right) + \frac{p'(x)}{p(x)}\right|,$$

получим следующее неравенство, которое дает нам противоречие:

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2} \mathbf{D}\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right) \geqslant c \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2},$$

где $c > 0$ — наименьшее число из последовательности

$$c_n = \mathbf{D}\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right) > 0, \qquad n \geqslant N.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2} < \infty$. Покажем, что в этом случае бесконечные произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{p\left(\xi_k - \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)}{p(\xi_k)}, \tag{4}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{p(\xi_k)}{p\left(\xi_k + \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)} \tag{5}$$

сходятся с вероятностью единица. Этим самым в силу условий теоремы 3.2 и замечания 3.2 [1] мы докажем достаточность условий теоремы.

Рассмотрим произведение (4). Его сходимость эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right), \tag{6}$$

где $\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, x\right)$ — та же функция, что и в доказательстве необходимости.

В силу условий теоремы 1 ([2], § 1, гл. 2) ряд (6) будет сходиться с вероятностью единица, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\frac{\alpha_k}{\lambda_k}\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\left[-\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} + \frac{\alpha_k}{2\lambda_k}\frac{p''(\xi_k)}{p(\xi_k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\Phi_1\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2}\Phi_1\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right) \leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}\frac{\alpha_k}{\lambda_k}\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2}\mathbf{D}\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right) \leqslant c_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2} < \infty,$$

где $\Phi_1\left(x, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)$ — ограниченная функция на всей действительной оси при каждом $\frac{\alpha_k}{\lambda_k}$,

$$c = \max_k \left| M\Phi_1\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)\right|, \qquad c_1 = \max_k D\Theta\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right).$$

Сходимость произведения (5) эквивалентна сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{p(\xi_k)}{p\left(\xi_k + \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)}$, который перепишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{p(\xi_k)}{p\left(\xi_k + \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha_k}{\lambda_k} G_1\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right)\right)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left[1 + \left(-\frac{\alpha_k}{\lambda_k} G_1\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right) + \frac{\alpha_k^2}{2\lambda_k^2} G_1^2\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \xi_k\right) - \ldots\right]\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{\alpha_k}{\lambda_k}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} - \frac{\alpha_k^2}{2\lambda_k^2}\frac{p''(\xi_k)}{p(\xi_k)} + \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k} T\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)\right], \tag{7}$$

где $G_1\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k}, x\right) = \left[\frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{\alpha_k}{2\lambda_k}\frac{p''(x)}{p(x)} + \Psi_1\left(x, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)\right]$, $T\left(x, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)$—ограниченные функции для всех $x \in (-\infty, \infty)$ и при каждом $\frac{\alpha_k}{\lambda_k}$.

В силу условий теоремы 1 ([2], § 4, гл. 1) ряд будет сходиться с вероятностью единица, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left[-\frac{\alpha_k}{\lambda_k}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} - \frac{\alpha_k^2}{2\lambda_k^2}\frac{p''(\xi_k)}{p(\xi_k)} + \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2} T\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2} MT\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right) \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D\, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\left[-\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} - \frac{\alpha_k}{2\lambda_k}\frac{p''(\xi_k)}{p(\xi_k)} + \frac{\alpha_k}{\lambda_k} T\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2} \mathrm{D}N\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right) \leqslant c_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k^2} < \infty,$$

где

$$c_2 = \max_k \left| \mathrm{M}T\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right) \right|, \qquad c_3 = \max_k \mathrm{D}N\left(\xi_k, \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right).$$

Достаточность, а тем самым и теорема доказана.

Пусть случайные величины $\{\xi_k\}$ имеют устойчивое распределение, т. е. логарифмы характеристической функции имеют вид

$$\log f(u) = iau - b|u|^{\delta} \left\{1 + c\frac{u}{|u|} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \delta\right\}$$

либо

$$\log f(u) = iau - b|u| \left\{1 + ic\frac{u}{|u|} \frac{2}{\pi} \log|u|\right\},$$

где $a \leq 0$, $b \geqslant 0$, $c \leqslant 1$, $\delta \in (0, 1) \cup (1,2]$.

В дальнейшем из наших рассмотрений исключим нормальный и единичный законы распределения.

Тогда для абсолютной непрерывности меры ν_a, соответствующей элементу $\eta_a = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\xi_k + \frac{\alpha_k}{\lambda_k}\right) e_k$, относительно ν, соответствующей элементу $\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k e_k$, справедливы условия теоремы 1.

Перейдем к нахождению условий, при которых $\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k e_k$ является элементом пространства H.

Теорема 2. Пусть одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \xi_2 \ldots$ имеют устойчивое распределение с характеристическим показателем δ. Тогда для того, чтобы $\eta \in H$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\delta} < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что элемент η будет принадлежать пространству H тогда и только тогда, когда с вероятностью единица сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \xi_k^2. \tag{8}$$

Достаточность. Согласно теореме Колмогорова о трех рядах, необходимыми и достаточными условиями сходимости с вероятностью единица ряда (8) являются следующие:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{M}\,[\lambda_k^2 \xi_k^2]_c < \infty, \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\,\{\lambda_k^2 \xi_k^2 > c\} < \infty \tag{10}$$

для любого $c > 0$, где $[\lambda_k^2 \xi_k^2]_c$ обозначает величину, равную $\lambda_k^2 \xi_k^2$, если $\lambda_k^2 \xi_k^2 \leqslant c$, и равную нулю, если $\lambda_k^2 \xi_k^2 > c$.

Перепишем (9) следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{M}\,[\lambda_k^2 \xi_k^2]_c = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^{\sqrt{c}/\lambda_k} x^2 [p(x) + p(-x)]\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_N^{\sqrt{c}/\lambda_k} x^2 [p(x) + p(-x)]\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^N x^2 [p(x) + p(-x)]\,dx,$$

где N — достаточно большое число.

Так как $p(x)$ — плотность устойчивого распределения, то

$$\int_N^{\sqrt{c}/\lambda_k} x^2 [p(x) + p(-x)]\,dx \approx \left(\frac{\sqrt{c}}{\lambda_k}\right)^{-\delta+2}.$$

Следовательно, ряд (9) будет сходиться вместе с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\delta}$.

Проверим выполнимость условия (10). Для устойчивых распределений имеет место соотношение

$$\lim_{x \to \infty} x^{\delta} (1 - F(x) + F(-x)) = \mathrm{const} \neq 0,$$

где $F(x)$ — функция распределения величин $\{\xi_k\}$.

Приняв это во внимание, делаем вывод, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\,\{\lambda_k^2 \xi_k^2 > c\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - F\left(\frac{\sqrt{c}}{\lambda_k}\right) + F\left(-\frac{\sqrt{c}}{\lambda_k}\right)\right]$$

будет сходиться вместе с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\delta}$.

Достаточность доказана. Необходимость условий теоремы очевидна. Теорема доказана.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность научному руководителю А. В. Скороходу за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. О плотностях вероятностных мер.— УМН, 21, вып. 6, 1966.
2. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М., «Наука», 1964.

R. Ya. Maydanyuk

THE ABSOLUTE CONTINUITY FOR THE SIMPLEST TRANSFORMATIONS OF MEASURES, WHICH CORRESPOND TO RANDOM SERIES

Summary

The measures in the Hilbert space are considered. These measures define the distributions of random variables with the value in Hilbert space. Some statements about the absolute continuity of such measures are contained.

Поступила в редакцию 3.XII 1968.