И. Ш. ИБРАМХАЛИЛОВ, доц.
*Бакинский институт народного хозяйства*

# К ТЕОРИИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

I. Пусть $\xi_i$, $i=\overline{1,n}$ независимые наблюдения над случайной величиной с функцией распределения $F(x,\theta)$, где $\theta \in R^1$—неизвестный параметр, а $R^s$ $(s=1, 2, \ldots)$ — эвклидово пространство. Обозначим оценки параметра $\theta$ через $\theta_n(\xi)$.

В работе [4] доказывается, что корень уравнения

$$U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \theta) = 0 \qquad (1)$$

является состоятельной и асимптотически нормальной оценкой параметра $\theta$.

Относительно функции $\varphi(x, \theta)$ предполагается, что для всякого $\theta \in R^1$:

1) $M_\theta \{\varphi(\xi, \theta)\} = 0$;

2) $\varphi(x, \theta) \in L_2(F)$;

3) Почти для всех $x \in R^1$ существуют производные $\varphi'_\theta(x, \theta)$ и $\varphi''_{\theta^2}(x, \theta)$;

4) $-\infty < \int \varphi'_\theta(x, \theta)\, dF(x, \theta) < 0$;

5) Существует такая функция $g(x)$, что $\varphi''_{\theta^2}(x, \theta) < g(x)$ и $\int g(x)\, dF(x, \theta) < M_1 < \infty$.

В некоторых случаях корень уравнения (1) является состоятельной и асимптотически нормальной оценкой параметра, хотя не все условия 1—5 выполняются. Например, рассмотрим выборку с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, \quad \text{где } \theta \in (0, \infty).$$

Полагая $\varphi(x, \theta) = \frac{f'_\theta(x, \theta)}{f(x, \theta)}$, получаем $\varphi''_{\theta^2}(x, \theta) = -\frac{1}{\theta^3} + \frac{3x^2}{\theta^4}$.

Очевидно, что $\varphi''_{\theta^2}(x, \theta) \to \infty$ при $\theta \to 0$, следовательно, условие 5 не выполняется, а оценка $\theta_n(\xi)$ обладает асимптотически эффективными свойствами.

II. Асимптотические свойства корня уравнения (1). Заменяя одно из предыдущих условий на более слабое условие, покажем состоятельность и асимптотическую нормальность корня уравнения (1).

**Теорема 1.** Предположим, что: а) условия 1, 3, 4 имеют место; б) для любого $\theta \in R^1$ существует дважды дифференцируемая функция $f_1(\theta) > 0$ и такая функция $g(x)$, что

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}[f_1(\theta)\varphi(x, \theta)]\right| < g(x) \quad \text{и} \quad \int g(x)\,dF(x, \theta) < \infty.$$

Тогда для уравнения (1) существует корень, являющийся состоятельной оценкой параметра $\theta$.

*Замечание* 1. Очевидно, что условие б) эквивалентно условию 5 при $f_1(\theta) = 1$.

Доказательство. Разложив функцию $f(x, \theta) = f_1(\theta)\varphi(x, \theta)$ в ряд Тейлора относительно неизвестного истинного значения параметра $\theta_0$, уравнение (1) можно написать в следующем виде:

$$T_0 + T_1(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)T_2(\theta) = 0, \tag{2}$$

где

$$T_0 = \frac{1}{n} f_1(\theta_0) \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \theta_0),$$

$$T_1 = \frac{1}{n}\left[f'_{1,\theta}(\theta_0)\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i, \theta_0) + f_1(\theta_0)\sum_{i=1}^{n}\varphi'_\theta(\xi_i, \theta_0)\right],$$

$$T_2(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha(\xi_i, \theta, \theta_0)\,G(\xi_i).$$

В силу условия б) $|\alpha(x, \theta, \theta_0)| < 1$. Очевидно, что $T_0$ сходится по вероятности к нулю по теореме Хинчина и Слуцкого [2]. Обозначим $-M_\theta\{\varphi'_\theta(\xi, \theta)\} = A$. Величины $T_1$ и $T_2(\theta)$ сходятся по вероятности соответственно к величинам $-f_1(\theta_0)A$ и $\int\alpha(x, \theta, \theta_0) \times G(x)\,dF(x, \theta_0)$. Очевидно, что по условию б)

$$\left|\int \alpha(x, \theta, \theta_0)\,G(x)\,dF(x, \theta_0)\right| < M < \infty.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, тогда можно найти такое число $n_1 = n_1(\varepsilon, \delta)$, что для любого $n > n_1$

$$\mathbf{P}\{|T_0| \geqslant \delta^2\} < \frac{1}{3}\varepsilon,$$

$$\mathbf{P}\{2T_1 \geqslant -f_1(\theta_0)A\} < \frac{1}{3}\varepsilon,$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{2}|T_2(\theta)| \geqslant M\right\} < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Обозначим

$$Q = \{\bar{\xi} : |T_0| < \delta^2,\ 2T_1 < -f_1(\theta_0)A,\ |T_2(\theta)| < 2M\}.$$

Очевидно, что $\mathbf{P}\{Q\} \geqslant 1 - \varepsilon$ при $n > n_1$. Поскольку $\delta > 0$ и достаточно мало, то $\theta_0 \pm \delta \in \Theta \subset R^1$. Имеем

$$U(\bar{\xi}, \theta_0 \pm \delta) = \frac{1}{f_1(\theta_0 \pm \delta)}\left[T_0 \pm \delta T_1 + \frac{1}{2}\delta^2 T_2(\theta)\right].$$

Для всякого $\bar{\xi} \in Q$

$$|2T_0 + \delta^2 T_2(\theta)| < 2\delta^2(1 + M).$$

Возьмем

$$2\delta(1 + M) < f_1(\theta_0)A,$$

$$|\pm \delta T_1| > \frac{1}{2} f_1(\theta_0)A\delta > \delta^2(1 + M).$$

Это показывает, что знак $U(\bar{\xi}, \theta)$ определяется знаком $\delta$, т. е. $U(\bar{\xi}, \theta) > 0$, если $\theta = \theta_0 - \delta$, и $U(\bar{\xi}, \theta) < 0$, если $\theta = \theta_0 + \delta$.

Следовательно, для всех $n > n_1$ имеем

$$\mathbf{P}\{|\theta_n(\xi) - \theta_0| < \delta\} > 1 - \varepsilon,$$

когда для всех $n$ $\theta_n(\xi)$ достоверно существует.

Если для некоторого значения $n$ имеется вероятность $p_n = \mathbf{P}\{\theta_n(\xi)$ не существует$\} > 0$, то при условии, что $p_n < 1$, рассмотрим случайную величину $t_n(\xi)$, которая имеет функцию распределения

$$\mathbf{P}\{t_n(\xi) \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\theta_n(\xi) \leqslant x \mid \theta_n(\xi) \text{ существует}\} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{\theta_n(\xi) \text{ существует и } \theta_n(\xi) \leqslant x\}}{1 - p_n}$$

и $t_n(\xi) = \theta_n(\xi)$, если $p_n = 0$.

Для всех $n > n_1$ $\mathbf{P}\{Q_n(\xi)$ существует$\} > 1 - \varepsilon$. Это означает, что для всех $n > n_1$ $p_n < \varepsilon$, тогда

$$\mathbf{P}\{|t_n(\xi) - \theta_0| < \delta\} = \frac{\mathbf{P}\{\theta_n(\xi) \text{ существует}, |\theta_n(\xi) - \theta_0| < \delta\}}{1 - p_n} >$$

$$> \frac{1-\varepsilon}{1-p_n} > 1 - \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает асимптотическую нормальность корня уравнения (1).

**Теорема 2**. Пусть условие 2 и условия теоремы 1 имеют место. Тогда корень уравнения (1) будет асимптотически нормальной оценкой параметра $\theta$.

Доказательство. Поскольку $\theta_n(\xi)$ есть состоятельная оценка, вместо (2) можно писать

$$\frac{\sqrt{n}\,A}{\sqrt{\sigma}}[\theta_n(\xi) - \theta_0] = \frac{\eta_n^{(1)}}{\eta_n^{(2)}}, \tag{3}$$

где

$$\eta_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma n}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \theta_0),$$

$$\eta_n^{(2)} = -\frac{T_1}{f_1(\theta_0)A} - \frac{\eta_n^{(3)}}{2f_1(\theta_0)A},$$

$$\eta_n^{(3)} = [\theta_n(\xi) - \theta_0]\,T_2[\theta_n(\xi)],$$

$$\int \varphi^2(x, \theta_0)\,dF(x, \theta_0) = \sigma.$$

Очевидно, что

$$|T_2[\theta_n(\xi)]| < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G(\xi_i).$$

Следовательно,

$$|\eta_n^{(3)}| < |\theta_n(\xi) - \theta_0|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G(\xi_i).$$

Из условия б) и теоремы Хинчина [2] следует, что $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} G(\xi_i)$ ограничено по вероятности числом $M$ при $n \to \infty$. По теореме Слуцкого

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\eta_n^{(3)}| > \delta\} = 0.$$

Следовательно, $\frac{\eta_n^{(3)}}{2f_1(\theta_0)A}$ сходится по вероятности к нулю. Очевидно, что $\eta_n^{(1)}$ асимптотически нормально со средним значением нуль и дисперсией 1, $\eta_n^{(2)}$ сходится по вероятности к единице. Следовательно, из (3) вытекает, что $\sqrt{n}A(\sqrt{\sigma})^{-1}[\theta_n(\xi)-\theta_0]$ асимптотически нормально $N(0, 1)$. Дальнейшее очевидно.

*Замечание 2.* Если $F(x,\theta)$ принадлежит непрерывному типу, то $\sqrt{n}[\theta_n(\xi)-\theta_0]$ асимптотически эффективна в строгом смысле [3]. Это вытекает, если брать $\varphi(x,\theta)=\frac{\partial \ln F'_x(x,\theta)}{\partial\theta}$.

**III.** В дальнейшем покажем, что можно не предполагать существование производной второго порядка для функции $\varphi(x, \theta)$ по $\theta$. В этом случае, вводя условия, альтернативные условиям 1—5, получаем, что для уравнения (1) существует корень, являющийся состоятельной и асимптотически нормальной оценкой параметра $\theta$. Это устанавливается теоремами 3 и 4.

**Теорема 3.** Предположим: а) условие 1 имеет место; б) почти для всех $x\in R^1$ функция $\varphi(x,\theta)$ по $\theta$ непрерывна; в) существует функция $f_2(\theta)>0$ такая, что для всякой $\theta_1,\theta_2\in R^1$, удовлетворяющей $0<|\theta_1-\theta_2|\leqslant f_2(\theta_2)$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{\theta_1-\theta_2}\int\varphi(x,\theta_1)\,dF(x,\theta_2)<0.$$

Тогда для уравнения (1) существует корень, являющийся состоятельной оценкой параметра $\theta$.

Доказательство. Достаточно малое $\delta>0$ выберем так, что $\delta=|\theta-\theta_0|$ и $\delta\leqslant f_2(\theta_2)$, где $\theta_1,\theta_2\in R^1$. Обозначим

$$U_1(\bar{\xi},\theta)=\frac{1}{n}U(\xi,\theta).$$

Рассмотрим $U_1(\bar{\xi},\theta)$ при $\theta=\theta_0\pm\delta$. Очевидно, что $U_1(\bar{\xi},\theta)$ будет сходиться по вероятности к $\int\varphi(x,\theta_0\pm\delta)\,dF(x,\theta_0)$ при $n\to\infty$. Следовательно,

$$\int\varphi(x,\theta_0+\delta)\,dF(x,\theta_0)<0$$

и

$$\int\varphi(x,\theta_0-\delta)\,dF(x,\theta_0)>0.$$

Обозначим

$$S_n=\{\bar{\xi}:U_1(\bar{\xi},\theta)\leqslant 0,\qquad \theta=\theta_0-\delta\in R^1\},$$

$$S_n^1=\{\bar{\xi}:U_1(\bar{\xi},\theta)\geqslant 0,\qquad \theta=\theta_0+\delta\in R^1\}.$$

Если возьмем малое $\varepsilon > 0$, то существует число $n_2 = n_2(\varepsilon, \delta)$ такое, что при $n > n_2$

$$\mathbf{P}\{S_n\} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \mathbf{P}\{S_n'\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при $n > n_2$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i, \theta_0 - \delta) \leqslant 0\right\} < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i, \theta_0 + \delta) \geqslant 0\right\} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Тогда очевидно, что $P\{S_n, S_n'\} > 1 - \varepsilon$. Применение условия 2 заканчивает доказательство теоремы 3.

*Замечание 3*. Случай, когда для некоторых $n$

$$p_n = \mathbf{P}\{\theta_n(\xi) \text{ не существует}\} > 0,$$

можно исследовать точно так же, как в доказательстве теоремы 1.

**Теорема 4**. Предположим, что: а) условия а) и в) теоремы 3 имеют место; б) для любого $\theta \in R^1$ и почти для всех $x \in R^1$ существует $\varphi_\theta'(X, \theta)$; в) условия 2 и 4 имеют место; г) для всякого $\theta \in R^1$ существует дифференцируемая функция $f_3(\theta) > 0$, так что $\frac{\partial}{\partial\theta}[f_3(\theta)\varphi(x, \theta)]$ равномерно непрерывна по $x$. Тогда уровень уравнения (1) будет асимптотически нормальной оценкой $\theta$.

Доказательство. Будем использовать некоторые идеи из [1]. Согласно теореме о среднем значении напишем

$$\frac{h(\theta) - h(\theta_0)}{\theta - \theta_0} = \frac{\partial}{\partial\theta} h[\theta_0 + \gamma_i(\theta - \theta_0)],$$

где $\gamma_i = \gamma_i(\theta_0, \theta, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $0 < \gamma_i < 1$.

Обозначим $h(\theta) = f_3(\theta)\varphi(x, \theta)$. Тогда (1) можно написать так:

$$B_0 + B_1(\theta)(\theta - \theta_0) = 0, \tag{4}$$

где

$$B_0 = f_3(\theta_0)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i, \theta_0),$$

$$B_1(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}[f_3(\theta)\varphi(\xi_i, \theta)]\right)_{\theta=\theta_0+\gamma_i(\theta-\theta_0)}.$$

Асимптотические свойства $B_0$ нам известны. Вместо $\theta$ в (4) напишем $\theta_n(\xi)$. Из условия г) вытекает, что для данного малого $\delta > 0$ существует такое число $\eta(\delta, \theta_0)$, что при $|\theta - \theta_0| < \eta(\delta, \theta_0)$

$$\left| \frac{\partial}{\partial\theta} [f_3(\theta)\,\varphi(x, \theta)] - \left( \frac{\partial}{\partial\theta} [f_3(\theta)\,\varphi(x, \theta)] \right)_{\theta=\theta_0} \right| < \delta.$$

Следовательно,

$$\left| B_1[\theta_n(\xi)] - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} [f_3(\theta)\,\varphi(\xi_i, \theta)] \right)_{\theta=\theta_0} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \left( \frac{\partial}{\partial\theta} [f_3(\theta)\,\varphi(\xi_i, \theta)] \right)_{\theta=\theta_0+\gamma_i(\theta_n(\xi)-\theta_0)} - \right.$$

$$\left. - \left( \frac{\partial}{\partial\theta} [f_3(\theta)\,\varphi(\xi_i, \theta)] \right)_{\theta=\theta_0} \right| \leqslant \delta,$$

если $|\theta_n(\xi) - \theta_0| < \eta$.

С учетом сходимости $\theta_n(\xi)$ по вероятности к $\theta_0$, если имеется малое $\varepsilon > 0$, можно найти такое $n_3 = n_3(\varepsilon, \delta)$, что при $n > n_3$

$$P\{|\theta_n(\xi) - \theta_0| < \eta\} > 1 - \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} P\{|B_1[\theta_n(\xi)] - B_n| < \delta\} > 1 - \varepsilon,$$

где

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} [f_3(\theta)\,\varphi(\xi_i, \theta)] \right)_{\theta=\theta_0},$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n = -f_3(\theta_0) \int \varphi'_\theta(x, \theta_0)\, dF(x, \theta_0) = m(\theta_0).$$

Так как по теореме Слуцкого [2] сумма двух случайных величин сходится по вероятности к сумме предельных значений, $B_1[\theta_n(\xi)]$ сходится по вероятности к $m(\theta_0)$.

Для завершения доказательства асимптотической нормальности достаточно повторить доказательство теоремы 2.

**IV.** Следующие теоремы являются некоторым обобщением результатов, изложенных в пунктах I — III.

**Теорема 5.** Пусть функция $\psi(\bar{x}, \theta)$, $\bar{x} \in R^k$ такая, что для любого $\theta \in R^1$ $M_\theta\{\psi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}, \theta)\} = 0$, $\psi(\bar{x}, \theta) \in L_2^{(k)}(F)$, и существует непрерывная производная $\psi'_\theta(\bar{x}, \theta)$ такая, что

$$|\psi'_\theta(\bar{x}, \theta)| < H_1(\bar{x}) \in L_2^{(k)}(F),$$

$$-M_\theta\{\psi'_\theta(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}, \theta)\} \neq 0.$$

Если для всякого $\theta \in R^1$ существует дважды дифференцируемая функция $f_4(\theta) > 0$ и функция $H_2(\bar{x}) \in L_2^{(k)}(F)$ такая, что

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} [f_4(\theta)\, \psi(\bar{x}, \theta)] \right| < H_2(\bar{x}),$$

то корень $\theta_n(\xi)$ уравнения

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \Phi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}, \theta) = 0, \tag{5}$$

где

$$\Phi(\bar{x}, \theta) = f_4(\theta)\, \psi(\bar{x}, \theta)$$

существует, и этот корень является состоятельной и асимптотически нормальной оценкой параметра $\theta$.

Доказательство. Разлагая функции $\Phi(\bar{x}, \theta)$ в ряд Тейлора, уравнение (5) можно написать в следующем виде:

$$C_0 + C_1(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)\, C_2(\theta) = 0, \tag{6}$$

где

$$C_0 = f_4(\theta_0)\, \eta_1(\bar{\xi}, \theta_0),$$

$$C_1 = f'_{4,\theta}(\theta_0)\, \eta_1(\bar{\xi}, \theta_0) + f_4(\theta_0)\, \eta_2(\bar{\xi}, \theta_0),$$

$$C_2(\theta) = \frac{1}{n^k} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \beta(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}, \theta, \theta_0)\, H_2(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}),$$

$$\eta_1(\bar{\xi}, \theta_0) = \frac{1}{n^k} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \psi(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}, \theta_0),$$

$$\eta_2(\bar{\xi}, \theta_0) = \frac{1}{n^k} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \psi'_\theta(\bar{\xi}_{i_1}, \ldots, \bar{\xi}_{i_k}, \theta_0),$$

$$|\beta(x_1, x_2, \ldots x_k, \theta, \theta_0| < 1.$$

Используя методику, предложенную в [4, 5], получим, что при $n \to \infty$

$$\eta_1(\bar{\xi}, \theta_0) \to 0,$$

$$\eta_2(\bar{\xi}, \theta_0) \to -\int \cdots \int \psi'_\theta(\bar{x}, \theta_0) \prod_{i=1}^{k} dF(x_i, \theta_0)$$

(сходимость по вероятности). Следовательно, при $n \to \infty$

$$C_0 \to 0,$$

$$C_1 \to -f_4(\theta_0) \int \dots \int \psi'_\theta(\bar{x}, \theta_0) \prod_{i=1}^{k} dF(x_i, \theta_0),$$

$$C_2(\theta) \to \int \dots \int \beta(\bar{x}, \theta, \theta_0) H_2(\bar{x}) \prod_{i=1}^{k} dF(x_i, \theta)$$

(сходимость по вероятности). Очевидно что $\frac{1}{n^k} \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} H_2(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k})$ ограничено по вероятности величиной $M_\theta \{H_2(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k})\}$. Следовательно, по теореме Слуцкого [2] $(\theta - \theta_0) \frac{1}{n^k} \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} H_2(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k})$ сходится по вероятности к нулю.

Завершение доказательства состоятельности и асимптотической нормальности аналогично доказательству теорем 1 и 2.

**Теорема 6.** Для всякого $\theta \in R^1$ существует функция $\psi(\bar{x}, \theta)$, $\bar{x} \in R^k$ такая, что

$$M_\theta \{\psi(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}, \theta)\} = 0, \qquad \psi(\bar{x}, \theta) \in L_2^{(k)}(F)$$

и почти для всех $\bar{x} \in R^k$ существует $\psi'_\theta(\bar{x}, \theta)$, причем

$$|\psi'_\theta(\bar{x}, \theta)| < H_3(\bar{x}) \in L_2^{(k)}(F),$$

$$-\infty < M_\theta \{\psi'_\theta(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}, \theta_0)\} < 0.$$

Пусть функция $f_5(\theta) > 0$ такая, что для всякой пары $\theta_i \in R^1$, $i = 1, 2, \dots$, $0 < |\theta_1 - \theta_2| \leqslant f_5(\theta_2)$ и имеет место неравенство

$$\frac{1}{\theta_1 - \theta_2} \int \dots \int \psi(\bar{x}, \theta_1) \prod_{i=1}^{k} dF(x_i, \theta_2) < 0.$$

Если для всякого $\theta \in R^1$ существует дифференцируемая функция $f_6(\theta) > 0$ такая, что $\frac{\partial}{\partial \theta} [f_6(\theta) \psi(\bar{x}, \theta)]$ равномерно непрерывна по $x$, то для уравнения (5): а) существует корень $\theta_n(\xi)$; б) $\theta_n(\xi)$ — состоятельная оценка параметра $\theta$ и в) $\theta_n(\xi)$ будет асимптотически нормальной оценкой параметра $\theta$.

Доказательство этой теоремы почти совпадает с доказательствами теоремы 3 и 4 с применением методики работ [4, 5].

Я пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность проф. А. В. Скороходу за постоянное внимание к работе и полезные советы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Gurland I.— Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1954, 37, 71—76.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. ИЛ, М., 1948.
3. Kulldorff G.— Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1957, 3—4, 129—144.
4. Ибрамхалилов И. Ш.— ДАН АзССР, № 3, 1964.
5. Ибрамхалилов И. Ш.— Изв. АзССР, № 2, 1964.



**I. Sh. Ibramkhalilov**


## TO THE THEORY OF ESTIMATION OF DISTRIBUTIONS PARAMETERS


### Summary

Let us assume $\xi_i, i = 1, \ldots, n$ are independent observations of a random variable with the function of distribution $F(x, \theta)$. It' s proved that under general conditions for functions $\varphi(x, \theta)$ and $\Phi(x, \theta), x \in R^k$ the root of equation $U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \theta) = 0$ and equation $\sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} \Phi(\xi_{i_1} \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}, \theta) = 0$ exists, and this root is a consistent and asymptotically normal estimation of unknown $\theta$.



Поступила в редакцию 15.XI 1968.