

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
механіко-математичний факультет**

**ПРОГРАМА**

з основних нормативних курсів для комплексного державного іспиту зі статистики  
освітнього рівня “магістр”  
(магістерська програма “прикладна та теоретична статистика”)  
2017/2018 навчальний рік

**А.Студент повинен формулювати та активно володіти поняттями**

**Теорія ймовірностей**

1. Основні поняття та аксіоми теорії ймовірностей.
2. Умовні ймовірності, формули повної ймовірності та Байеса, незалежність випадкових подій і величин.
3. Випадкові величини, математичне сподівання та дисперсія, їхні властивості.
4. Функція розподілу та щільність випадкової величини, сумісний розподіл. Стандартні ймовірнісні розподіли.
5. Закон великих чисел.
6. Центральна гранична теорема.
7. Умовне математичне сподівання.

**Математична статистика**

1. Статистики, оцінки та їх властивості. Емпірична функція розподілу. Варіаційний ряд, розподіл порядкових та рангових статистик.
2. Оцінки методу моментів, оцінки максимальної вірогідності.
3. Інтервальні оцінки, побудова довірчих інтервалів.
4. Перевірка статистичних гіпотез.
5. Метод найменших квадратів в регресійному аналізі.

**Вибіркові обстеження**

1. Простий випадковий, систематичний та стратифікований відбори.
2. Одноступінчатий кластерний, двоступінчатий стратифікований відбір.
3. Оцінювання по відношенню та по регресії при простому випадковому відборі. Роздільні та сумісні оцінки по відношенню та по регресії при стратифікованому відборі.

**Фінансова математика фондового ринку**

1. Моделі фінансового ринку з дискретним часом, означення портфеля та його капіталу, означення арбітражу.
2. Означення платіжного зобов'язання та основні типи платіжних зобов'язань, означення досяжного платіжного зобов'язання та породжувального портфеля, означення безарбітражної ціни.
3. Означення нейтральної до ризику та мартингальної міри, фундаментальні теореми фінансової математики.
4. Означення та характеристизацію оптимального портфеля.

## 5. Дифузійні моделі фінансового ринку, формулу та рівняння Блека-Шоулза

### Математична економіка

1. Функція попиту споживача. Слабка аксіома виявленої переваги. Компенсована за Слуцьким зміна цін. Необхідні і достатні умови виконання слабкої аксіоми виявленої переваги для функції попиту.
2. Теорія виробництва. Задача максимізації прибутку. Властивості відповідності пропозиції фірми і властивості функції прибутку.
3. Несхильність до ризику та її характеристики: непевний еквівалент лотереї, ймовірнісна премія. властивості функції корисності приймаючого рішення.

### Математичні основи захисту інформації

1. Означення симетричної та асиметричної криптосистем, основні задачі сучасної криптографії (конфіденційність, аутентифікація, цілісність, неможливість відмови від авторства)
2. Означення цифрового підпису.
3. Формулювання задачі факторизації, означення дискретного логарифма.

### Диференціальні рівняння з частинними похідними

1. Означення та властивості узагальнених похідних, просторів Соболева.
2. Постановки основних крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, означення класичних та узагальнених розв'язків крайових задач.
3. Умови існування та єдиності узагальнених розв'язків крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

### Динамічні системи

1. Основні поняття та об'єкти теорії динамічних систем.
2. Поняття про хаотичні відображення, фрактали.

### Негладкий аналіз та оптимізація

1. Основні поняття та основні положення опуклого аналізу, теореми диференційного, субдиференційного квазідиференційного та кодиференційного числення.
2. Властивості та застосування опуклих множин та опуклих функцій.
3. Методи розв'язування задач на безумовний та умовний екстремум.

### Комп'ютерна статистика

1. Головні компоненти вибірки. Метод регресії на головні компоненти для аналізу мультиколінеарних даних.
2. Оцінки методу найменших квадратів у лінійній регресійній моделі з авторегресійною залежністю між похибками.
3. Рідж-регресія.

### Непараметрична статистика

1. Цензурована вибірка. Оцінки Каплана-Мейера для функції розподілу за цензурованими даними.
2. Ядерні оцінки щільності. Умови їх консистентності.
3. Задача класифікації. Формули для ймовірності помилки. Побудова баєсового класифікатора. Емпірично-баєсів класифікатор.

### **Статистика випадкових процесів**

1. Побудова та властивості оцінки сигналу методом найменших квадратів для моделі сигнал + шум.
2. Оцінювання параметру зсуву в найпростішій моделі лінійної регресії.
3. Метод максимальної вірогідності для оцінювання параметру зсуву в стохастичному диференціальному рівнянні.
4. Задача оптимальної лінійної фільтрації.

### **Б. Студент має вміти доводити такі теореми:**

#### **Теорія ймовірностей**

1. Закон великих чисел
2. Центральна гранична теорема

#### **Математична статистика**

1. Теорема про властивості оцінок методу моментів
2. Теорема про властивості оцінок максимальної вірогідності

#### **Фінансова математика фондового ринку**

1. Перша фундаментальна теорема фінансової математики
2. Друга фундаментальна теорема фінансової математики

#### **Математична економіка**

1. Основні співвідношення порівняльної статистики.

#### **Математичні основи захисту інформації**

1. Обґрунтування коректності алгоритму RSA.
2. Обґрунтування коректності алгоритму Діффі-Хеллмана.

#### **Диференціальні рівняння з частинними похідними**

1. Теореми існування та єдиності узагальнених розв'язків крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

#### **Динамічні системи**

1. Теорема про властивість інтегральної неперервності.
2. Теорема про існування точки рівноваги в кулі.

#### **Негладкий аналіз та оптимізація**

1. Теорема Мінковського про розділення точки та множини.
2. Теореми двоїстості.

### **Комп'ютерна статистика**

1. Формула для середньоквадратичної похибки оцінок рідж-регресії.
2. Оптимальність проекції на головні компоненти.

### **Непараметрична статистика**

1. Теорема про умови консистентності ядерних оцінок щільності.
2. Межа Дьорфі для ймовірності помилки емпірично-баєсового класифікатора.

## **В. Студент має розв'язувати задачі таких типів:**

### **Теорія ймовірностей**

1. Визначати ймовірності подій та розподіли випадкових величин
2. Визначати математичне сподівання та дисперсію

### **Математична статистика**

1. Оцінювати параметри методом моментів і методом максимальної вірогідності
2. Будувати довірчі інтервали для параметрів
3. Перевіряти статистичні гіпотези про параметри розподілу, гіпотези про незалежність, відповідність

### **Вибіркові обстеження**

1. Оцінювати параметри під сукупностей при простому випадковому відборі без повернення.
2. Будувати довірчі інтервали, оцінювати дисперсію при систематичному відборі, застосовувати оцінку Хансена-Гурвіца при простому випадковому відборі з поверненням.
3. Оцінювати вектор сумарних значень характеристик генеральної сукупності, оцінювати середнє значення характеристики генеральної сукупності.

### **Фінансова математика фондового ринку**

1. Знаходити нейтральні до ризику та мартингальні ймовірності.
2. Обчислювати безарбітражні ціни платіжного зобов'язання та визначати породжувальний портфель.
3. Обчислювати оптимальне платіжне зобов'язання, визначати оптимальний портфель інвестицій.
4. Застосовувати формулу та рівняння Блека-Шоулза.

### **Математична економіка**

1. Сформулювати і розв'язати задачу максимізації корисності і задачу мінімізації витрат у теорії споживання.
2. Аналізувати зв'язки між функцією попиту, непрямою функцією корисності, компенсованою функцією попиту та функцією витрат.
3. Сформулювати і розв'язати задачу максимізації прибутку та мінімізації видатків виробництва.

## **Математичні основи захисту інформації**

1. Обчислювати дискретний логарифм у скінченній циклічній групі
2. Зашифровувати та розшифровувати повідомлення за допомогою системи RSA

## **Диференціальні рівняння з частинними похідними**

1. Зводити рівняння з частинними похідними до узагальнених та варіаційних постановок, записувати узагальнені розв'язки крайових задач для еліптичних рівнянь, застосовувати метод Рітца, записувати узагальнені розв'язки крайових задач для загального хвильового рівняння;
2. Будувати узагальнені розв'язки крайових задач для загальних хвильового рівняння, рівняння теплопровідності.

## **Динамічні системи**

1. Аналізувати поведінку динамічних систем.

## **Негладкий аналіз та оптимізація**

1. Задачі опуклого та математичного програмування, задачі теорії ігор.
2. Досліджувати на безумовний та умовний екстремум функціонали в нормованих просторах.

## **Статистика випадкових процесів**

1. Будувати оцінку сигналу методом найменших квадратів для моделі сигнал + шум.
2. Оцінювати параметр зсуву в найпростішій моделі лінійної регресії.
3. Оцінювати параметру зсуву в стохастичному диференціальному рівнянні методом максимальної вірогідності.

Програма затверджена на засіданні вченої ради механіко-математичного факультету  
Протокол №

Декан механіко-математичного факультету  
М.Ф.Городній

## Додаткова програма кафедри

### Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики “Актуарна та фінансова математика”

#### 1. Теорія ймовірностей

- 1) Класичне означення ймовірностей, дискретний ймовірнісний простір  
Геометричне означення ймовірностей, задача про зустріч, парадокс Бертрана, задача Бюффона
- 2) Перехід до границі під знаком математичного сподівання. Приклади обчислення математичного сподівання (дискретний та неперервний випадки)
- 3) Випадкові вектори, сумісна функція розподілу та щільність, породжена міра Лебега-Стілтьєса. Розподіл функцій від випадкових векторів, їх числові характеристики, дисперсія лінійної форми та коваріація лінійного перетворення
- 4) Функція розподілу та щільність суми незалежних величин. Розподіли Ерланга, гама та  $\chi^2$ -квадрат
- 5) Слабка збіжність та її властивості. Співвідношення між збіжностями слабкою та в основному. Теорема Хелі про компактність в основному. Теорема Прохорова про критерій слабкої компактності

#### 2. Математична статистика

- 1) Вибіркові моменти та їх властивості. Метод моментів, його конзистентність.
- 2) Теоретичні та емпіричні квантилі, їх асимптотичні властивості
- 3) Достатні статистики, умовний розподіл вибірки, приклади. Теорема Рао – Блекуела – Колмогорова. Повні достатні статистики та оптимальність
- 4) Спектральне зображення стаціонарного процесу.
- 5) Оптимальний лінійний прогноз у гільбертовому просторі. Спектральний розв’язок задачі лінійного прогнозу для стаціонарної послідовності

#### 3. Теорія випадкових процесів

- 1) Випадкові процеси з незалежними приростами. Характеризаційна теорема в термінах характеристичних функцій.
- 2) Теорема про побудову вінерівського процесу на скінченному інтервалі.
- 3) Теорема Дуба про випадкову зупинку мартингала.
- 4) Умови відсутності розривів другого роду у процесів з незалежними приростами.
- 5) Ергодична теорема для однорідних марковських ланцюгів.
- 6) Теорема Карунена.

#### 4. Фінансова математика фондового ринку

- 1) Перша основна теорема фінансової математики для одноперіодичної моделі.
- 2) Функція корисності та її безумовний еквівалент.
- 3) Безарбітражність ринку. Теорема про існування мартингальної міри.
- 4) Формула Блека-Шоулса для справедливої ціни Європейського опціону купівлі.
- 5) Відшукання оптимального моменту подання Американського опціону до виконання.

## Додаткова програма кафедри

### Кафедра диференціальних та інтегральних рівнянь “Математична економіка”

- 1) Експонента матриці як фундаментальна матриця ЛОС зі сталими коефіцієнтами, її властивості.
- 2) ЛОС з періодичними коефіцієнтами. Матриця монодромії. Теорема Флоке-Ляпунова.
- 3) Теорема про існування періодичного розв’язку лінійної періодичної системи.
- 4) Метод малого параметра Пуанкаре.
- 5) Коливність розв’язків лінійних однорідних рівнянь 2-го порядку. Теорема про неколивність, теорема Штурма, теорема порівняння.
- 6) Крайові задачі для лінійних рівнянь 2-го порядку. Функція Гріна.
- 7) Автономні системи, потік, рух, траєкторія, положення рівноваги, граничний цикл.
- 8)  $\omega$ -граничні множини автономних систем, їх властивості.

- 9) Магістральний підхід в динамічних макроекономічних моделях. Теорема Морішими.
- 10) Існування рівноваги в загальній моделі вальрасівського типу.
- 11) Рівновага у моделі Ерроу-Дебре
- 12) Парето-оптимальність стану рівноваги в моделі вальрасівського типу

Програма затверджена на засіданні вченої ради механіко-математичного факультету  
Протокол № 9 від 20 лютого 2017 р.

Декан механіко-математичного факультету

М.Ф.Городній