

## ПРОГРАМА

### вступного іспиту до аспірантури з освітньо-наукової програми підготовки докторів філософії за спеціальністю 112 СТАТИСТИКА

2018/2019 навчальний рік

#### А. Вступник має володіти такими поняттями

##### 1. Математичний аналіз

1. Поняття границі послідовності, границі функції в точці.
2. Неперервні та рівномірно неперервні функції. Типи розривів. Неперервність елементарних функцій.
3. Похідна та диференціал функцій однієї та кількох змінних.
4. Формула Тейлора з різними формами залишкових членів. Основні розклади.
5. Числові та функціональні ряди. Сума ряду, ознаки збіжності. Абсолютна збіжність. Рівномірна збіжність.
6. Ряд Тейлора. Основні розклади.
7. Кратні інтеграли. Формула заміни змінних у кратному інтегралі.
8. Метричні простори. Збіжність у метричних просторах.

##### 2. Теорія міри та інтеграла

1. Конструкція міри Лебега.
2. Конструкція інтеграла Лебега.
3. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

##### 3. Функціональний аналіз

1. Гільбертів простір. Ортонормовані базиси.
2. Лінійні, неперервні, обмежені оператори. Норма оператора.
3. Теорема Гана-Банаха.
4. Теорема Банаха про обернений оператор.
5. Принцип рівномірної обмеженості.
6. Компактні оператори та теореми Фредгольма.

##### 4. Лінійна алгебра

1. Матриці та дії над ними. Обернена матриця.
2. Лінійні перетворення. Ранг і дефект лінійного перетворення.
3. Визначники, їх властивості та застосування.
4. Власні числа і власні вектори лінійного оператора.
5. Жорданова нормальна форма матриці.
6. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

##### 5. Аналітична геометрія

1. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, вираз через координати векторів-співмножників.
2. Взаємне розташування кривої другого порядку та прямої.
3. Головні напрями поверхні другого порядку. Характеристичне рівняння.
4. Взаємне розміщення двох прямих у просторі (умова мимобіжності, перетину, паралельності, збігу).

## **6. Диференціальні рівняння**

1. Рівняння з відокремлюваними змінними, рівняння в повних диференціалах та їх інтегрування.
2. Задача Коші для диференціального рівняння довільного порядку та для нормальної системи диференціальних рівнянь. Теорема Пеано. Теорема Пікара.
3. Фундаментальна система розв'язків (ФСР) лінійного однорідного диференціального рівняння довільного порядку (ЛОР). Вронскіан. Фундаментальна матриця ЛОС.
4. Побудова фундаментальної системи розв'язків ЛОР зі сталими коефіцієнтами та ЛОС зі сталою матрицею.
5. Метод варіації довільних сталих розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь довільного порядку та систем диференціальних рівнянь.

## **7. Комплексний аналіз**

1. Поняття похідної комплекснозначної функції комплексної змінної, геометричний зміст модуля і аргументу похідної.
2. Основні властивості елементарних аналітичних функцій (дробово-лінійної, степеневі, показникової, логарифмічної, функції Жуковського).
3. Інтеграл від функції комплексної змінної вздовж шляху та його основні властивості.
4. Особливі точки функції комплексної змінної, поняття лишку, формули для обчислення лишків, основна теорема про лишки.

## **8. Рівняння математичної фізики**

1. Формулювання задачі Коші для хвильового рівняння і рівняння теплопровідності та їх фізичний зміст.
2. Формулювання першої мішаної крайової задачі для хвильового рівняння та її фізичний зміст.
3. Формулювання другої мішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності та її фізичний зміст.
4. Формулювання третьої зовнішньої крайової задачі для рівняння Пуассона та її фізичний зміст.
5. Поняття коректності (за Адамаром) постановки задачі математичної фізики.

## **9. Теорія ймовірностей**

1. Аксиоми теорії ймовірностей. Поняття ймовірнісного простору, ймовірнісної міри, умовної ймовірності.
2. Означення та властивості незалежних випадкових подій і величин.
3. Загальне означення випадкової величини та вектора.
4. Математичне сподівання, коваріація, дисперсія, їхні властивості.
5. Функція та щільність розподілу випадкової величини, їхні властивості.
6. Функції від випадкової величини, перетворення величин.
7. Сумісні функція та щільність розподілу, їхні властивості.
8. Стандартні ймовірнісні розподіли (біноміальний, геометричний, від'ємний біноміальний, гіпергеометричний, рівномірний, показниковий, нормальний, гамма, бета).
9. Багатовимірний нормальний розподіл, його характеристики.
10. Різні типи збіжності випадкових величин: за ймовірністю, в середньому, майже напевно, зв'язок між ними.
11. Посилений закон великих чисел Колмогорова.
12. Характеристична функція та її властивості. Слабка збіжність, критерій Леві.
13. Класична центральна гранична теорема для однаково розподілених випадкових величин. Векторна центральна гранична теорема.
14. Умовне математичне сподівання, умовний розподіл, функція регресії. Нормальна регресія.

## **10. Математична статистика**

1. Поняття статистичного простору, вибірки, оцінки, поняття незміщеності, конзистентності, асимптотичної нормальності оцінок.
2. Метод моментів, властивості оцінки методу моментів.

3. Метод максимальної вірогідності, властивості оцінок максимальної вірогідності.
4. Нерівність Крамера-Рао, ефективні оцінки, достатні статистики.
5. Інтервальні оцінки, методи їхньої побудови.
6. Розподіли  $\chi^2$ , Стюдента і Фішера-Снедекора.
7. Статистичні критерії, рівень та потужність.
8. Перевірка гіпотез про параметри нормального розподілу.
9. Непараметричні критерії узгодженості, рангові критерії.
10. Критерій  $\chi^2$ .
11. Елементи лінійної регресії. Однофакторний дисперсійний аналіз.
12. Класичний лінійний дискримінантний аналіз.

### **11. Теорія випадкових процесів**

1. Випадкові процеси з незалежними приростами. Вінерівський та пуассонівський процеси.
2. Процеси, стаціонарні у широкому та вузькому розумінні.
3. Гауссівські процеси.
4. Мартингалі. Основні властивості та приклади.
5. Марківські процеси. Генератор. Пряма та обернена теорема Колмогорова.
6. Ланцюги Маркова, перехідні ймовірності, класифікація станів, інваріантний розподіл.
7. Інтеграл Іто, формула Іто, стохастичні диференціальні рівняння.

## **Б. Вступник має розв'язувати задачі таких типів:**

### **1. Математичний аналіз**

1. Знаходити границі послідовностей та функцій.
2. Досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їхні графіки.
3. Обчислювати площу, довжину дуги, роботу, потік за допомогою інтегралів.
4. Розкладати функції в ряди Тейлора та Фур'є.

### **2. Теорія міри**

1. Обчислювати інтеграл Лебега, використовуючи його зв'язок з інтегралом Рімана.
2. Виконувати граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, застосовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність.

### **3. Функціональний аналіз**

1. Визначати лінійні неперервні функціонали в класичних лінійних нормованих просторах. Обчислювати норми лінійних неперервних функціоналів.
2. Визначати лінійні неперервні оператори. Обчислювати норми. Досліджувати збіжність операторів.
3. Знаходити спектр лінійного неперервного оператора. Спектр компактного оператора.
4. Розв'язувати інтегральні рівняння, застосовувати теореми Фредгольма.

### **4. Лінійна алгебра**

1. Знаходити найбільший спільний дільник двох многочленів.
2. Знаходити обернену матрицю.
3. Знаходити базу суми і перетину лінійних підпросторів
4. Зводити квадратичну форму до канонічного вигляду.
5. Знаходити ортонормовану базу в евклідовому просторі.
6. Знаходити власні числа і власні вектори лінійного оператора.

### **5. Аналітична геометрія**

1. Визначати рівняння прямої та площини.
2. Знаходити перетин прямих і площин, кути між ними.
3. Зводити криві другого порядку до головних осей.

### **6. Комплексний аналіз**

1. Знаходити конформні відображення областей.
2. Знаходити розвинення функцій у ряди Тейлора та Лорана. Знаходити особливі точки.

3. Обчислювати інтеграли за допомогою теорії лишків.

### **7. Диференціальні рівняння**

1. Знаходити розв'язок задачі Коші інтегровного рівняння першого порядку.
2. Знаходити ФСР ЛОР зі сталими коефіцієнтами.
3. Розв'язувати лінійні неоднорідні рівняння методом варіації довільних сталих.
4. Знаходити частинний розв'язок лінійних неоднорідних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів.
5. Розв'язувати ЛОС зі сталими коефіцієнтами.

### **8. Рівняння математичної фізики**

1. Зводити до канонічного вигляду диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку двома незалежними змінними.
2. Знати метод відокремлення змінних розв'язання крайових задач для рівнянь з двома незалежними змінними.

### **9. Теорія ймовірностей**

1. Визначати ймовірності подій, використовуючи класичне, геометричне, аксіоматичне означення ймовірності. Визначати умовні ймовірності, використовувати формули повної ймовірності та Баєса.
2. Визначати характеристики випадкових величин: визначати розподіл, щільність, математичне сподівання, дисперсію, характеристичну функцію.
3. Використовувати умовну ймовірність. Використовувати незалежність випадкових подій.
4. Визначати сумісні характеристики випадкових величин: сумісний розподіл, сумісну щільність, коваріацію, сумісну характеристичну функцію.
5. Досліджувати збіжність випадкових послідовностей за ймовірністю, майже напевно, за розподілом.
6. Застосовувати закон великих чисел і центральну граничну теорему.

### **10. Математична статистика**

1. Визначати варіаційний ряд, емпіричну функцію розподілу, вибіркові квантілі, вибіркове середнє та дисперсію.
2. Використовувати методи моментів та максимальної вірогідності для побудови оцінок невідомих параметрів.
3. Досліджувати властивості статистичних оцінок: незміщеність, конзистентність, асимптотичну нормальність.
4. Визначати достатні статистики та ефективні оцінки.
5. Будувати інтервальні оцінки.
6. Перевіряти статистичні гіпотези про параметри розподілу.
7. Перевіряти статистичні гіпотези про узгодженість, незалежність, однорідність.
8. Застосовувати критерій  $\chi^2$  перевірки гіпотези.
9. Здійснювати однофакторний дисперсійний аналіз.

### **11. Теорія випадкових процесів**

1. Визначати характеристики випадкового процесу: скінченновимірні розподіли, математичне сподівання, коваріаційну функцію
2. Визначати тип випадкового процесу.
3. Класифікувати стани ланцюга Маркова, визначати інваріантний розподіл.
4. Застосовувати формулу Іто, розв'язувати лінійне стохастичне диференціальне рівняння.

## **Порядок оцінювання**

Типовий екзаменаційний білет містить 10 задач з різних розділів програми. Кожна задача оцінюється від 0 до 8 балів. Ще 20 балів вступнику нараховується за дослідницьку пропозицію. Загалом максимальна оцінка за іспит становить 100 балів.

Програма затверджена на засіданні вченої ради механіко-математичного факультету 14 травня 2018 р.

Декан механіко-математичного факультету

М.Ф.Городній