Броунівський рух і реальний світ, або як математика фінансів поєднала досягнення біології, фізики, економіки та інших наук

Ю.С. Мішура

1. Вступ

В цій статті ми робимо спробу розповісти послідовно, як досягнення самих різних наук: суто математики, біології, фізики, кібернетики, вплинули на побудову математичної, а точніше, стохастичної (від слова "стохастика", що означає випадковість в самому широкому розумінні) теорії фінансів. Тобто метою є показати, як певна область математики, зокрема, теорії ймовірностей, що займається описом та аналізом стохастичних об'єктів, сполучається з найрізноманітнішими феноменами, проявами оточуючої реальності або з технічними явищами. Розглянемо ту частину математики, яка є теоретичним підґрунтям прикладних застосувань, тобто ту частину математики, яка прагне створити адекватні моделі існуючих явищ. При цьому створена модель повинна допускати просте, але гнучке зображення за допомогою тих чи інших математичних формул. Як тільки гарну модель створено, далі розвиток іде у двох напрямках: по-перше, сама по собі починає розвиватися теорія споріднених та більш загальних моделей, і, по-друге, модель починає охоплювати все більше і більше застосувань, оскільки приблизно однакові закономірності проявляються і в фізиці, і в фінансовій математиці, і в біології, і в економіці, і в кліматології, і навіть у деяких суспільних науках. Тому одна і та ж модель або який-небудь її різновид може бути застосований в найрізноманітніших областях.

2. Історичний екскурс

Звернемось до досить давніх часів, коли не існувало ні розвиненої теорії ймовірностей, ні фінансової математики, а фізика, звичайно, існувала з давніх давен, але, в силу обмежених технічних і теоретичних можливостей, не могла зануритись в глибини мікросвіту. І от у 1827 р. ботанік Роберт Броун (1773–1858) вперше спостерігав те явище, яке пізніше назвали броунівським рухом. (Насправді його прізвище треба було б транслювати як "Браун", так і робили певний час, але ми будемо дотримуватись сучасної традиції.) Короткий опис спостережуваного руху такий: уявіть собі лабораторний посуд, щось на зразок чашки, у якій знаходиться рідина, а у рідину насипано квітковий пилок. Так от, Броун спостерігав рух частинок квіткового пилку в цій чашці. Явище настільки його вразило, що він його детально описав. А саме, вказаний рух був за спостереженнями хаотичним, траєкторії частинок увесь час змінювали напрямок, були ламаними, фактично у жодний момент часу жодна частинка не мала фіксованого напрямку руху. Створити певний простий невипадковий опис цієї системи Роберт Броун не міг, а лише зафіксував, що рух квіткового пилку в рідині описується дуже хаотичним процесом. Зі сучасної точки зору, він фактично спостерігав випадковий процес, що приймав значення на невеликій частині площини (поверхня чашки), і який змінювався у часі недетермінованим чином. На той час не було ніяких пояснень цього феномену. Вони з'явилися набагато пізніше, причому відразу в двох галузях науки. Першим кроком у роз'ясненні цього феномену була, як не дивно, та область знань, яка займається оцінюванням фінансових активів. Але цю область знань спочатку треба було створити!

Перший крок в цьому напрямку було зроблено у 1900 р. Зробив його французький математик Луі Башельє (1870–1946). Його метою, на той час, дуже дивною з точки зору абстрактної математики, був чисто математичний опис зміни у часі цін цінних паперів. Цей опис був створений в його дисертації "Théorie de la spéculation" [1], яку він захистив в 1900 р. у Паризькому університеті. У цій дисертації він вводить в розгляд той математичний об'єкт, який ми тепер називаємо випадковим процесом, і помічає при цьому, що зміна ціни акції або іншого цінного паперу пропорційна кореню зі зміни часу. Цю зміну часу стандартно називають і позначають "дельта t":

$$\Delta S_t \sim \sqrt{\Delta t},$$

де ΔS_t — це приріст ціни акції, а Δt — це приріст часу. Більше того, за моделлю Башельє, ціна S_t акції в момент t має вигляд

$$S_t = at + b\sqrt{t}\xi,$$

де a, b — сталі коефіцієнти, ξ — випадкова величина, що має так званий стандартний гауссівський розподіл. Відзначимо одразу, що цей ефект $\sqrt{\Delta t}$ спостерігався і спостерігається не тільки в фінансовій математиці. А от що стосується Башельє, то він випередив свій час, як це нерідко буває з людьми дуже талановитими.

Математики, в тому числі і досить поважні ймовірносники, зокрема Поль Леві, в ті часи його роботи не оцінили, вона була практично забута. Леві навіть потім вибачався перед Башельє. Просто для "чистих" математиків тих часів інтерес до фінансових активів здавався неприродним. Зважте, що це були часи, коли Давід Гільберт сформулював свої знамениті 23 проблеми для розв'язку в XX столітті, і серед них фактично не було ні ймовірнісних, ні взагалі прикладних задач. А Луї Башельє все подальше життя був професором у Франції і викладав в різних університетах. До змісту дисертації він практично не повертався, а викладав чисту математику. Згадали вже про його дисертацію 50 років потому, про що мова йтиме далі, а повною мірою представили широкому загалу вже 100 років потому. Рукописи, як відомо, не горять, за безсмертним висловом М. Булгакова, під чим ми розуміємо те, що теорія, створена з випередженням часу, знайде своє місце в житті суспільства, головне — створити її. Науковий здобуток Башельє був справедливо оцінений, також цілком справедливо його назвали творцем сучасної фінансової математики, і в 2000 році відбувся перший конгрес з фінансової математики, який носить назву "Конгрес Башельє" (Bachelier Finance Society – World Congress). Перший конгрес проходив у Парижі (відтоді ці конгреси проводяться регулярно раз на два роки, в 2016 році черговий конгрес відбувся в Нью-Йорку). Автору цих рядків пощастило бути учасником і доповідачем на першому Конгресі Башельє, де серед пленарних доповідачів було 5 лауреатів Нобелівських премій з економіки, а фактично це були люди, які створили сучасні засади фінансової математики. Пам'ятаю (серйозне завжди крокує поруч з курйозним), як хвилювалась президент Конгресу мадам Жюльєтт Геман, професор Економічного університету в Парижі: "Ох, 5 нобелівських лауреатів в президії, як все пройде?!", і її численні мониста дзвеніли і летіли слідом за нею. Але все пройшло чудово, і було дуже цікаво чути, як ім'я Башельє постійно згадували, була зроблена спеціальна доповідь, було також опубліковано і презентовано його дисертацію, текст її подарували всім учасникам. Модель, яку розглядав Башельє для ціни акцій, була революційною для свого часу, але мала один недолік.

Щоб зрозуміти її структуру та її недолік, спочатку проаналізуємо її складові. В принципі, вона побудована в рамках стандартного підходу до моделювання явищ: математична модель складається з двох чинників, перший чинник, у самому простому вигляді, це зсув або тренд, він має просту структуру і є пропорційним до зміни часу, а другий чинник — це той самий феномен, на який звернув увагу спершу Броун, потім його описав Башельє. Це так званий броунівський рух B_t, який в кожен фіксований момент часу можна записати як $B_t = \sqrt{t}\xi$, хоча при цьому до певної міри втрачаються закономірності його розвитку у часі. Отже, нагадаємо, що ціна акції записується як

$$S_t = at + bB_t,$$

де a — коефіцієнт зсуву або тренду, at — це і є зсув або тренд, b — коефіцієнт дифузії, або коефіцієнт волатильності, від слова "volatility", що означає "мінливість", а в другому доданку випадкова величина $B_t = B_t(\omega)$ залежить від двох параметрів: часу t і від випадку, тобто ω — це випадок, або інакше кажуть, що це сценарій розвитку подій. Кожний сценарій характеризує певну можливість. Щоб зрозуміти, що таке сценарій, розглянемо ситуацію, коли ми кидаємо гральний кубик, і там є 6 сценаріїв, кожний сценарій відповідає появі відповідного числа на верхній грані кубика. Коли ми розглядаємо броунівський рух, то число сценаріїв вважається набагато більшим, воно незліченне, типу континууму. Давайте забудемо, що сценаріїв дуже багато, і розглянемо один із них. Припустимо, що у фіксованому сценарії у нас при кожному ω є функція, графік якої ніхто не може побудувати (уявіть собі таку парадоксальну ситуацію). Якщо ж побудувати цей графік дуже приблизно, то функція стартує з нуля і в жодній точці не має дотичної, траєкторія є дуже хаотичною і нерегулярною, але розмах коливань, можна сказати, збільшується, якщо розуміти під коливанням рух від максимального до мінімального значення і навпаки (рис. 1).

Оце і буде типова траєкторія броунівського руху. Фактично

$$|B_t| \sim \sqrt{t},$$

$$|B_{t+\Delta t} - B_t| \sim \sqrt{\Delta t}.$$

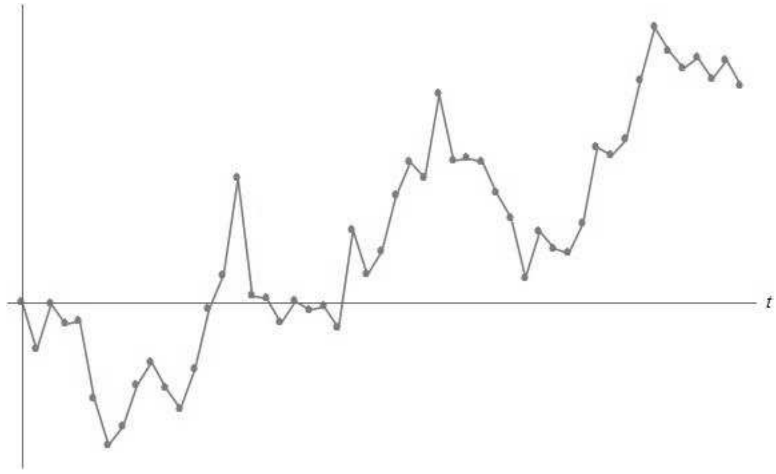

Рис. 1.

Цей ефект $\sqrt{\Delta t}$ дуже сильно відрізняє другий доданок від першого. Тому що у першому ми бачимо, що приріст пропорційний просто до Δt, тобто він є лінійним, а в другому він пропорційний до $\sqrt{\Delta t}$. Випадковий процес B_t ще називається випадковим шумом, броунівським шумом, просто шумом, правда, іноді білим шумом називають його узагальнену похідну, тут термінологія може дещо відрізнятись. Але два доданки моделі дуже типові, один характеризує регулярну, а другий — хаотичну, нерегулярну складові зміни ціни в часі. Хаотична складова і була основним досягненням Башельє. Справа в тому, що очевидний нині факт: ціни є випадковими, був довгий час шокуючим і неприйнятним для математиків, як це не дивно.

Але все ж таки модель, яку розглянув Башельє, мала великий недолік, який зараз є очевидним, але в ті часи просто ніхто не задумувався над ситуацією. Недолік полягав у тому, що модель $S_t = at + bB_t$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Справді, чинник B_t має гауссівський розподіл, а носієм значень гауссівського розподілу є вся дійсна вісь. В моделі Башельє ціна S_t в кожний момент часу t може попасти в будь-яку підмножину дійсної вісі, з певними ймовірностями. І в цьому її недолік, оскільки нам потрібно моделювати ціну акції або іншого цінного паперу, нерухомості тощо додатними значеннями, бо, на превеликий жаль покупців, ціни від'ємними не бувають, та ще й ростуть у часі.

Наступний крок у розвитку теорії броунівського руху зробили видатні фізики. А саме, в 1905–1906 роках були, незалежно одна від одної, опубліковані знамениті роботи Альберта Ейнштейна (1879–1955) і Маріана Смолуховського (1872–1917), [2] та [3]; потім їхні статті з вказаної тематики, в яких було роз'яснено феномен броунівського руху, були перекладені і об'єднані у збірник [4]. Ейнштейн і Смолуховський пояснили, зокрема, випадковий рух квіткового пилу в рідині таким явищем, як тепловий хаотичний рух атомів і молекул. Відповідно до цієї теорії, молекули рідини або газу знаходяться в постійному тепловому русі, причому імпульси різних молекул неоднакові за величиною і напрямком. Якщо поверхня частинки, вміщеної в таке середовище, мала, як це має місце для броунівської частинки, зокрема, частинки квіткового пилу, то удари, які відчуває частинка з боку оточуючих її молекул, не будуть точно компенсуватися. Тому в результаті “бомбардування” молекулами броунівська частинка приходить в безладний рух, змінюючи величину і напрямок своєї швидкості приблизно 10^{14} разів за секунду. Отак з фізичної точки зору було пояснено такий собі начебто суто біологічний феномен. З’ясувалося також, що для опису цього теплового руху і для створення цієї кінетичної теорії потрібен випадковий процес B_t, тобто адекватною моделлю для цієї кінетичної теорії є броунівський рух. Ейнштейн і Смолуховський не просто описали цей випадковий процес з точки зору його приросту і з точки зору залежності його від випадків, а вони знайшли так званий розподіл значень процесу і склали рівняння в частинних похідних, якому задовольняє так звана перехідна щільність розподілу броунівського руху. Якщо взяти один фіксований момент часу $t > 0$, то B_t має гауссівський (нормальний) розподіл

$$B_t \sim N(0, t),$$

що характеризується такою формулою для розподілу ймовірностей

$$P\{B_t \in A\} = \int_A \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx.$$

Тут символ $P\{B_t \in A\}$ означає ймовірність відповідної події, а подія полягає в тому, що значення броунівського руху в момент часу t попало в множину A на прямій. Якщо намалювати графік щільності такого розподілу, то одержимо знамениту криву Гаусса, яка є симетричною відносно нуля (рис. 2).

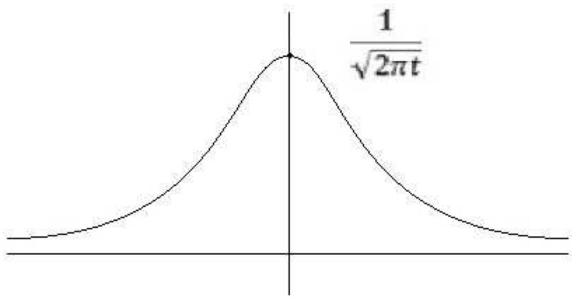

Рис. 2.

В залежності від t змінюється координата верхньої точки. Розподіл зосереджений поблизу середнього значення, він дуже швидко спадає і називається розподілом з легкими хвостами. Це ми розглянули розподіл процесу в один момент часу.

Але нас цікавить саме рух, тобто розвиток залежності значень цієї випадковості в наступні моменти часу, і яка їхня залежність від минулого, оскільки ми розглядаємо нехай просту, але динамічну систему у часі. Так от, А. Ейнштейн і М. Смолуховський також до певної міри прояснили і те, як відбувається розвиток броунівського руху в часі, а саме, пояснили, що цей броунівський рух є так званим марківським процесом. Назва даного процесу походить від імені видатного математика А.А. Маркова, який вперше ввів у розгляд такий феномен: те, що розвивається у майбутньому, як правило, не можна вважати повністю незалежним від минулого. Розглянемо це твердження детальніше. Розіб'ємо числову вісь на 3 частини: минуле, сучасне і майбутнє (рис. 3).

Марков був першим, хто ввів у розгляд такі моделі зміни об'єкту в часі, коли при фіксованому сучасному майбутнє не залежить від минулого. Це і є марківська властивість.

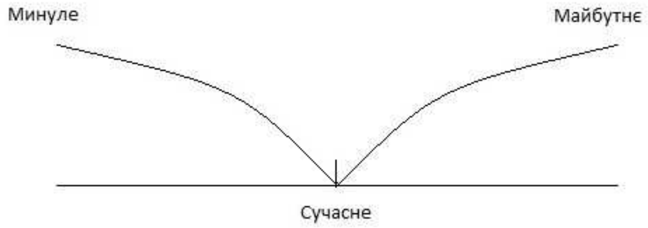

Рис. 3.

Виявилося, що броунівський рух має марківську властивість. Це було записано за допомогою так званих перехідних імовірностей, вірніше за допомогою рівнянь в частинних похідних для щільностей, тобто похідних імовірностей переходу. Ці рівняння і показали, що для броунівського руху має місце марківська властивість: незалежність майбутнього від минулого при фіксованому сучасному. Властивість ця істотно допомагає спростити принаймні формули, що відносяться до ймовірностей переходу. Таким чином, теорія броунівського руху знайшла серйозне підкріплення з боку фізиків і "обросла" цікавими властивостями. Що ж було далі?

Наступний період, коли з'явились нові значні математичні досягнення у вказаному напрямку, а паралельно і досягнення в економіці, це 30-і роки XX століття. В той період почався бурхливий розвиток сучасної економічної теорії. Зокрема, видатним математиком, глибоким спеціалістом з функціонального аналізу, автором багатьох підручників, наприклад, цікавого підручнику [5] з функціонального аналізу, і одночасно видатним економістом був Леонід Канторович (1912-1986). Детально особистість Канторовича розкрита в збірнику [6], в якому особливо рекомендуємо почитати статтю І.М. Гельфанда "Леонід Канторович і синтез двох культур". Канторович у ранньому дитинстві виявив блискучі здібності до математики, в університет вступив в 14 років, в 22 роки став професором Ленінградського університету, в 23 став доктором фізико-математичних наук, ступінь було присвоєно без захисту дисертації. Відтоді він працював професором Ленінградського інституту інженерів промислового будівництва. Несподіваний поворот в його долі відбувся в 1938 р., коли до інституту звернувся фанерний трест із простим проханням: "Будь ласка, розкажіть нам, як оптимальним чином розкроїти цю нашу фанеру, бо у нас багато відходів. Як нам мінімізувати відходи?" (Нагадаємо, що фанера — це тонка дерев'яна пластинка для обклеювання поверхні столярних виробів.) Доручили відповісти на це питання молодому вченому Канторовичу. Він зрозумів, що основні закономірності, які він вивів і рекомендував для оптимального розкрою фанери, можна застосувати при оптимізації надзвичайно широкого класу процесів, які описуються лінійними рівняннями і нерівностями з багатьма лінійними обмеженнями. Таким чином, він заклав основи лінійного програмування. Але на цьому він не зупинився. Він був апологетом оптимальної економіки.

На жаль, за радянських часів його теорії неможливо було фактично застосовувати тому, що застосування оптимізації в економіці веде до знищення управлінської регулюючої структури як фактично непотрібної, а в світі ще не було структур управління, які б добровільно себе знищували, навпаки, законом є те, що кожна адміністративна структура має внутрішню тенденцію до розширення. Тому структури регуляції економіки, як тільки могли, опиралися його теоріям. Створилась дещо парадоксальна ситуація: роботи Канторовича збереглися (рукописи, нагадаємо, не горять), здобули широке визнання, Канторович одержав Ленінську премію — найвищу нагороду радянських часів, його дуже високо цінували як математика, зокрема, свого часу залучили до розрахунків, пов'язаних зі створенням ядерної зброї, але застосувати свою досконалу економічну теорію на практиці змоги він не мав.

Паралельно теорію оптимізації процесів в економіці перевідкрив американський математик нідерландського походження Тьяллінг Чарльз Купманс (1910–1985). А в 1975 році Леонід Канторович разом з Тьяллінгом Купмансом отримав Нобелівську премію з економіки "за внесок в теорію оптимального розподілу ресурсів". На церемонії вручення представник Шведської королівської академії наук відзначив: "Основні економічні проблеми можуть вивчатися в науковому плані, незалежно від політичної організації суспільства, в якому вони досліджуються". Одержали вони дану премію за відкриття, яке дуже стисло можна описати так: нехай маємо ринок з n інвесторами, кожен з яких прагне максимізувати свій прибуток. Канторович відкрив, що розташування оптимальних цін поміж інвесторами є одночасно розташуванням цін економічної рівноваги. Тобто, ринок може знаходитися в стані економічної рівноваги, а при цьому всі інвестори максимізують свою так звану функцію корисності, тобто свій прибуток, виміряний спеціальним чином. Підтвердженням ідей Канторовича є теорія рівновагиЕрроу–Дебре. Кеннет Джозеф Ерроу (нар. 1921) створив загальну теорію економічної рівноваги і отримав Нобелівську премію за 1972 рік (спільно з Джоном Хіксом) "за новаторський внесок у загальну теорію рівноваги і теорію добробуту". Тобто за відкриття в економіці, які фактично ґрунтуються на математичних моделях, досить часто присуджуються Нобелівські премії. І при цьому економічна теорія і фінансова математика дуже тісно пов'язані, про що мова йтиме в подальшому екскурсі, куди ми і будемо просуватись.

Отже, далі в часі паралельно розвивалась математична теорія випадкових процесів, зокрема, того ж броунівського руху, і фінансова математика. Повернемось до лінійної моделі Башельє $S_t = at + bW_t$, але спробуємо модифікувати її так, щоб ціна не могла набувати від'ємних значень. Ми відразу зрозуміємо, що реальний світ не завжди може бути описаний лінійною моделлю, він набагато складніший. Спробуємо спочатку узагальнити дифузійну складову нашого рівняння. Тобто розглянемо не просто броунівський рух, а інтеграл від деякої функції по траєкторії броунівського руху:

$$\int_0^t f(s)dB_s,$$

де f — деяка функція, нехай спочатку невипадкова. Як же побудувати інтеграл по броунівському руху, якщо він настільки нерегулярний? Інтеграли такого типу ввів у розгляд і дослідив Норберт Вінер (1894–1964). Вінер походив з Бєлостоку (нині польське місто), вчився в гімназії у Мінську, потім у Варшаві, в Технологічному університеті в Берліні, переїхав на деякий час у США, потім повернувся в Європу. Працював у багатьох університетах у Європі і в Китаї, був типовим громадянином світу. Був філософом, журналістом, і при цьому написав сотні статей з теорії ймовірностей і статистики, рядів і інтегралів Фур'є, з теорії потенціалу та теорії чисел, з узагальненого гармонійного аналізу. Він був удостоєний Національної наукової медалі США, вищої нагороди для людини науки в Америці. На урочистих зборах, присвячених цій події, президент Джонсон сказав: "Ваш внесок в науку на диво універсальний, ваш погляд завжди був абсолютно оригінальним, ви приголомшливе втілення симбіозу чистого математика та прикладного вченого". Це була абсолютно непересічна особа, він є батьком науки управління, яку ми знаємо під ім'ям кібернетики. Всі знають третій фізичний закон Ньютона про те, що дія дорівнює протидії, та от Норберт Вінер поширив цей принцип на набагато складніші системи [7]. До речі, з цього миттєво випливає, що складна система тим ближче до стану рівноваги, чим менше вона зарегульована — принцип, що далеко не завжди розуміють сучасні керівники. Під час другої світової війни Норберт Вінер працював над математичним апаратом для систем наведення зенітного вогню (детерміновані та стохастичні моделі з організації та управління американськими силами протиповітряної оборони). Він розробив нову дієву ймовірнісну модель управління силами ППО, і при цьому його принципи є універсальними для багатьох споріднених систем. Незважаючи на те, що він батько кібернетики, філософ, журналіст, все ж таки свою книгу він назвав "Я — математик" [8]. Тобто він вважав, що основне його кредо — це бути математиком. Його внесок в теорію випадкових процесів (на момент створення його робіт, зважте, цього терміну ще не було) полягає в тому, що він розглянув ситуацію розвитку процесу в часі, яка трохи відрізняється безпосередньо від нашого знайомого процесу, який ще досі був броунівським рухом, але тепер став вінерівським процесом, тому що його назвали за ім'ям Вінера (наразі використовуються обидві назви, на смак автора відповідної роботи). Поки що у нього функція f при інтегруванні була невипадковою, але сам факт створення інтегралу по вінерівському процесу був певною революцією. З прикладної точки зору, функцію f можна розглядати як щось, що є на вході в систему, вхідний сигнал, а вже інтеграл — це перетворення вхідного сигналу, яке ми отримуємо на виході. Це і був основний внесок Норберта Вінера саме в теорію броунівського руху. Але паралельно в нього є теорема Вінера, рівняння Вінера–Хопфа, його досягнення дуже великі, це була фактично людина геніальна. А ми переходимо плавно від броунівського руху до вінерівського процесу, а по суті, нагадаємо, це одне і теж.

Паралельно з досягненням Вінера, який розглянув інтеграл типу $\int_0^t f(s)dB_s$, тобто у нього реакція системи на вхідний сигнал — це її стан на виході, але при цьому Вінер вважав, що сигнал на вході невипадковий, розвивалась і теорія інтегрування випадкових функцій по вінерівському процесу, математично набагато складніша. Справді, з прикладної точки зору доречно вважати сигнал на вході випадковим, оскільки не зовсім логічно, що на вході ми маємо чисто детерміновану структуру, а на виході одержуємо випадкову. Крім того, творча людина влаштована так, що маючи деяку теорію, прагне її узагальнити. Отже, наступне математичне досягнення — це побудова інтеграла по вінерівському процесу від випадкового сигналу (випадкового процесу, випадкової функції, це все синоніми). Позначимо цей інтеграл

$$\int_0^t f(s,\omega)dW_s, \tag{1}$$

підкреслюючи цим залежність підінтегральної функції від випадку, а наш знайомець — вінерівський процес, звісно, теж залежить від випадку. Теорію такого інтегрування, яке називають стохастичним, паралельно розвивали три талановиті математики, абсолютно не знайомі один з одним і незалежно один від одного. Це, по-перше, Кіосі Іто (1915–2008), видатний японський математик. За його ім'ям інтеграли виду (1) називають інтегралами Іто, є також знаменита вормула Іто, числення Іто. Його надбання широко застосовуються в самих різних областях, зокрема, в біології, фізиці, теорії управління та фінансовій математиці. Але було ще дві людини, не менш талановиті, але з іншими, можна сказати, більш драматичними, долями. Це український учений Йосип Ілліч Гіхман (1918–1985), який абсолютно незалежно від інших розвинув теорію такого інтегрування і теорію так званих стохастичних диференціальних рівнянь. Ця теорія містилась у його кандидатській дисертації. У 1942 р. він приїхав з фронту, де воював, захистив свою кандидатську дисертацію, і знов поїхав на фронт. В цій роботі, підкреслимо знову, містилися основи теорії стохастичного інтеграла, початок теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Тобто фактично роботи Іто і Гіхмана дещо перетиналися, були і певні відмінності — Іто не розглядав теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Потім Й.І. Гіхман разом з видатним математиком А. В. Скороходом (1930–2010) написали знаменитий тритомник "Теория случайных процессов" [9], де описали основні класи випадкових процесів. Деякі класи описані ширше, наприклад, марківські процеси, їм присвячено увесь другий том, третій том присвячено теорії стохастичних диференціальних рівнянь, перший том — загальним процесам та функціональним граничним теоремам. Ця книга розійшлася по світу, і такого аналогу більше не створено, тому що в ній містяться фундаментальні основи теорії випадкових процесів, а вони за останні 50 років, звичайно, не змінилися. І була ще одна постать, людина дуже драматичної долі, яка незалежно розвинула теорію стохастичного інтегрування. Це Вольфганг (Вінсент) Деблін (1915–1940). Вивчаючи теорію ймовірностей в Інституті Анрі Пуанкаре під керівництвом Моріса Рене Фреше, В. Деблін швидко здобув репутацію обдарованого теоретика. У 23 роки став доктором наук і був обраний до Французької Академії наук. Основним напрямком його досліджень були марківскі процеси. Деблін був призваний в армію, звідки після початку війни з Німеччиною вже не міг демобілізуватися. Проходячи дворічну службу за призовом, після початку другої світової війни, він добровольцем пішов на фронт, де і загинув в 1940 році. Перед відправкою на фронт він відіслав блокнот зі своїми нотатками до Французької Академії наук. На жаль, лист з блокнотом залишався невідкритим і забутим після війни. Але рукописи не горять, нагадаємо втретє, і виявлені у 2000 році в архіві Паризького університету рукописи В. Дебліна були розшифровані. Вони містили в собі основи теорії стохастичних диференціальних рівнянь, Деблін визначив інтеграл Іто і довів формулу Іто, яка була вперше опублікована японською мовою в 1942 році, тобто в певному розумінні Деблін був першим у часі, хто розробив цю теорію. В ознаменування його результатів, теорему Іто тепер називають теоремою Іто-Дебліна. Автору цих рядків довелось в 2008 році прийняти участь в роботі Конгресу Європейського математичного товариства в Амстердамі, і там, буквально випадково, побачити вперше фільм про Вольфганга (Вінсента) Дебліна і дізнатися про його видатну математичну творчість, яка стала відомою широкому колу математиків більше ніж через 60 років після його загибелі. Тепер його біографію і наукові здобутки знають усі спеціалісти з теорії ймовірностей, чого ця людина, безперечно, заслуговує.

3. Стохастичні диференціальні рівняння і сучасна фінансова математика

Отже, об'єктом нашої уваги стали стохастичні диференціальні рівняння. Випишемо таке рівняння у найпростішому випадку. З цією метою згадаємо лінійну модель $S_t = at + bW_t$. Узагальнимо її, записавши спочатку у диференціальній формі вигляді: $dS_t = adt + bdW_t$. Тепер запишемо більш загальні коефіцієнти, не просто сталі, як в лінійній моделі, а деякі функції від часу, і від розв'язку (звичайно, якщо він існує). Отже, ми одержимо таке стохастичне диференціальне рівняння, записане у диференціальній формі:

$$dX_t = a\left(t, X_t\right) dt + b\left(t, X_t\right) dW_t.$$

Це є загальний вигляд одновимірного стохастичного диференціального рівняння, де $a\left(t, x\right)$ — коефіцієнт зносу, $b\left(t, x\right)$ — коефіцієнт дифузії. Це саме рівняння можна записати в інтегральній формі:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t b\left(s, X_s\right) dW_s,$$

де останній інтеграл — це той самий знаменитий інтеграл Іто по вінерівському процесу, а X_0 — це початкове значення, яке задля простоти будемо вважати сталою, тобто деяким дійсним числом. Якщо уважно придивитись до структури рівняння, ми помітимо, що в ньому присутнє єдине джерело випадковості — це вінерівський процес, він в деякому розумінні "веде" за собою розв'язок, якщо, звичайно, той існує. Найпростіші умови існування та єдиності розв'язку були сформульовані Гіхманом, цікаво, що вони фактично ті самі, що і стандартні умови існування та єдиності розв'язку звичайного диференціального рівняння, в якому нема ніякої випадковості.

Зрозуміло, що ми одержали великий простір для математичних моделей та їх дослідження. Тепер відправимось на пошуки слушної моделі для ціни фінансового активу, яка б в кожний момент часу була невід'ємною, і при цьому задовольняла деяке стохастичне диференціальне рівняння. У пошуках такої моделі звертаємось до праць Пола Самуельсона (1915–2009), одного з тих нобелівських лауреатів, які були присутні на першому Конгресі Башельє. А почалось все з того, що Пол Самуельсон отримав в 1954 році поштову листівку від статистика Леонарда Севіджа (людини, яку колеги небезпідставно називали геніальною). Севідж копався в бібліотечних книгах і випадково відкопав ту саму дисертацію Башельє, про яку йшла мова на початку даної статті. Він і спитав Самуельсона, чи той читав цей твір, і як він відноситься до випадковості, зануреної в тіло фінансів. Самуельсон віднісся цілком позитивно. Його інтерес був підігрітий також промовою Моріса Кендалла, професора Лондонської школи економіки, виголошеною в 1952 році. Кендалл намагався знайти такі моделі зміни цін, які б давали можливість передбачення, але не зміг. Він висловився так, що цінами керує "демон випадку", і ціни є чимось на зразок економічного броунівського руху. Згодом Самуельсон переробив модель Башельє, перетворивши її на так званий геометричний броунівський рух, тобто випадковий процес виду

$$S_t = \exp\{at + bW_t\},$$

де a і b — сталі коефіцієнти, а W_t — наш давній знайомець, вінерівський процес. Таким чином, Самуельсон уполював двох зайців: створив невід'ємну модель ціни акції, яка при цьому задовольняє дуже просте лінійне стохастичне диференціальне рівняння

$$dS_t = \left(a + \frac{b^2}{2}\right) S_t dt + bS_t dW_t,$$

а загадкова добавка $\frac{b^2}{2}$ з'являється в силу властивостей стохастичного інтегралу і легко одержується за допомогою формули Іто. Опис цієї моделі можна прочитати в одному з багатьох десятків перевидань основної праці П. Самуельсона [10]. Зауважимо, що модель геометричного броунівського руху досить добре описує реальність. Існує багато спостережень, які показують, що логарифм ціни активу, тобто $\ln S_t$, справді має лінійну структуру, тобто задовольняє правило $\sqrt{\Delta t}$. Спостереження за цінами акцій ведуться з XIX століття. Даних накопичилося мільйони, і часто в період відсутності криз або інших потрясінь логарифм ціни акції справді задовольняє лінійну модель. Це відбувається не обов'язково і не завжди, але дуже часто буває й таке. При цьому існує безліч узагальнень вказаної моделі, з урахуванням можливих стрибків або дефолтів.

Іншим поштовхом до розвитку сучасної теорії фінансів була значна економічна і фінансова подія, що відбулась в 1968 році. А саме, ціни на золото та інші дорогоцінні метали були "відпущені", тобто стали визначатись законами ринку, а не шляхом регулювання. Історія цього питання полягає в такому: з 1933 по 1976 рік офіційна ціна золота знаходилася під контролем Міністерства фінансів федерального уряду Сполучених Штатів Америки. Зараз вона до певного степеня контролюється Лондонською фондовою біржею, але цей контроль не приводить до якихось тотальних наслідків. У 1944 році ціна на золото була на рівні 35 доларів США за тройську унцію (тройська унція = 31,1034768 грама), і час від часу збільшувалася або зменшувалася під впливом девальвації долара, світових криз і воєн. Свого часу повністю всі банківські білети, тобто гроші, були прив'язані до ціни на золото. Наприклад, на кожному карбованці, яким користувалися за радянських часів, було написано, що цей окремий карбованець забезпечений золотом, дорогоцінними металами та іншими запасами Державного банку. Потім вартість золота істотно зросла в зв'язку зі збільшенням попиту на золото в якості допоміжної сировини для виробництва електроніки і радіотехніки, ювелірної промисловості, медицини та інших цілей. Але часто ціна на золото зростала і в результаті спекулятивних операцій на фондових біржах, і в результаті створення високоліквідних активів центральними банками різних країн. Щоб втримати ціну на золото та інші дорогоцінні метали, в 1961 році країни Західної Європи створили так званий "золотий пул", який включав центральні банки Великобританії, Німеччини, Франції, Італії, Бельгії, Нідерландів, Швейцарії і банк Нью-Йорку. Цей пул був створений для того, щоб стабілізувати світові ціни на золото, але в 1968 році, після того, як девальвував британський фунт, Великобританія витратила 3000 тонн золота, щоб врегулювати внутрішні ціни на золото, після чого золотий пул розвалився. З цього часу ціна на золото визначається ринком, тобто попитом і пропозицією, а валютні запаси відокремлені від ціни на золото і нічим офіційно не забезпечені. Вільні ціни на золото привели до додаткових випадкових складових на фінансових ринках, і, як наслідок, стохастична теорія фінансів почала розвиватись дуже інтенсивно і як теоретична наука, і як інструмент для повсякденного управління банківськими і біржовими установами.

У згадані часи початку бурхливого розвитку стохастичної теорії фінансів, тобто у 70-ті роки XX століття, найбільш, так би мовити, математичний напрямок розвитку фінансової теорії зосередився на оцінці так званих вторинних цінних паперів на ринку, що мали більш складну структуру, ніж акції. Що це за папери? Розглянемо таку ситуацію: на ринок приходить покупець і каже: "Продайте мені право в деякий момент купити акцію, але щоб я не був зобов'язаний це зробити." Таке право купити або продати акцію без зобов'язання це зробити називається опціоном купівлі та продажу, відповідно.

Нехай маємо опціон купівлі. В момент $T > 0$, який називається моментом виконання опціону, покупець опціону може купити акцію за фіксованою ціною, але може цього й не робити. Якщо реальна ціна акції в момент T перевищує деяку фіксовану страйкову ціну, тобто $S_T > K$, то він купує акцію, миттєво її продає, і в цьому випадку $(S_T - K)^+$ — це його прибуток. Якщо ж $S_T < K$, то покупець не робить нічого. Ясно, що покупець при всіх сценаріях розвитку подій залишається або в прибутку, або при своєму початковому капіталі, тобто не ризикує нічим. Але ринок повинен бути в стані рівноваги, тобто, якщо покупець хоче придбати такий цінний папір, то він повинен за нього щось заплатити. Так от, однією з основних задач фінансової математики, яку було розв'язано в 1973 році, і було обчислення так званої справедливої ціни опціону, яка б тримала ринок у стані економічної рівноваги. Зрозуміло, що переоцінювання опціонів вело б до надмірних прибутків продавців, але лише деякий час, потім попит би знизився і ціна також, і навпаки, недооцінювання вело б до прибутків покупців, покупці б кинулися скуповувати опціони, і підвищення попиту привело б до підвищення ціни. Щоб уникнути цих непотрібних коливань, і треба було розробити математичну теорію розрахунку справедливих цін. Цьому питанню були присвячені роботи Фішера Блека (1938–1995), Майрона Шоулза (нар. 1941) і Роберта Мертона (нар. 1944), останні двоє з яких також стали лауреатами Нобелівської премії в 1997 році за "новий метод визначення вартості похідних цінних паперів" (Блек не дожив до року присудження). Знаменита формула Блека–Шоулза і дає нам справедливу ціну опціону купівлі. Наведемо цю формулу, щоб показати, яка вона проста і красива. Отже, нехай ціна акції в момент часу T дорівнює

$$S_T = x \exp\{\sigma\sqrt{T}\xi + (r - \sigma^2/2)T\},$$

де випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Тоді справедлива ціна C опціону купівлі, що має вигляд $(y-K)^+$, дорівнює

$$C = x\Phi\left(d_+(x,T)\right) - e^{-rT}K\Phi\left(d_-(x,T)\right),$$

де $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-u^2/2}du$ — стандартна нормальна (гауссівська) функція розподілу, x — початкова ціна акції,

$$d_+(x,T) = \frac{\ln(x/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_-(x,T) = d_+(x,T) - \sigma\sqrt{T}.$$

При цьому поняття справедливої ціни невіддільне від концепції безарбітражного ринку, тобто ринку, на якому не можна одержати прибуток без ризику. Якщо можна так сказати, нормальний фінансовий ринок має бути безарбітражним. Умови безарбітражності теж були одержані в 70-ті роки, хоча і суттєво узагальнені пізніше, і детально викладені, наприклад, у книгах [13] і [14].

Теорія Блека, Шоулза і Мертона користується попитом і до цього моменту. Вона спирається на ціну акції, що задається геометричним броунівським рухом, але якщо ціна акції стрибкова, або має більш складну структуру, або опціон має теж більш складну структуру ніж простий опціон купівлі, треба шукати інші формули. За останні 43 роки написано десятки тисяч робіт, які узагальнюють теорію Блека, Шоулза і Мертона. Починаються всі ці роботи приблизно однаково: автори критикують теорію Блека, Шоулза і Мертона, бо знають випадки, де ця теорія не діє, а далі шукають іншу модель, яка б описувала більш адекватно їхню ситуацію.

Практики фінансових установ, так звані "кванти" (від слів "quantitative finance", або "кількісні фінанси") широко користуються математичними моделями. Робота їхня дуже часто така: людина розробляє стратегію на основі математичної теорії і намагається цю стратегію спочатку змоделювати на віртуальному ринку. Якщо вона працює більш-менш добре, то стратегія допускається на реальний ринок, і тоді людина спостерігає, що відбувається на торгах, що вона втрачає і що здобуває. Ми повинні звернути увагу на те, що реальний ринок може бути змодельований по-різному, і його властивості будуть відрізнятися в різних моделях. Єдиний спосіб визначити, які модель підходить найкраще — це перевірити їх на практиці. Як правило, розгляд кількох моделей ринку і декількох торгових стратегій є надто дорогим заходом, отже, мистецтво фінансового аналітика полягає, зокрема, у виборі правильної моделі.

Теоретично, звичайно, стратегію інвестора можна оптимізувати, але в цілому на ринку, оскільки він повинен бути в стані рівноваги, програш в одному місці компенсується виграшем в іншому. Все ж таки ринок, з одного боку, регулюється деякими законами, а з іншого боку — це лотерея, тому що він залежить від випадку. Тобто виграти реально людині, яка просто будує стратегію, не так просто. Це фактично в якомусь розумінні бюджетний працівник, а виграють в основному лише великі компанії, великі власники. І все ж таки у межах невеликого часу можна здобути певний прибуток навіть тоді, коли ринок знаходиться у стані рівноваги. Це один з висновків, який дає змогу одержати фінансова математика.

Зауважимо, що задачі сучасної фінансової математики не зводяться суто до теорії арбітражу і обчислення цін паперів. Це і оптимізація фінансових зобов'язань, і теорія портфелю, і опис динамічної равноваги, і чисельні методи, зокрема, метод Монте–Карло, і ефективність ринку, і багато інших проблем. Огляд літератури з фінансової математики (в основному, підручників та монографій, оскільки оглянути десятки тисяч статей не є можливим) міститься у книгах [15] і [16]. Відзначимо також, що моделі, побудовані для фінансової математики, не перебувають осторонь всіх інших наук, а також практики. Насправді, вони використовуються в біології, прогнозуванні погоди, кліматології, в моделюванні електронних комунікацій, оскільки процеси, що відбуваються в цих областях, дуже часто мають ті ж самі особливості.

Опис сучасних фінансових моделей ґрунтується як на теорії випадкових процесів і стохастичному аналізі (теорії мартингалів, стохастичному інтегруванні, теоремі Гірсанова, теорії стохастичних диференціальних рівнянь, мартингальних зображеннях і елементах числення Маллявена). Також використовуються і базові факти з функціонального аналізу, з теорії топологічних, банахових та гільбертових просторів, з теорії лінійних функціоналів. Всім цим наукам можна навчитись, зокрема, вступивши на навчання до механіко-математичного факультету на спеціальність "Статистика", де викладаються ці та багато інших цікавих дисциплін.

Література

[1] Bachelier L., Théorie de la spéculation, Annales scientifiques de l'E.N.S. 3 serie, tome 17 (1900), p. 21-86.

[2] Einstein A., Uber die von der molekularkinetischen Theorie der Warme geforderte Bewegung von in ruhenden Flussigkeiten suspendierten Teilchen (in German). Annalen der Physik (4), 17, 549–560 (1905).

[3] Von Smoluchowski, M. Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen (in German). Annalen der Physik, (4) 21, 756-780 (1906).

[4] Эйнштейн А., Смолуховский М., Брауновское движение, пер. с нем., М.-Л. 1936.

[5] Канторович Л.В., Акилов Г.П., Функциональный анализ (3-е изд., Наука, 1984).

[6] Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый. В 2-х т. Т. 1. Новосибирск: Изд-во СО РАН. Филиал "Гео", 2002. 542 с.

[7] Wiener N. Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine. – MIT press, 1961.

[8] Wiener N., I Am Mathematician. Mit Press (1956, 1964). Переклад: Н. Винер. Я — математик. М.: Наука, 1964.

[9] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М., Наука, Т.1, 1971. Т. 2, 1973. Т.3, 1975.

[10] Самуэльсон П., Нордхаус В. Экономика. – М.: "Вильямс", 2014.

[11] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy. 1973, 13. P. 637-659.

[12] Merton R.C. Theory of rational option pricing. – Bell Journal of Economics and Management Science. – 1973. – 14 (Spring), P. 141–183.

[13] Shiryaev A. N. Essentials of stochastic finance: facts, models, theory (Vol. 3). World scientific, 1999.

[14] Delbaen F., Schachermayer W. The Mathematics of Arbitrage. – Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[15] Mishura Yu. Financial mathematics. Elsevier, 2016.

[16] Мішура Ю.С., Шевченко Г.М. Математика фінансів. Ред.-видавн. центр Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, 2014.